CAPÍTULO

6

Reglas de derivación

[1]

6.3 Derivadas laterales

Nuevamente, como la derivada de una función f en un punto x_0 es un límite, podemos extender el concepto y definir:

- Derivada lateral por la derecha, si tomamos el límite por la derecha del cociente diferencial.

$$f'(x_0^+) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

  o bien

$$f'(x_0^+) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- Derivada lateral por la izquierda, si tomamos el límite por la izquierda del cociente diferencial.

$$f'(x_0^-) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

  o bien

$$f'(x_0^-) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Y así también aplicarle a la derivada todas las propiedades obtenidas para un límite, por ejemplo:

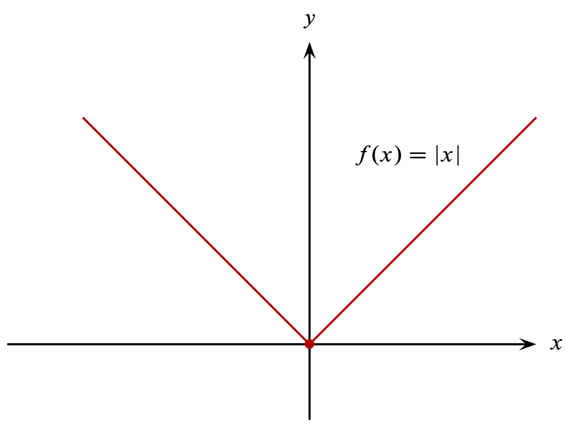
[1] canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

- Una función f es derivable en $x_0 \Leftrightarrow f$ es derivable en x_0 por la derecha y por la izquierda, y ambas derivadas laterales son iguales.

Este resultado se aplica para probar la no derivabilidad de una función en un punto si la función no tiene alguna derivada lateral o bien teniéndolas ambas son distintas.

Ejemplo 6.3.1 *Calcular las derivadas laterales $f'(0^-)$ y $f'(0^+)$ para $f(x) = |\,x\,|$, y decidir su derivabilidad en dicho punto.*

▼



Calculemos las dos derivadas laterales en 0:

Por la derecha

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|\,x\,|-|\,0\,|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1\,.$$

Por la izquierda

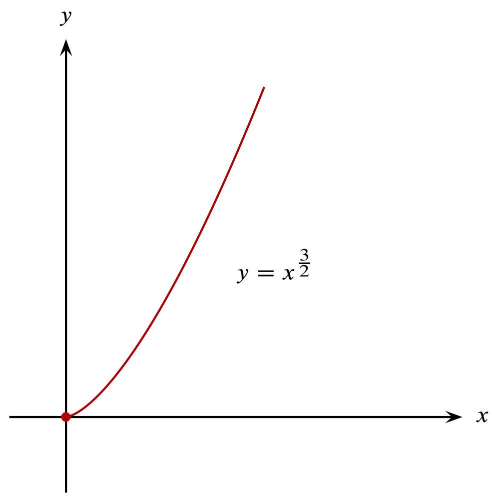
$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|\,x\,|-|\,0\,|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x-0}{x} = \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1\,. \end{aligned}$$

Como $f'(0^+) \neq f'(0^-)$, no existe $f'(0)$, por lo que $f(x) = |\,x\,|$ no es derivable en 0.
Obsérvese que en 0 la gráfica de $f(x) = |\,x\,|$ tiene un pico y la gráfica de una función derivable en un punto no debe tener un pico en dicho punto. Por lo tanto no existe la recta tangente en este punto.

□

Ejemplo 6.3.2 *Determinar cuáles de las derivadas laterales $f'(0^-)$ y $f'(0^+)$ existen para $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, y decidir su derivabilidad en dicho punto.*

▼



El dominio de $f(x)$ es $\mathbb{R}^+ \bigcup \{0\}$, por lo que no es derivable en 0; de hecho en el dominio de $f(x)$ no existe un intervalo abierto que contenga a 0. Sí existen en cambio dentro de dicho dominio intervalos de la forma $[0, b)$ con $b > 0$, entonces sólo tiene sentido calcular la derivada en 0 por la derecha:

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x} = \lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{2}} = 0\,.$$

□

Ejercicios 6.3.1 *Soluciones en la página 4*

Determinar cuáles de las derivadas laterales $[f'(x_0^-)$ y/o $f'(x_0^+)]$ existen y decidir la derivabilidad de la función f dada en el punto x_0 mencionado.

1. $x_0 = 0$ & $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0\,; \\ -x^2 & \text{si } x > 0\,. \end{cases}$

2. $x_0 = -1$ & $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -1\,; \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1\,. \end{cases}$

3. $x_0 = \dfrac{3}{2}$ & $f(x) = (2x - 3)^{3/2} + 1\,.$

4. $x_0 = 1$ & $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{si } x < 1\,; \\ -x^2 + 5x - 4 & \text{si } x \geq 1\,. \end{cases}$

5. $x_0 = 3$ & $f(x) = \begin{cases} (x - 2)^2 & \text{si } x \leq 3\,; \\ \sqrt{2x - 5} & \text{si } x > 3\,. \end{cases}$

Ejercicios 6.3.1 *Derivadas laterales, página 3*

1. $f'(0^-) = 0$;
   $f'(0^+) = 0$;
   f es derivable en 0 y en $f'(0) = 0$.
2. $f'(-1^-) = -2$;
   $f'(-1^+) = 2$;
   $f(-1)$ no existe; f no es derivable en $x = -1$.
3. $f'\left(\dfrac{3}{2}^-\right)$ no existe;
   $f'\left(\dfrac{3}{2}^+\right) = 0$;
   $f'\left(\dfrac{3}{2}\right)$ no existe; f no es derivable en $x_0 = \dfrac{3}{2}$.
4. $f'(1^-) = 3$;
   $f'(1^+) = 3$;
   f es derivable en $x_0 = 1$ y en $f'(1) = 3$.
5. $f'(3^-) = 2$;
   $f'(3^+) = 1$;
   f no es derivable en $x_0 = 3$.