CAPÍTULO

# 6

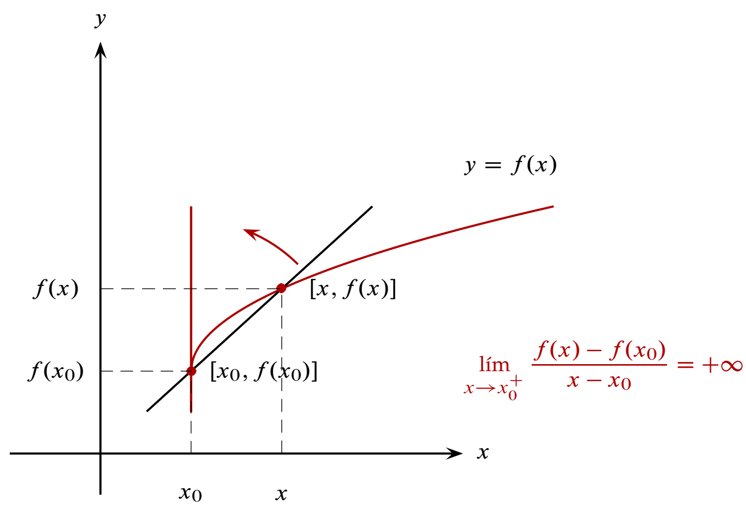
# Reglas de derivación

[1]

## 6.4 Derivadas infinitas

Puede ocurrir que una función $f$ no tenga derivada en un punto $x_0$, pero que se cumpla alguno de los siguientes casos:

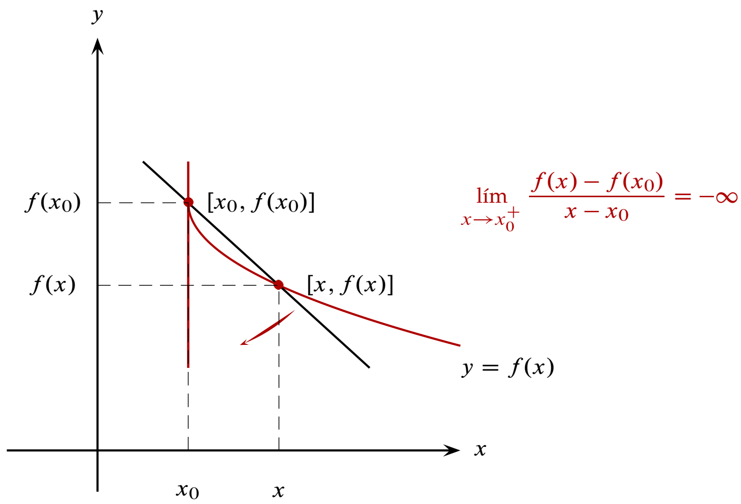
- $f'(x_0^+) = +\infty$.



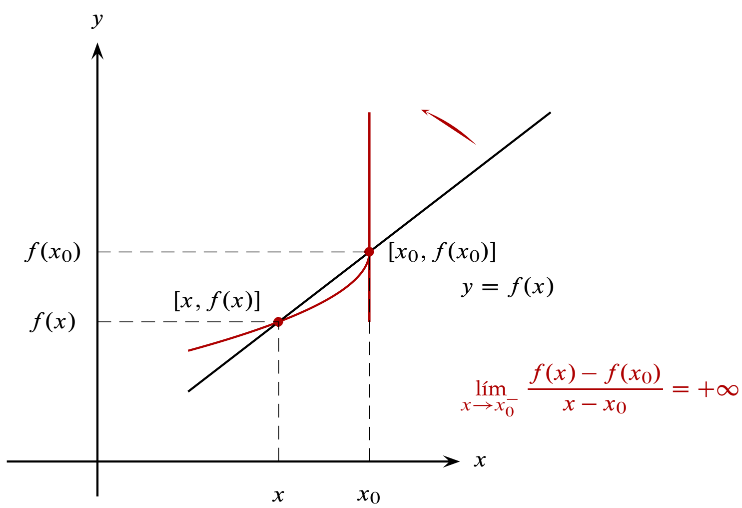

Cuando tomamos $x$ más cercano a $x_0$, la recta secante que une los puntos $[x_0, f(x_0)]$ y $[x, f(x)]$ se aproxima a la recta vertical que pasa por $[x_0, f(x_0)]$ en el sentido señalado.

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

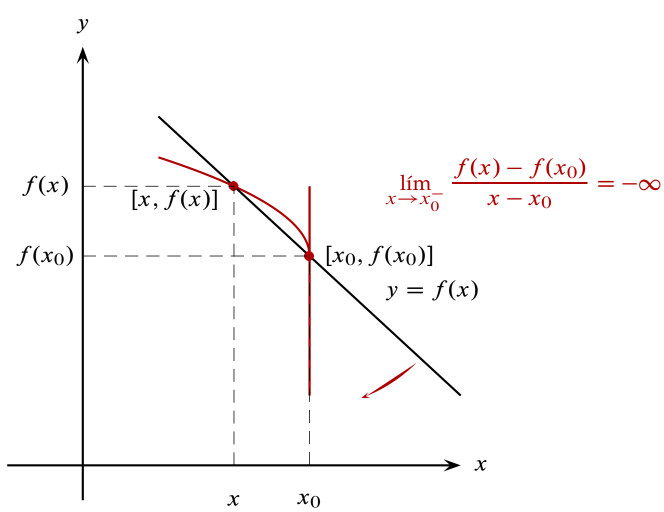
- O bien $f'(x_0^+) = -\infty$.




- O bien $f'(x_0^-) = +\infty$.




- O bien $f'(x_0^-) = -\infty$.




Si ocurre al menos uno de esos cuatro casos, diremos que la gráfica de $f$ tiene tangente vertical en $x_0$.

**Ejemplo 6.4.1** *Determinar* $g'(-1^+)$ *y* $g'(-1^-)$ *para* $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

▼

$$g'(-1^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{g(-1+h) - g(-1)}{h} =$$

(para este caso vemos que $h = |\,h\,| = \sqrt{h^2}$, pues $h > 0$)

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{1 - (-1+h)^2}}{|\,h\,|} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{2h - h^2}}{\sqrt{h^2}} = \lim_{h \to 0^+} \sqrt{\frac{2h - h^2}{h^2}} =$$
$$= \lim_{h \to 0^+} \sqrt{\frac{2}{h} - 1} = +\infty\,.$$

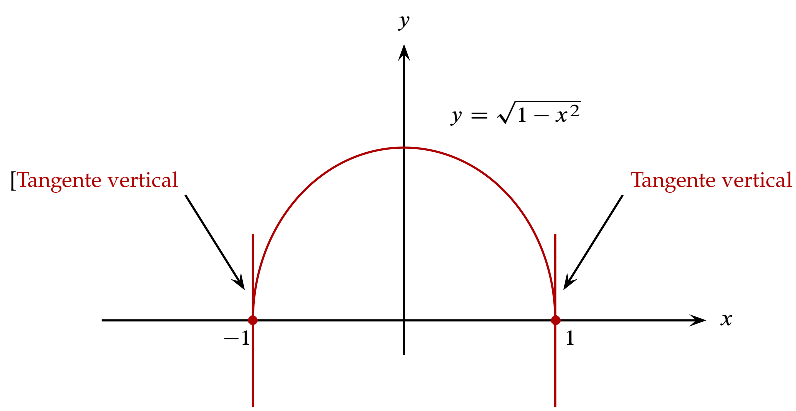
Calculamos también

$$g'(1^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} =$$

(ahora tenemos que $h = -|\,h\,| = -\sqrt{h^2}$, pues $h < 0$)

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt{1 - (1+h)^2}}{-|\,h\,|} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt{-2h - h^2}}{-\sqrt{h^2}} = -\lim_{h \to 0^-} \sqrt{\frac{-2h - h^2}{h^2}} =$$
$$= -\lim_{h \to 0^-} \sqrt{-\frac{2}{h} - 1} = -\infty\,.$$

Por lo tanto en $x = -1$ y en $x = 1$ la curva $y = \sqrt{1 - x^2}$ tiene tangente vertical.



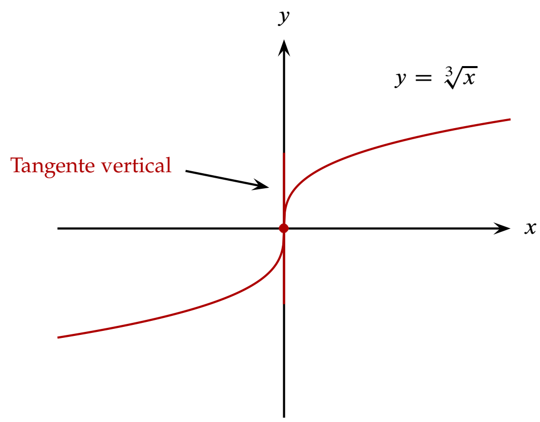

□

**Ejemplo 6.4.2** *Obtener* $f'(0^-)$ *y* $f'(0^-)$ *para* $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$.

▼

$$f'(0^{\pm}) = \lim_{h \to 0^{\pm}} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^{\pm}} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^{\pm}} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \to 0^{\pm}} \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = +\infty\,.$$

Por lo tanto, en $x = 0$ la curva $y = \sqrt[3]{x}$ tiene tangente vertical.




□

**Ejemplo 6.4.3** *Calcular $f\,'(0^-)$ y $f\,'(0^-)$ para $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$.*

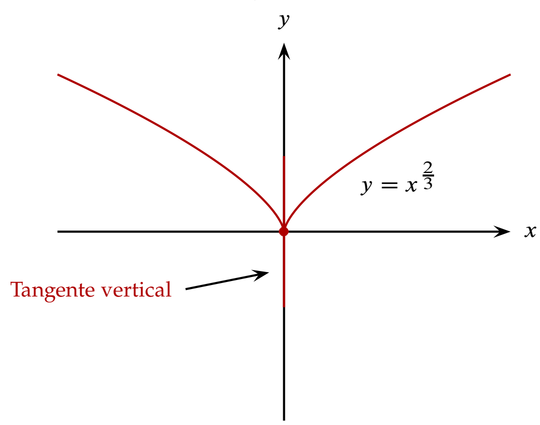
▼

$$f\,'(0^+) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{f(h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{h^{\frac{2}{3}}}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h^{\frac{1}{3}}} = +\infty\,.$$

De igual manera:

$$f\,'(0^-) = \lim_{h\to 0-} \frac{1}{h^{\frac{1}{3}}} = -\infty\,.$$

Por lo tanto, en $x = 0$ la curva $y = x^{\frac{2}{3}}$ tiene tangente vertical.




□

**Ejemplo 6.4.4** *Determinar $f\,'(0^-)$ y $f\,'(0^-)$ para $f(x) = \left|\,\sqrt[3]{x}\,\right|$.*

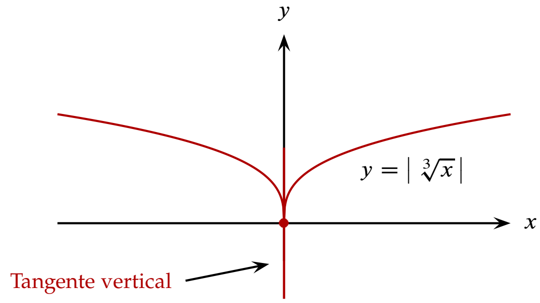
▼

$$f\,'(0^+) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\left|\,\sqrt[3]{h}\,\right|}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = +\infty\,.$$

De igual manera

$$f\,'(0^-) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{\left|\,\sqrt[3]{h}\,\right|}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{-\sqrt[3]{h}}{h} \lim_{h\to 0-} \frac{-1}{h^{\frac{2}{3}}} = -\infty\,.$$

Por lo tanto, en $x = 0$ la curva $y = \left|\,\sqrt[3]{x}\,\right|$ tiene tangente vertical.




□

**Ejercicios 6.4.1** *Soluciones en la página 6*

Para las siguientes funciones, encontrar dónde la derivada se hace infinita y determinar si es $+\infty$ o bien $-\infty$.

1. $f(x) = \sqrt{x-4}$ .
2. $g(t) = t^{3/5}$ .
3. $\phi(y) = (y-2)^{2/5} + 1$ .
4. $w = (1-u)^{2/3} + 1$ .
5. $y = 1 + \sqrt{3-2x}$ .

**Ejercicios 6.4.1** *Derivadas infinitas, página 5*

1. $f'(4^+) = +\infty$.
2. $g'(0^-) = +\infty$ & $g'(0^+) = +\infty$.
3. $\phi'(2^-) = -\infty$;
   $\phi'(2^+) = +\infty$.
4. $w'(1^-) = -\infty$;
   $w'(1^+) = +\infty$.
5. $y'(\frac{3}{2}^-) = -\infty$.