CAPÍTULO

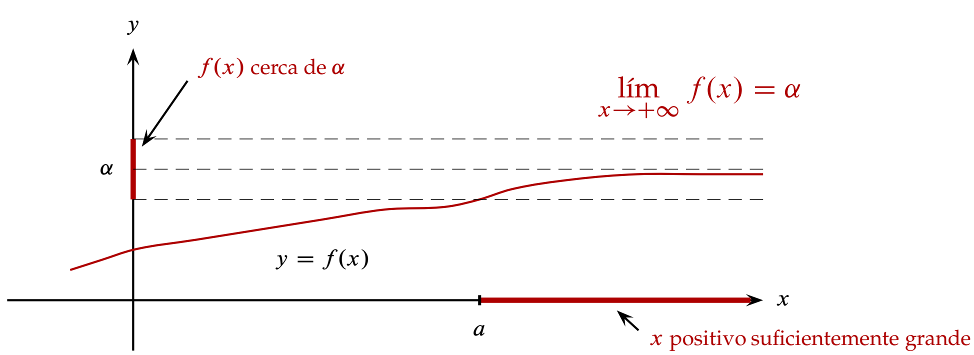
3

Límite de una función

[1]

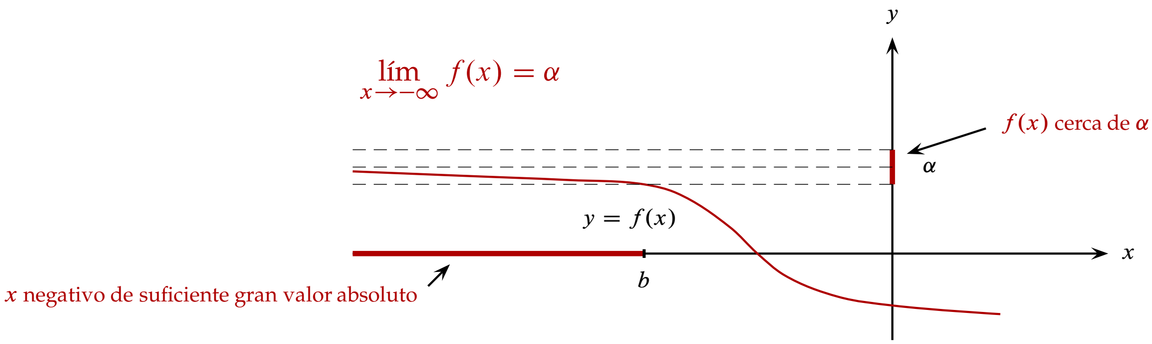
3.5 Límites en infinito

- Sea $f(x)$ una función. Supongamos que $(a, +\infty) \subset D_f$. Diremos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende (o diverge) a $+\infty$ es α [notación $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \alpha$) si los valores de $f(x)$ están tan próximos a α como queramos con tal de tomar $x > a$ suficientemente grande.



- Sea $f(x)$ una función. Supongamos que $(-\infty, b) \subset D_f$. Diremos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende (o diverge) a $-\infty$ es α (notación $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \alpha$) si los valores de $f(x)$ están tan próximos a α como queramos con tal de tomar $x < b$ negativo de suficiente gran valor absoluto.

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008



- En estos casos a la recta $y = \alpha$ se le llama asíntota horizontal. Esto es, se dice que la recta $y = \alpha$ es una asíntota horizontal de la función f o bien de la curva $y = f(x)$ si ocurre alguno de los hechos siguientes:
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha \quad \text{o bien} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha\,.$$

En este contexto tenemos los siguientes comportamientos:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ con $n \in \mathbb{N}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ si n es par.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ si n es impar.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{c}{x^{\frac{m}{n}}} = 0$ con $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$ y c constante.

  En particular
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{c}{x^n} = 0.$

  Esto lo sintetizan algunos autores poniendo “$\left(\dfrac{c}{\pm\infty}\right)$” $= 0$.
- Si $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = x^n\left(a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \cdots + \dfrac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \dfrac{a_n}{x^n}\right)$, entonces:

  1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si $a_0 > 0$.
  2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ si $a_0 < 0$.
  3. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ si $a_0 > 0$ y n es par.
  4. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si $a_0 > 0$ y n es impar.
  5. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si $a_0 < 0$ y n es par.
  6. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ si $a_0 < 0$ y n es impar.

Obsérvese, por ejemplo, que una función polinomial no tiene asíntotas y que, si n es impar, $R_f = \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.5.1 *Dada la función polinomial $f(x) = -4x^3+5x^2-6x+7$, calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ & $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.*

▼ Ya que $f(x) = -4x^3 + 5x^2 - 6x + 7 = x^3\left(-4 + \dfrac{5}{x} - \dfrac{6}{x^2} + \dfrac{7}{x^3}\right)$, entonces:

1. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[x^3\left(-4 + \frac{5}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right)\right] = +\infty;$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x^3\left(-4 + \frac{5}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right)\right] = -\infty.$

□

Ejemplo 3.5.2 *Dada la función* $p(x) = x^6 - 2x^4 + 3x^2 - 4x - 5$, *calcular* $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} p(x)$ & $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} p(x)$.

▼ Ya que $p(x) = x^6 - 2x^4 + 3x^2 - 4x - 5 = x^6\left(1 - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^4} - \dfrac{4}{x^5} - \dfrac{5}{x^6}\right)$, entonces

1. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} p(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[x^6\left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{4}{x^5} - \frac{5}{x^6}\right)\right] = +\infty.$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} p(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x^6\left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{4}{x^5} - \frac{5}{x^6}\right)\right] = +\infty.$

□

Ejemplo 3.5.3 *Dada* $q(x) = -x^{10} + x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1$, *calcular* $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} q(x)$ & $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} q(x)$.

▼

1. $$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} q(x) &= \lim_{x\to-\infty}(-x^{10} + x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1) = \\ &= \lim_{x\to-\infty}\left[x^{10}\left(-1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} + \frac{1}{x^{10}}\right)\right] = -\infty\,.\end{aligned}$$

2. $$\lim_{x\to+\infty} q(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x^{10}\left(-1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} + \frac{1}{x^{10}}\right)\right] = -\infty\,.$$

□

- Si $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional con

  $P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m$ y $Q(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n$ polinomiales ($a_0 \neq 0$ & $b_0 \neq 0$), entonces:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } m < n\,; \\ \dfrac{a_0}{b_0} & \text{si } m = n\,; \\ \pm\infty & \text{si } m > n\,. \end{cases}$$

Este resultado es claro si ponemos

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^m\left(a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \ldots + \dfrac{a_m}{x^m}\right)}{x^n\left(b_0 + \dfrac{b_1}{x} + \ldots + \dfrac{b_n}{x^n}\right)} = \frac{x^{m-n}\left(a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \ldots + \dfrac{a_m}{x^m}\right)}{b_0 + \dfrac{b_1}{x} + \ldots + \dfrac{b_n}{x^n}}.$$

Una función racional tiene asíntotas horizontales $y = 0$ si $m \le n$; $y = \dfrac{a_0}{b_0}$ si $m = n$; y además puede o no tener asíntotas verticales.

Ejemplo 3.5.4 *Dada* $f(x) = \dfrac{4x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 3x + 4}$, *calcular* $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ & $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

▼

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 3x + 4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(4 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(2 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{6}{x^2}}{2 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x^2}} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(4 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{6}{x^2}\right)}{\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(2 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x^2}\right)} =$$

$$= \frac{4 - 0 + 0}{2 - 0 + 0} = 2\,.$$

De igual manera se obtiene que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

Por lo tanto, la recta $y = 2$ es una (y además la única) asíntota horizontal de la función f o bien de la curva $y = f(x)$.

□

Ejemplo 3.5.5 *Calcular* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x - 4}{5x^2 - 6x + 7}$.

▼

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x - 4}{5x^2 - 6x + 7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3 - \dfrac{4}{x}\right)}{x^2\left(5 - \dfrac{6}{x} + \dfrac{7}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3 - \dfrac{4}{x}}{x\left(5 - \dfrac{6}{x} + \dfrac{7}{x^2}\right)} = \text{“}\left(\frac{3}{+\infty}\right)\text{''} = 0^+\,.$$

Aquí la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de la curva $y = \dfrac{3x - 4}{5x^2 - 6x + 7}$. Además también es la única pues de la misma manera

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x - 4}{5x^2 - 6x + 7} = \text{“}\left(\frac{3}{-\infty}\right)\text{''} = 0^-\,.$$

□

Ejemplo 3.5.6 *Calcular* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3-3x+4}{5x-6}$.

▼

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3-3x+4}{5x-6} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\left(2-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}\right)}{x\left(5-\dfrac{6}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(2-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}\right)}{5-\dfrac{6}{x}} =$$
$$= \text{“}\left(\frac{+\infty}{5}\right)\text{”} = +\infty\,.$$

La función no tiene asíntotas horizontales pues de la misma manera se obtiene que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-3x+4}{5x-6} = \text{“}\left(\frac{+\infty}{5}\right)\text{”} = +\infty\,.$$

□

Ejemplo 3.5.7 *Calcular* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(3x-2)^2(2x+5)^4}{6x^6-7x^3+8}$.

▼

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(3x-2)^2(2x+5)^4}{6x^6-7x^3+8} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[x\left(3-\dfrac{2}{x}\right)\right]^2\left[x\left(2+\dfrac{5}{x}\right)\right]^4}{x^6\left(6-\dfrac{7}{x^3}+\dfrac{8}{x^6}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(3-\dfrac{2}{x}\right)^2 x^4\left(2+\dfrac{5}{x}\right)^4}{x^6\left(6-\dfrac{7}{x^3}+\dfrac{8}{x^6}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^6\left(3-\dfrac{2}{x}\right)^2\left(2+\dfrac{5}{x}\right)^4}{x^6\left(6-\dfrac{7}{x^3}+\dfrac{8}{x^6}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(3-\dfrac{2}{x}\right)^2\left(2+\dfrac{5}{x}\right)^4}{6-\dfrac{7}{x^3}+\dfrac{8}{x^6}} =$$
$$= \frac{(3)^2(2)^4}{6} = 3(2)^3 = 24\,.$$

La recta $y = 24$ es asíntota horizontal de la función $f(x) = \dfrac{(3x-2)^2(2x+5)^4}{6x^6-7x^3+8}$ y es la única pues análogamente $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 24$.

□

Ejemplo 3.5.8 *Calcular*

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x-5}{\sqrt{x^2+1}}$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x-5}{\sqrt{x^2+1}}$.

▼

1.
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-5}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4-\dfrac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4-\dfrac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4-\dfrac{5}{x}\right)}{|\,x\,|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4-\dfrac{5}{x}\right)}{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{4-\dfrac{5}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = \frac{4}{1} = 4\,.$$

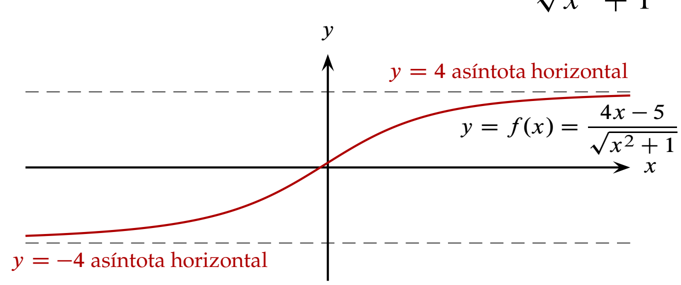
Nótese que, como $x\to+\infty$, podemos suponer que $x>0$ por lo que $|\,x\,| = x$.

La recta $y=4$ es una asíntota horizontal de la curva $y=\dfrac{4x-5}{\sqrt{x^2+1}}$.

2.
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-5}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(4-\dfrac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(4-\dfrac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} =$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(4-\dfrac{5}{x}\right)}{|\,x\,|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(4-\dfrac{5}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} =$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{4-\dfrac{5}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = \frac{4}{-1} = -4\,.$$

Ahora consideramos que $x<0$ pues $x\to-\infty$ por lo que $|\,x\,| = -x$.

La recta $y=-4$ es la otra asíntota horizontal de la curva $y=\dfrac{4x-5}{\sqrt{x^2+1}}$.

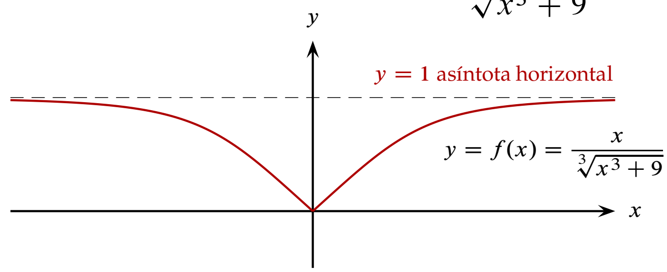


$\square$

Ejemplo 3.5.9 *Calcular* $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+9}}$.

▼
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+9}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3\left(1+\dfrac{9}{x^3}\right)}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{1+\dfrac{9}{x^3}}} =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x\sqrt[3]{1+\dfrac{9}{x^3}}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+\dfrac{9}{x^3}}} = \frac{1}{1} = 1\,.$$

La recta $y = 1$ es la asíntota horizontal de la función $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3+9}}$.



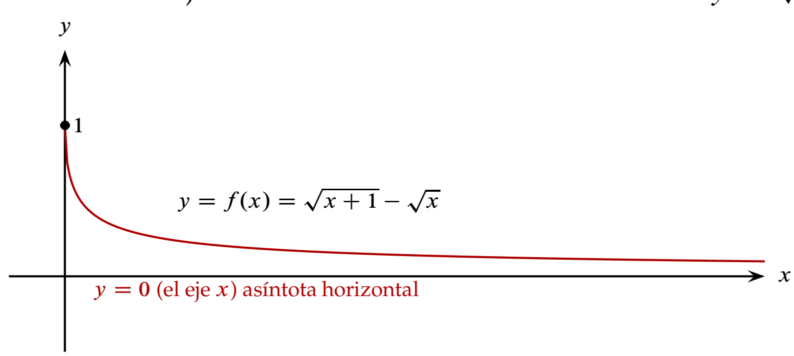
$\square$

Ejemplo 3.5.10 *Calcular* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$.

▼ Éste es un límite indeterminado "$(\infty - \infty)$". Hagamos un truco: racionalicemos el numerador de $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{1}$. Generamos primero una diferencia de cuadrados y hacemos luego lo que hemos venido haciendo:

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty} \left[(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right] =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \text{“}\left(\frac{1}{+\infty}\right)\text{”} = 0^+\,.$$

La recta $y = 0$ (el eje de las abscisas) es la asíntota horizontal de la curva $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.



□

Ejemplo 3.5.11 *Calcular* $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-3x+5}-x)$.

▼ Otro "$(\infty-\infty)$". Procedemos como el ejemplo anterior y algo más

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-3x+5}-x) = \lim_{x\to+\infty}\left[(\sqrt{x^2-3x+5}-x)\frac{\sqrt{x^2-3x+5}+x}{\sqrt{x^2-3x+5}+x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-3x+5})^2-x^2}{\sqrt{x^2-3x+5}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+5-x^2}{\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+5}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-3+\dfrac{5}{x}\right)}{|\,x\,|\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}+x} =$$

(como $x\to+\infty$, $x>0$, entonces $|\,x\,|=x$)

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-3+\dfrac{5}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-3+\dfrac{5}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}+1} = \frac{-3}{\sqrt{1}+1} = -\frac{3}{2}\,.$$

Por lo que la recta $y=-\dfrac{3}{2}$ es una asíntota horizontal de la curva $y=\sqrt{x^2-3x+5}-x$.
La otra asíntota es $y=\dfrac{3}{2}$ pues de la misma manera

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-3x+5}-x) = \frac{3}{2}$$

ya que

$$\sqrt{x^2-3x+5}-x = \frac{x\left(-3+\dfrac{5}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}+1\right)}\,.$$

□

Ejercicios 3.5.1 *Soluciones en la página* **??**

Calcular los límites siguientes:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-3}{4x}$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^3-5x+6}{2x^3-3x^2+8}$.
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^3+6x-7}{3x^5-2x+1}$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^5-2x+1}{5x^3+6x-7}$.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
7. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-16}}{x+4}$.
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x-3}{\sqrt{3x^2+2x+6}}$.
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3}{\sqrt{(3x-2)^3}}$.
10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^4-3x^2-1}}{x^2-1}$.
11. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x+2}{\sqrt{3x^2+2x+5}}$.
12. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x+1}{\sqrt{9x^2+5}}$
13. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{8x+6}{\sqrt{5x^2+6x-8}}$
14. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x+4}{\sqrt{2x^2+5}}$
15. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{9+4x^2}}{3+2x}$
16. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+5}+5x}{23x+4}$
17. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{9+4x^2}}{3+x}$
18. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x}{\sqrt{x^2+4}}$
19. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3-1}}{\sqrt{x^2+1}}$.
20. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^3-1}}$.
21. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+5\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}}$
22. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$
23. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+5}-x)$.
24. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-4x+3}-x)$.
25. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+5}-x)$.
26. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2-4x+3}-x)$.
27. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2-4x+3}+x)$.
28. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+5x}-x)$
29. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{4x^2+x}-\sqrt{4x^2-2})$
30. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt[3]{x^3+2x^2}-x)$
31. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x}-x)$
32. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+6}+x\right)$
33. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^3+x}-\sqrt{x^3+1})$
34. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-2x+5}-x)$
35. $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x-\sqrt{4x^2+5x-3})$

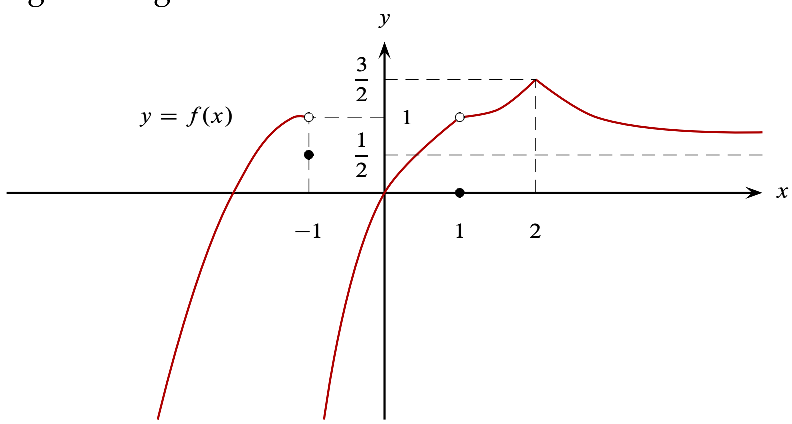
Ejercicios 3.5.2 *Soluciones en la página* **??**

Miscelánea de problemas sobre límites.

Un límite muy especial para una función f es $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Calcular este límite para:

1. $f(x) = c$ con c constante.
2. $f(x) = ax + b$ con a, b constantes.
3. $f(x) = ax^2 + bx + c$ con a, b, c constantes.
4. $f(x) = ax^3$ con a constante.
5. $f(x) = \dfrac{c}{ax+b}$ con a, b, c constantes.
6. $f(x) = \sqrt{x}$.

7. La función f tiene la gráfica siguiente



a. Determine:

i. $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$;

ii. $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$;

iii. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$;

iv. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$;

v. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$;

vi. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$;

vii. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$;

viii. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b. Calcule $f(1)$, $f(2)$ y también $f(-1)$.

c. ¿Existen los límites $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$?

8. Considere la función: $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x} - x} & \text{si } x \leq -1\,; \\[2ex] \dfrac{\sqrt{x+5} - 2}{x+1} & \text{si } x > -1\,. \end{cases}$

a. Calcule el $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$.

b. ¿Existe $\lim\limits_{x \to -1} h(x)$? Justifique su respuesta.

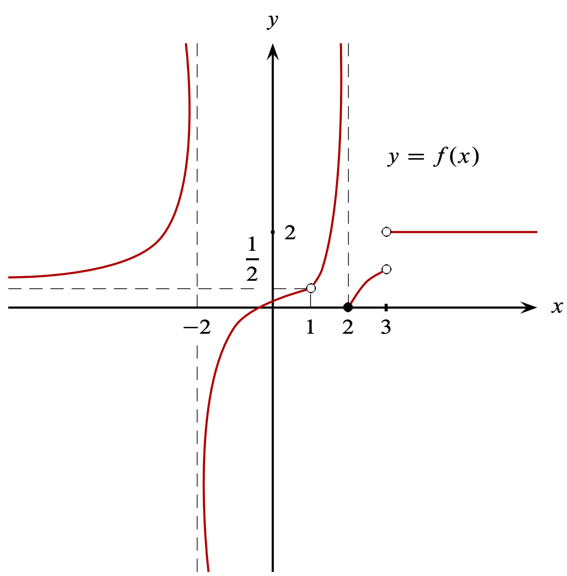
9. Grafique una función que cumpla con los siguientes requisitos:

a. $f(0) = 0$;
b. $f(5) = 1$;
c. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3$;
d. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$;
e. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$;
f. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -3$;
g. $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 4$.

10. Trace la gráfica de una función f que satisfaga las siguientes condiciones:

a. $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = 0$;
b. $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$;
c. $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 0$;
d. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -3$;
e. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$;
f. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$;
g. $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 4$;
h. $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 1$;
i. $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 0$;
j. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$;
k. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$.

11. La función f tiene la gráfica siguiente:



a. De la gráfica determine:

i. $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$;
ii. $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$;
iii. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$;
iv. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$;
v. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$;
vi. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$;
vii. $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$;
viii. $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$;
ix. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$;
x. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

b. Calcule $f(-2)$, $f(1)$ y $f(2)$.

c. ¿Existen o no los siguientes límites?: $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

12. Considere la función $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-3x} & \text{si } x \leq -8\,; \\ \dfrac{(x+3)\,|\,x+2\,|}{x+2} & \text{si } -8 < x < -2\,; \\ \sqrt{9-x^2} & \text{si } x \geq -2\,. \end{cases}$

    a. Calcule $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$.

    b. ¿Existe el $\lim\limits_{x\to -2} g(x)$? Justifique su respuesta.

13. De la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{5x^2+3x+1}}{\sqrt{2x^2-3}} & \text{si } x \leq -4\,; \\ \dfrac{16-x^2}{5-\sqrt{x^2+9}} & \text{si } -4 < x < 1\,. \end{cases}$

    determinar los límites laterales en -4 y el límite en $-\infty$.

14. Para la función f definida por $f(x) = \dfrac{4x^2}{\sqrt{x^2-4}}$, determine:

    a. Dominio y raíces.

    b. Asíntotas verticales y horizontales.

    c. Bosquejo gráfico.

15. Dar un bosquejo de la gráfica de una función f que cumpla los requisitos siguientes:
    Es continua en los intervalos $(-\infty,-2)$, $[-2,1)$, $[1,3]$ y en $(3,+\infty)$; y además:

    a. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -3$;

    b. $\lim\limits_{x\to -4} f(x) = 0$;

    c. $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = +\infty$;

    d. $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 0$;

    e. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -3$;

    f. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$;

    g. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$;

    h. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 4$;

    i. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -1$;

    j. $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 0$;

    k. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$.

16. Dibuje una gráfica de una función f que satisfaga todas las condiciones siguientes:

    a. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -2$;

    b. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$;

    c. $f(0) = -1$;

    d. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \infty$;

    e. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$;

    f. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 3$;

    g. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 4$.

17. Bosquejar la gráfica de una función f que cumpla las condiciones siguientes:

   a. $f(-1) = 0$;
   b. $f(\frac{3}{2}) = -3$;
   c. $f(0) = \frac{1}{2}$;
   d. $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -1$;
   e. $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$;
   f. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -2$;
   g. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -1$;
   h. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 1$;
   i. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$;
   j. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.

18. Bosqueje la gráfica de una función que cumpla las siguiente condiciones:

   a. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 3$;
   b. $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = 5$;
   c. $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = 4$;
   d. $f(0) = 0$;
   e. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$;
   f. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$;
   g. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$;
   h. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -1$.

19. Considere las funciones $f(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$ & $g(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-x-2}$ con sus dominios naturales.

   a. Grafique las funciones f & g.
   b. Calcule $\lim\limits_{x\to 1^+} (g \circ f)(x)$.
   c. Calcule $\lim\limits_{x\to +\infty} (f \circ g)(x)$.

Ejercicios 3.5.1 *Límites en infinito, página* **??**

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x-3}{4x}\right)=\dfrac{1}{2}$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^3-5x+6}{2x^3-3x^2+8}=2$.
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^3+6x-7}{3x^5-2x+1}=0^+$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^5-2x+1}{5x^3+6x-7}=+\infty$.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=1$.
6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=-1$.
7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{x+4}=-1$.
8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x-3}{\sqrt{3x^2+2x+6}}=\dfrac{5}{\sqrt{3}}$.
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{\sqrt{(3x-2)^3}}=0$.
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-3x^2-1}}{x^2-1}=1$.
11. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x+2}{\sqrt{3x^2+2x+5}}=-\dfrac{5}{\sqrt{3}}$.
12. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x+1}{\sqrt{9x^2+5}}=-\dfrac{4}{3}$.
13. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8x+6}{\sqrt{5x^2+6x-8}}=-\dfrac{8}{\sqrt{5}}$.
14. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+4}{\sqrt{2x^2+5}}=-\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.
15. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\sqrt{9+4x^2}}{3+2x}\right)=-1$.
16. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5}+5x}{23x+4}=\dfrac{6}{23}$.
17. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{9+4x^2}}{3+x}=-2$.
18. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x}{\sqrt{x^2+4}}=-5$.
19. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3-1}}{\sqrt{x^2+1}}=1$.
20. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^3-1}}=-1$.
21. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+5\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}}=\dfrac{6}{\sqrt{2}}$.
22. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)=\dfrac{1}{4}$.
23. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+5}-x)=0^+$.
24. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-4x+3}-x)=-2$.
25. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+5}-x)=+\infty$.
26. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-4x+3}-x)=+\infty$.
27. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-4x+3}+x)=2$.
28. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+5x}-x)=+\infty$.
29. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+x}-\sqrt{4x^2-2})=\dfrac{1}{4}$.
30. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{x^3+2x^2}-x)=\dfrac{2}{3}$.
31. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\dfrac{1}{2}$.
32. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+6}+x\right)=-1$.
33. No tiene sentido.
34. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2x+5}-x)=-1$.
35. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-\sqrt{4x^2+5x-3})=-\dfrac{5}{4}$.

Ejercicios 3.5.2 *página* **??**

1. 0.

2. a.

3. $2ax + b$.

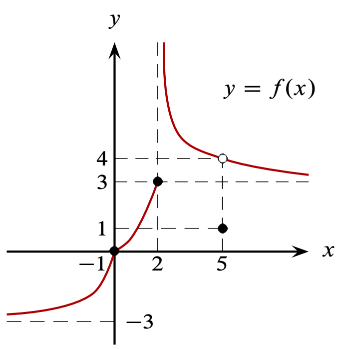
4. $3ax^2$.

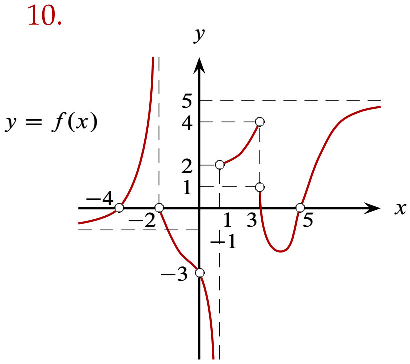
5. $\dfrac{-ac}{(ax+b)^2}$.

6. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, si $x > 0$.

7. a. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$;
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$;
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \dfrac{3}{2}$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \dfrac{3}{2}$;
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$;
b. $f(1) = 0$, $f(2) = \dfrac{3}{2}$, $f(-1) = \dfrac{1}{2}$;
c. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ no existe;
$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$;
$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \dfrac{3}{2}$.

8. a. $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x) = -\dfrac{1}{2}$;
b. No existe $\lim\limits_{x\to -1} h(x)$.

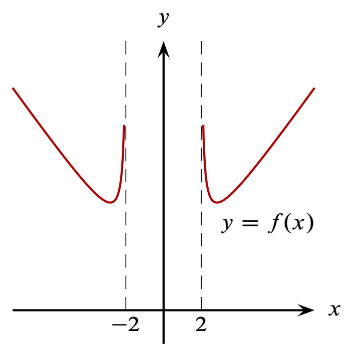
9.


10.


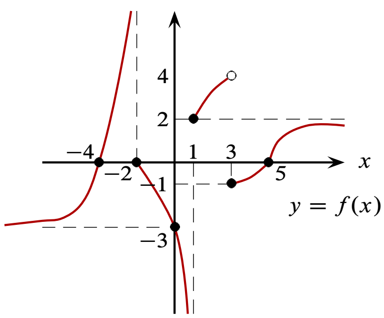
11. a. $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$;
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 0$;
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \dfrac{1}{2}$;
$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2$;
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 2$;
b. $f(-2)$ no existe;
$f(1)$ no existe;
$f(2) = 0$;
c. $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ no existe;
$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$;
$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no existe;
$\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ no existe.

12. $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = -\dfrac{3}{2}$;
$\lim\limits_{x\to -2^-} g(x) \neq \lim\limits_{x\to -2^+} g(x)$;
$\lim\limits_{x\to -2} g(x)$ no existe.

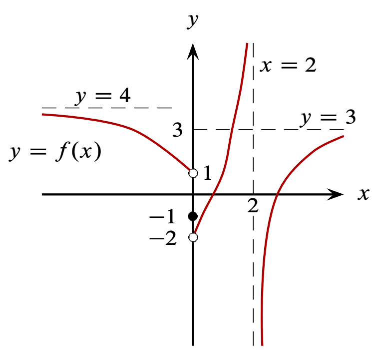
13. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) \approx 1.581$;
$\lim\limits_{x\to -4^-} f(x) \approx 1.5425$;
$\lim\limits_{x\to -4^+} f(x) = 10$.

14. a. $D_f = (-\infty, -2) \bigcup (2, +\infty)$;
no tiene raíces;
b. $x = 2$ & $x = -2$ son asíntotas verticales;
no tiene asíntotas horizontales.
c.


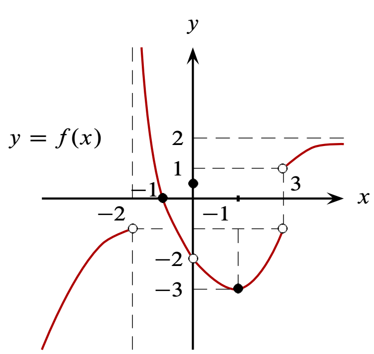
15.



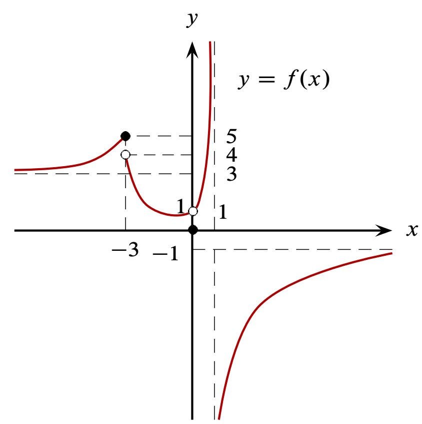
16.



17.

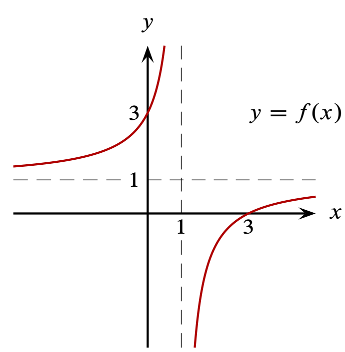


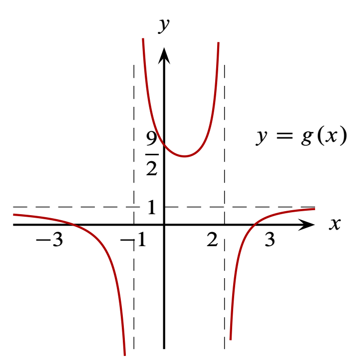
18.



19.

a.





b. $\lim_{x \to 1^+} (g \circ f)(x) = 1;$

c. $\lim_{x \to +\infty} (f \circ g)(x) = +\infty\,.$