CAPÍTULO

6

Reglas de derivación

[1]

6.5 Derivadas de orden superior

De una función f se deriva otra función: la función derivada $f\,'$, cuyo dominio es el subconjunto del dominio de la función f donde la función f es derivable y a sus puntos $f\,'$ les hace corresponder precisamente el valor de la derivada de f en dichos puntos, es decir,

$$f\,'(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

o bien

$$f\,'(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\,.$$

$$f\,' : D_{f\,'} \to \mathbb{R}\,,\ \text{donde } D_{f\,'} = \left\{ x_0 \in D_f \;\middle|\; \text{existe } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right\} = \\ = \left\{ x_0 \in D_f \;\middle|\; \text{existe } \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right\}\,.$$

$$x_0 \longmapsto f\,'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\,.$$

Derivar f o encontrar la derivada de f significa hallar $f\,'$.

- A su vez esta función derivada $f\,'$ puede ser también derivable y su derivada es la segunda derivada de f.

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

$$f''(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \text{ o bien } f''(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}.$$

- En general la n-ésima derivada de una función f es la derivada de la $(n-1)$-ésima derivada de la función f', esto es
$$f^{(n)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} [f^{(n-1)}(x)]'.$$
Nótese que ponemos el orden de derivación entre paréntesis, para no confundirlo con un exponente.
Hay funciones que poseen derivadas de todos los órdenes en todo su dominio, como las polinomiales y las funciones racionales.
- Denominamos <u>derivada de orden superior</u> a cualquier n-ésima derivada de la función f cuando $n > 1$.

Ejemplo 6.5.1 *La derivada de una función polinomial es otra función polinomial de grado una unidad menor que el grado de la polinomial original.*

▼ En efecto:

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \Rightarrow \\
\Rightarrow f'(x) &= n\,a_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + 2a_{n-2}x + a_{n-1} \Rightarrow \\
\Rightarrow f''(x) &= n(n-1)a_0x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_1x^{n-3} + \cdots + 3\cdot 2a_{n-3}x + 2a_{n-2} \Rightarrow \\
\Rightarrow f'''(x) &= n(n-1)(n-2)a_0x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)a_1x^{n-4} + \cdots + 3\cdot 2a_{n-3} \Rightarrow \\
&\vdots \\
\Rightarrow f^{(n)}(x) &= n!a_0\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la enésima derivada de una función polinomial es la constante $n(n-1)(n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$ multiplicada por el coeficiente principal a_0, que es el coeficiente del término de mayor grado.
Las sucesivas derivadas son todas iguales a 0:

$$f^{(k)}(x) = 0 \text{ si } k > n\,.$$

□

Ejemplo 6.5.2 *La derivada de una función racional es otra función racional con el mismo dominio que la original.*

▼ Efectivamente, si $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde P y Q son funciones polinomiales, entonces

$$f'(x) = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{[Q(x)]^2};$$

además todas las expresiones que aparecen en la expresión anterior:

$P'(x)$, $Q'(x)$, $P'(x)Q(x)$, $P(x)Q'(x)$, $P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)$ así como $[Q(x)]^2$ son funciones polinomiales.

□

Ejercicios 6.5.1 *Soluciones en la página* **??**

Calcular la segunda derivada de cada una de las siguientes funciones.

1. $f(x) = 2x^6 - 15x^4 - 1$.
2. $g(x) = (3x^2 - 1)^5$.
3. $y = \dfrac{2u + 1}{3u - 2}$.
4. $w = \dfrac{t^2}{t^2 - 4}$.
5. $u = \dfrac{3y}{y^2 + 1}$.
6. $y = x^2 + \dfrac{8}{x}$.
7. $z = (3 - t^2)^{3/2}$.
8. $w = \left(\dfrac{u}{u + 1}\right)^{-4}$.
9. $x = \dfrac{1}{y^2 - y + 1}$.
10. $y = x\sqrt{1 - x^2}$.

Determinar la n-ésima derivada de cada una de las siguientes funciones, para el número n dado.

11. $n = 4$ & $f(x) = \dfrac{1}{2x + 1}$.
12. $n = 5$ & $g(t) = t^3 + \dfrac{2}{t}$.
13. $n = 4$ & $w = \dfrac{au - b}{au + b}$ (con a, b constantes) .
14. $n = 3$ & $x = (y^2 + 1)^5$.
15. $n = 3$ & $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$.

Ejercicios 6.5.1 *Derivadas de orden superior, página* **??**

1. $f''(x) = 60x^2(x^2-3)$.
2. $g''(x) = 30(3x^2-1)^3(27x^2-2)$.
3. $\dfrac{d^2y}{du^2} = \dfrac{42}{(3u-2)^3}$.
4. $\dfrac{d^2w}{dt^2} = \dfrac{8(3t^2+4)}{(t^2-4)^3}$.
5. $\dfrac{d^2u}{dy^2} = \dfrac{6y(y^2-3)}{(y^2+1)^3}$.
6. $y'' = 2 + \dfrac{16}{x^3}$.
7. $\dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{3(2t^2-3)}{\sqrt{3-t^2}}$.
8. $\dfrac{d^2w}{du^2} = \dfrac{4}{u^6}(u+1)^2(2u+5)$.
9. $\dfrac{d^2x}{dy^2} = \dfrac{6y(y-1)}{(y^2-y+1)^3}$.
10. $y'' = \dfrac{x(2x^2-3)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.
11. $f^{(4)}(x) = 12\left(\dfrac{2}{2x+1}\right)^5$.
12. $g^{(5)}(t) = -\dfrac{240}{t^6}$.
13. $\dfrac{d^4w}{du^4} = \dfrac{-3(2)^4a^4b}{(au+b)^5}$.
14. $\dfrac{d^3x}{dy^3} = 240y(y^2+1)^2(3y^2+1)$.
15. $y^{(3)} = -\dfrac{24x(x^2+1)}{(1-x^2)^4}$.