CAPÍTULO

# 3

# Límite de una función

[1]

## 3.3 Límites laterales

- Supongamos que $f(x)$ está definida en un cierto intervalo $(a, x_0)$. Si para números $x$ del dominio de $f$ suficientemente próximos a $x_0$ y menores que $x_0$, los valores correspondientes de $f(x)$ están tan próximos a $\alpha_1$ como queramos, decimos que $\alpha_1$ es el límite por la izquierda de $f(x)$, cuando $x$ tiende a $x_0$. Lo anterior se denota mediante

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \alpha_1;$$

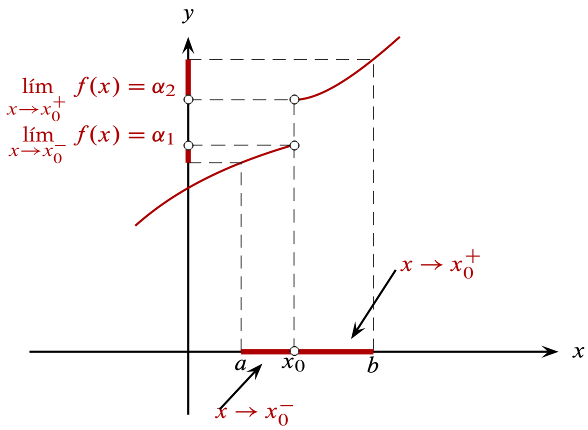
$x \to x_0^-$ se lee: $x$ tiende a $x_0$ por la izquierda.

- Supongamos que $f(x)$ está definida en un cierto intervalo $(x_0, b)$. Si para números $x$ del dominio de $f$ suficientemente próximos a $x_0$ y mayores que $x_0$, los valores correspondientes de $f(x)$ están tan próximos a $\alpha_2$ como queramos, decimos que $\alpha_2$ es el límite por la derecha de $f(x)$, cuando $x$ tiende a $x_0$. Lo anterior se denota

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \alpha_2;$$

$x \to x_0^+$ se lee: $x$ tiende a $x_0$ por la derecha.

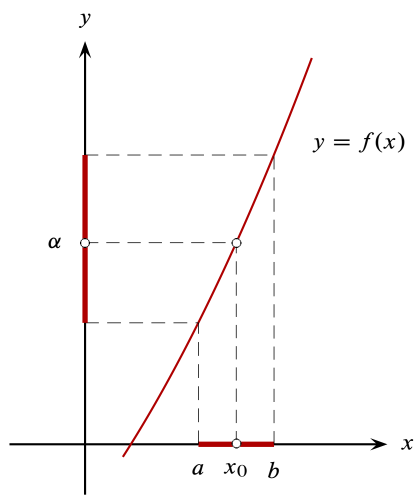
[1] canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008




A los límites $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ & $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ se les conoce como límites laterales.

Es claro que:

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \alpha = \lim_{x\to x_0^+} f(x).$




Este resultado se usa frecuentemente para probar la no existencia de un límite.

- Si no existe alguno de los límites laterales, el límite no existe.
- Si los límites laterales existen pero son diferentes, el límite no existe.

Observación: para los límites laterales $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ & $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ hallamos resultados análogos a los que hemos enlistado anteriormente para el límite $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

**Ejemplo 3.3.1** *Dada la función* $f(x) = \dfrac{|x-a|}{x-a}$, *calcular (en caso de existir) cada uno de los límites siguientes:*

1. $\lim_{x\to a^-} f(x)$.
2. $\lim_{x\to a^+} f(x)$.
3. $\lim_{x\to a} f(x)$.

▼ Por definición de valor absoluto:

$$|\,x-a\,| = \begin{cases} x-a & \text{si } x-a \geq 0 \\ -(x-a) & \text{si } x-a < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-a & \text{si } x \geq a; \\ -(x-a) & \text{si } x < a. \end{cases}$$

Por lo tanto

1. Si $x \to a^-$, entonces $x < a$ & $x - a < 0$, por lo que

$$|\,x-a\,| = -(x-a) \;\&\; \frac{|\,x-a\,|}{x-a} = \frac{-(x-a)}{(x-a)} = -1 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to a^-} \frac{|\,x-a\,|}{x-a} = \lim_{x\to a} -1 = -1.$$

2. Si $x \to a^+$, entonces $x > a$ & $x - a > 0$, por lo que

$$|\,x-a\,| = x-a \;\&\; \frac{|\,x-a\,|}{x-a} = \frac{(x-a)}{(x-a)} = 1 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to a^+} \frac{|\,x-a\,|}{x-a} = \lim_{x\to a} 1 = 1.$$

3. Ya que $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -1$ & $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = 1$ entonces $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ y por lo tanto $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no existe.

Observa que $f(x) = \dfrac{|\,x-a\,|}{x-a}$ se obtiene de la función $g(x) = \dfrac{|\,x\,|}{x}$ desplazándola $a$ unidades.

□

**Ejemplo 3.3.2** *Dada la función* $g(x) = \begin{cases} 3x+5 & \text{si } x < -1; \\ x^2+1 & \text{si } -1 < x < 2; \\ 6-x & \text{si } x > 2, \end{cases}$
*calcular (en caso de existir) cada uno de los límites siguientes:*

1. $\lim\limits_{x\to -1^-} g(x)$.
2. $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x)$.
3. $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$.
4. $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$.
5. $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$.
6. $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$.

▼

1. $\lim\limits_{x\to -1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (3x+5) = 3(-1)+5 = -3+5 = 2.$

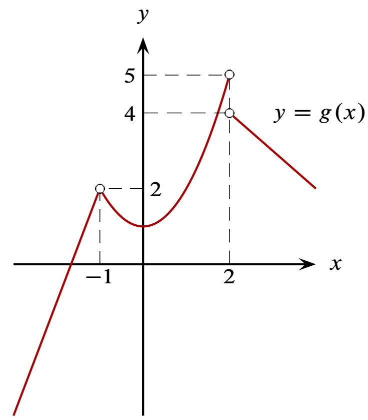
2. $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (x^2+1) = (-1)^2+1 = 1+1 = 2.$

3. Ya que $\lim\limits_{x\to -1^-} g(x) = 2 = \lim\limits_{x\to -1^+} g(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = 2.$

4. $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2+1) = 2^2+1 = 4+1 = 5.$

5. $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (6-x) = 6-2 = 4.$

6. Ya que $\lim_{x \to 2^-} g(x) = 5 \neq 4 = \lim_{x \to 2^+} g(x)$, entonces $\lim_{x \to 2} g(x)$ no existe.




□

**Ejemplo 3.3.3** *Dada la función* $h(x) = \begin{cases} ax + 5 & \textit{si } x < -1; \\ x^2 + 1 & \textit{si } -1 < x < 2; \\ mx + 6 & \textit{si } x > 2, \end{cases}$

*determinar los valores de las constantes* $a, m$ *que aseguran la existencia de los límites:* $\lim_{x \to -1} h(x)$ & $\lim_{x \to 2} h(x)$.

▼

1. $\lim_{x \to -1} h(x)$ existe si y sólo si

$$\lim_{x \to -1^-} h(x) = \lim_{x \to -1^+} h(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to -1} (ax + 5) = \lim_{x \to -1} (x^2 + 1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a(-1) + 5 = (-1)^2 + 1 \Leftrightarrow -a + 5 = 1 + 1 \Leftrightarrow -a = 2 - 5 = -3 \Leftrightarrow a = 3.$$

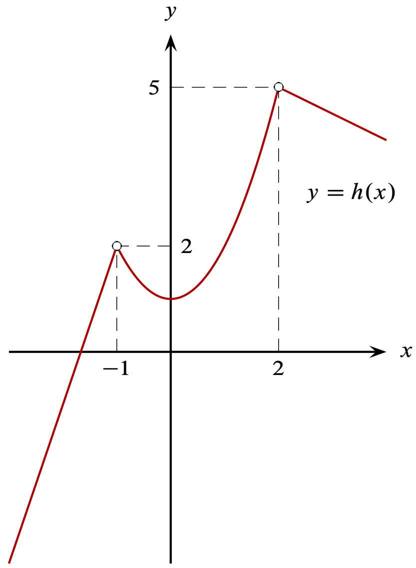
2. $\lim_{x \to 2} h(x)$ existe si y sólo si

$$\lim_{x \to 2^-} h(x) = \lim_{x \to 2^+} h(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to 2} (x^2 + 1) = \lim_{x \to 2} (mx + 6) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2^2 + 1 = m(2) + 6 \Leftrightarrow 5 = 2m + 6 \Leftrightarrow 2m = 5 - 6 = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

3. Resumiendo:

Con $a = 3$ y con $m = -\frac{1}{2}$ sucede que $\lim_{x \to -1} h(x) = 2$ & $\lim_{x \to 2} h(x) = 5$; $h(x)$ sería ahora

$$h(x) = \begin{cases} 3x + 5 & \text{si } x < -1; \\ x^2 + 1 & \text{si } -1 < x < 2; \\ -\frac{x}{2} + 6 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$




□

**Ejemplo 3.3.4** *Dada la función* $\phi(x) = \begin{cases} 3x+5 & \text{si } x < -1; \\ mx^2+n & \text{si } -1 < x < 2; \\ 6 - \dfrac{x}{2} & \text{si } x > 2, \end{cases}$

*determinar los valores de las constantes* $m, n$ *que aseguran la existencia de los límites:* $\lim\limits_{x \to -1} \phi(x)$ & $\lim\limits_{x \to 2} \phi(x)$.

▼

1. $\lim\limits_{x \to -1} \phi(x)$ existe si y sólo si

$$\lim_{x \to -1^-} \phi(x) = \lim_{x \to -1^+} \phi(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to -1}(3x+5) = \lim_{x \to -1}(mx^2+n) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3(-1)+5 = m(-1)^2+n \Leftrightarrow -3+5 = m(1)+n \Leftrightarrow m+n = 2.$$

2. $\lim\limits_{x \to 2} \phi(x)$ existe si y sólo si

$$\lim_{x \to 2^-} \phi(x) = \lim_{x \to 2^+} \phi(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to 2}(mx^2+n) = \lim_{x \to 2}\left(6 - \frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow m(2)^2+n = 6 - \frac{2}{2} \Leftrightarrow 4m+n = 5.$$

3. Debemos resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} m+n & = 2; \\ 4m+n & = 5. \end{cases}$

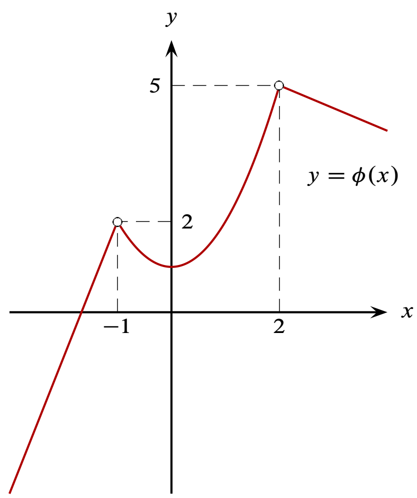
$$\begin{cases} 4m+n = 5; \\ \underline{-m-n = -2}. \end{cases}$$
$$3m = 3 \Rightarrow m = 1 \;\&\; m+n = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n = 2-m = 2-1 = 1.$$

4. Con $m = 1$ y con $n = 1$ se cumple que

$$\lim_{x \to -1} \phi(x) = 2 \qquad \& \qquad \lim_{x \to 2} \phi(x) = 5,$$

donde ahora

$$\phi(x) = \begin{cases} 3x + 5 & \text{si } x < -1; \\ x^2 + 1 & \text{si } -1 < x < 2; \\ 6 - \dfrac{x}{2} & \text{si } x > 2. \end{cases}$$




□

**Ejercicios 3.3.1** *Soluciones en la página 8*

1. Dada $f(x) = \dfrac{|\,x\,|}{x}$, calcular:

   a. $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} f(x)$; b. $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x)$; c. $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$.

2. Dada $f(x) = \dfrac{x - a}{|\,x - a\,|}$, calcular:

   a. $\displaystyle\lim_{x \to a^-} f(x)$; b. $\displaystyle\lim_{x \to a^+} f(x)$; c. $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x)$.

3. Dada $g(x) = |\,x - 2\,| - x + 2$, calcular:

   a. $\displaystyle\lim_{x \to 2^-} g(x)$; b. $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} g(x)$; c. $\displaystyle\lim_{x \to 2} g(x)$.

4. Dada $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1; \\ x^2 - 3 & \text{si } -1 < x < 2; \\ 2 - x & \text{si } x > 2. \end{cases}$

   Calcular:

a. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$;
b. $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$;
c. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$;
d. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$;
e. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$;
f. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

5. Dada $g(x) = \begin{cases} ax + 11 & \text{si } x < 3; \\ x^2 - 8x + 16 & \text{si } x > 3. \end{cases}$

   Determinar el valor de la constante $a$ que asegura la existencia de $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$.

6. La expresión $L = L_o\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$ indica la longitud de un objeto en función de su velocidad $v$, donde $L_o$ es la longitud del objeto en reposo y $c$ es la velocidad de la luz.

   ¿Qué pasa con la longitud del objeto cuando $v$ se aproxima a la velocidad de la luz?

7. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|\,x\,| - x}{x}$.

8. Calcular: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{|\,x - 1\,|}$.

9. Sea la función definida por

   $$f(x) = n, \text{ para cada } x \in [n, n+1), \text{ donde } n \in \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{Z}.$$

   a. Grafique esa función $f$.
   b. Calcular para $n \in \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{Z}$.

      $\lim\limits_{x\to n^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to n^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to n} f(x)$ & $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, donde $a \neq n$.

10. Considerar $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x \le 1; \\ x + 1 & \text{si } x > 1; \end{cases}$ y considerar $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1; \\ 2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$

    Calcular

    a. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)g(x)$;
    b. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)g(x)$;
    c. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)g(x)$.

11. Calcular: $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{3}}{x - 1}$.

12. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0} \left[|\,x\,|^3 \left(x + 1 - \dfrac{2}{x}\right)\right]$.

13. Calcular: $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + 1}{x^4 + 3} & \text{si } x < -1; \\ \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 6x + 5} & \text{si } x > -1. \end{cases}$

14. Calcular: $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2 - x}{|\,x - 2\,|}$.

15. Calcular: $\lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{|\,|\,2 + x\,| - 3\,| - 2}{x^2 - 9}$.

**Ejercicios 3.3.1** *Límites laterales, página 6*

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1;$

   $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1;$

   $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

2. $\displaystyle\lim_{x\to a^-} f(x) = -1;$

   $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) = 1;$

   $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ no existe.

3. $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} g(x) = 0;$

   $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} g(x) = 0;$

   $\displaystyle\lim_{x\to 2} g(x) = 0\,.$

4. $\displaystyle\lim_{x\to -1^-} f(x) = -2;$

   $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} f(x) = -2;$

   $\displaystyle\lim_{x\to -1} f(x) = -2;$

   $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1;$

   $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0;$

   $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe.

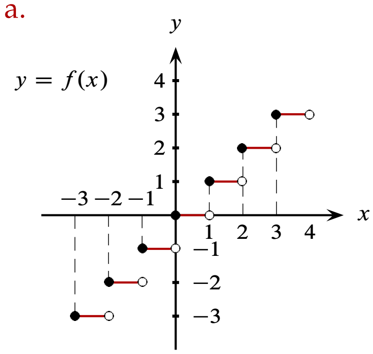
5. $a = -\dfrac{10}{3}\,.$

6. $\displaystyle\lim_{v\to c^-} L_o\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 0\,.$

7. No existe $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|\,x\,| - x}{x}\,.$

8. No existe $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{|\,x-1\,|}\,.$

9. 

   a. 


   b. $\displaystyle\lim_{x\to n^-} f(x) = n-1;$

   $\displaystyle\lim_{x\to n^+} f(x) = n;$

   no existe $\displaystyle\lim_{x\to n} f(x);$

   $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = n$ si $a \in [n, n+1)\,.$

10. $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} [f(x)g(x)] = 4;$

    $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} [f(x)g(x)] = 4;$

    $\displaystyle\lim_{x\to 1} [f(x)g(x)] = 4.$

11. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$

12. $\displaystyle\lim_{x\to 0} |\,x\,|^3\left(x+1-\frac{2}{x}\right) = 0\,.$

13. $\displaystyle\lim_{x\to -1} f(x) = \frac{3}{4}\,.$

14. $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{2-x}{|\,x-2\,|} = -1\,.$

15. $\displaystyle\lim_{x\to -3^-} \frac{|\,|\,2+x\,|-3\,|-2}{x^2-9} = -\frac{1}{6}\,.$