CAPÍTULO

6

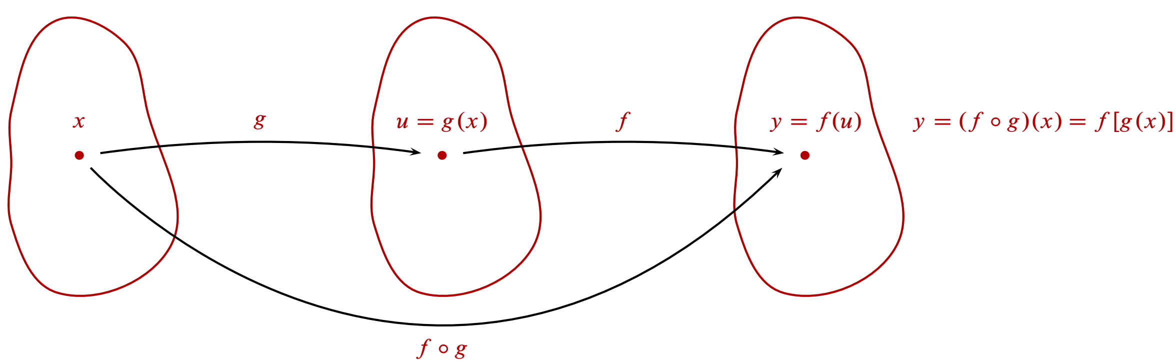
Reglas de derivación

[1]

6.2 Regla de la cadena

En las reglas básicas de derivación se aplican fórmulas apropiadas para calcular las derivadas de las funciones $f+g$ (suma), $f-g$ (diferencia), fg (producto) y $\dfrac{f}{g}$ (cociente). Pero no se presentó en esa sección una regla que nos diga cómo calcular la derivada de una composición de funciones; esto es, no sabemos cómo calcular la derivada de $f \circ g$ (g compuesta con f o bien g seguida de f).
Es, precisamente, la regla de la cadena la que nos dice cómo obtener la derivada de $y = (f \circ g)(x)$.

Regla de la cadena:



[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

Si $u = g(x)$ es una función derivable en x_0, donde $u_0 = g(x_0)$ y si $y = f(u)$ es una función derivable en u_0, entonces la función $y = (f \circ g)(x)$ es derivable en x_0:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(u_0)g'(x_0) = f'[g(x_0)] \cdot g'(x_0)\,.$$

▼ En la demostración de esta regla desempeña un papel relevante el comportamiento de la función $u = g(x)$ cuando x está cerca de x_0, ya que si existen puntos x cerca de x_0 tales que $g(x) = g(x_0)$, entonces la diferencia $g(x) - g(x_0) = 0$ genera problemas.
Por eso en esta demostración suponemos que $g(x) \neq g(x_0)$ para x cerca de x_0 y $x \neq x_0$.
Sea $\phi(x) = (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(u)$ con $u = g(x)$,

$$\phi'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f[g(x)] - f[g(x_0)]}{x - x_0}\,.$$

Se multiplica y divide por el número diferente de cero $g(x) - g(x_0)$:

$$\begin{aligned}\phi'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f[g(x)] - f[g(x_0)]}{x - x_0}\,\frac{g(x) - g(x_0)}{g(x) - g(x_0)}\right] = \\ &= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f[g(x)] - f[g(x_0)]}{g(x) - g(x_0)}\,\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right]. \qquad (*)\end{aligned}$$

Pero la derivabilidad de g en x_0 asegura la continuidad de g en x_0.
Luego, cuando $x \to x_0$, sucede que $g(x) \to g(x_0)$; o sea que $u \to u_0$, cuando $x \to x_0$.
Volviendo a $(*)$ vemos

$$\begin{aligned}\phi'(x_0) &= \left[\lim_{x\to x_0}\frac{f[g(x)] - f[g(x_0)]}{g(x) - g(x_0)}\right]\left[\lim_{x\to x_0}\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right] = \\ &= \left[\lim_{u\to u_0}\frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0}\right]\left[\lim_{x\to x_0}\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right] = \\ &= [f'(u_0)][g'(x_0)] = f'[g(x_0)] \cdot g'(x_0)\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(f \circ g)'(x_0) = f'[g(x_0)] \cdot g'(x_0)\,,$$

que es lo que se quería demostrar.

□

En general si $u = g(x)$ es una función derivable en x & $y = f(u)$ es una función derivable en u, entonces la función $y = (f \circ g)(x)$ es derivable en x. Además

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = \frac{d}{dx} f[g(x)] = \frac{d\ f[g(x)]}{d\ g(x)}\,\frac{d\ g(x)}{dx} = \frac{d\ f(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \\ &= \left[\frac{d}{du} f(u)\right]\left[\frac{d}{dx} g(x)\right].\end{aligned}$$

Esto se acostumbra sintetizar como:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right).$$

Un caso particular de la regla de la cadena es cuando $y = f(u) = u^n$ con $n \in \mathbb{N}$ & $u = g(x)$, situación que se conoce como la regla de la potencia:

$$y = (f \circ g)(x) = f[g(x)] = [g(x)]^n$$

y entonces,

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{d}{du}u^n\right)\left(\frac{du}{dx}\right) = (nu^{n-1})\left(\frac{du}{dx}\right) = n[g(x)]^{n-1}\left[\frac{d}{dx}g(x)\right].$$

Es decir,

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1}\frac{d\,g(x)}{dx} = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x).$$

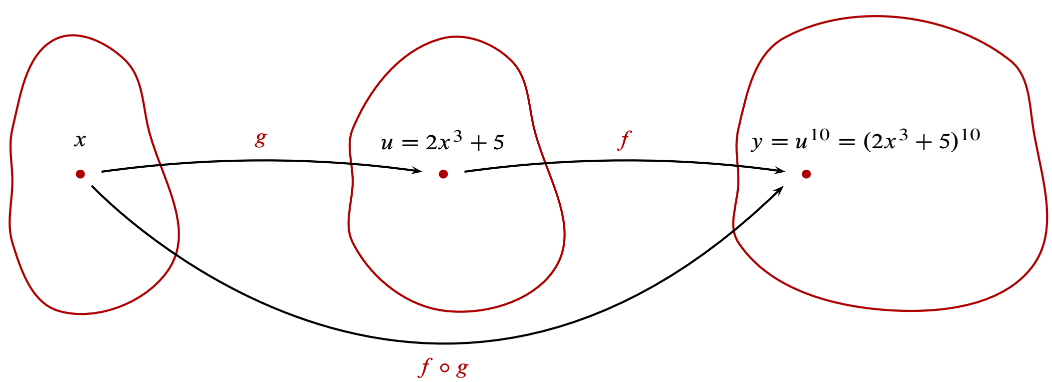
En palabras: la derivada de una potencia de una función derivable es el exponente por la potencia una unidad menor de la función base, por la derivada de la función (“la derivada de lo de adentro", como se decía anteriormente).

Ejemplo 6.2.1 *Para* $g(x) = 2x^3 + 5$ & $f(u) = u^{10}$.

1. *Obtener* $(f \circ g)(x)$.
2. *Calcular* $\dfrac{d}{dx}(f \circ g)(x)$.

▼

1. Calculamos $y = (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(2x^3 + 5) = (2x^3 + 5)^{10}$.



   Entonces, $(f \circ g)(x) = (2x^3 + 5)^{10}$.

2. $$\frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$$
$$= \left(\frac{d}{du}u^{10}\right)\left[\frac{d}{dx}(2x^3 + 5)\right] =$$
$$= (10u^9)[2(3x^2) + 0] = 10u^9(6x^2) =$$
$$= 10(2x^3 + 5)^9 6x^2 = 60x^2(2x^3 + 5)^9.$$

Lo cual es exactamente lo que se obtiene con la regla de la potencia:

$$\frac{d}{dx}(2x^3+5)^{10} = 10(2x^3+5)^9\frac{d}{dx}(2x^2+5) = 10(2x^3+5)^9\cdot 6x^2 = 60x^2(2x^3+5)^9 .$$

□

Demostraremos ahora la regla 2 para el caso en que el exponente es un número racional, esto es:

Regla 2**. Si $f(x) = x^n$ con $n = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ($p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$), entonces $f'(x) = nx^{n-1}$.

▼

En efecto, tenemos que $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$; elevando ambos miembros a la potencia q, tenemos que $[f(x)]^q = x^p$; ahora derivando con respecto a x ambos miembros de esta última igualdad:

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^q = \frac{d}{dx}x^p \Rightarrow q[f(x)]^{q-1}\frac{d\,f(x)}{dx} = px^{p-1} .$$

Lo primero por la regla de la potencia y lo segundo por la regla 2*. De aquí que

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = \frac{px^{p-1}}{q[f(x)]^{q-1}} = \frac{px^{p-1}}{q\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1}} = \frac{px^{p-1}}{qx^{p-\frac{p}{q}}} = \frac{p}{q}x^{p-1-(p-\frac{p}{q})} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1} = nx^{n-1} .$$

Que es lo que queríamos demostrar.

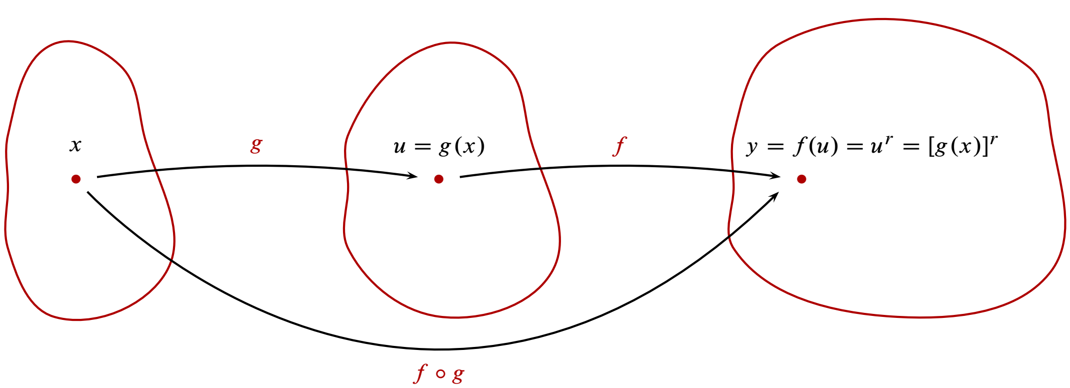
□

Ejemplo 6.2.2 *Sean $u = g(x)$ & $f(u) = u^r$ con $r \in \mathbb{Q}$.*

1. *Obtener $(f\circ g)(x)$.*
2. *Calcular $\dfrac{d}{dx}(f\circ g)(x)$.*

▼

1. $(f\circ g)(x) = f[g(x)] = [g(x)]^r$.



Entonces, $(f \circ g)(x) = [g(x)]^r$.

2.

$$\frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{d}{du}u^r\right)\left[\frac{d}{dx}g(x)\right] =$$
$$= (ru^{r-1})g'(x) = r[g(x)]^{r-1}g'(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = r[g(x)]^{r-1}g'(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dx}[g(x)]^r = r[g(x)]^{r-1}g'(x)\,.$$

□

Ejemplo 6.2.3 *Calcular la derivada de* $w = \sqrt{2t^3 + 4}$.

▼ Por la regla de la potencia

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt}(2t^3+4)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(2t^3+4)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dt}(2t^3+4) =$$
$$= \frac{1}{2}(2t^3+4)^{-\frac{1}{2}}(6t^2) = \frac{6t^2}{2(2t^3+4)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3t^2}{\sqrt{2t^3+4}}\,.$$

□

Ejemplo 6.2.4 *Calcular la derivada de* $u = \dfrac{5}{\sqrt[3]{2 - y^4}}$.

▼ Por la regla de la potencia

$$\frac{du}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{5}{\sqrt[3]{2-y^4}}\right) = \frac{d}{dy}\left[\frac{5}{(2-y^4)^{\frac{1}{3}}}\right] = \frac{d}{dy}[5(2-y^4)^{-\frac{1}{3}}] =$$
$$= 5\frac{d}{dy}(2-y^4)^{-\frac{1}{3}} = 5\left[-\frac{1}{3}(2-y^4)^{-\frac{1}{3}-1}\frac{d}{dy}(2-y^4)\right] =$$
$$= -\frac{5}{3}(2-y^4)^{-\frac{4}{3}}(-4y^3) = \frac{20y^3}{3}\,\frac{1}{(2-y^4)^{\frac{4}{3}}} = \frac{20y^3}{3\sqrt[3]{(2-y^4)^4}}\,.$$

□

Ejemplo 6.2.5 *Calcular la derivada de* $y = \left(\dfrac{1-2x^3}{1+2x^3}\right)^5$.

▼ Por la regla de la potencia y luego por la del cociente

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1-2x^3}{1+2x^3}\right)^5 = \\
&= 5\left(\frac{1-2x^3}{1+2x^3}\right)^{5-1}\frac{d}{dx}\left(\frac{1-2x^3}{1+2x^3}\right) = \\
&= 5\left(\frac{1-2x^3}{1+2x^3}\right)^4 \frac{(1+2x^3)\dfrac{d}{dx}(1-2x^3)-(1-2x^3)\dfrac{d}{dx}(1+2x^3)}{(1+2x^3)^2} = \\
&= 5\left(\frac{1-2x^3}{1+2x^3}\right)^4 \frac{(1+2x^3)(-6x^2)-(1-2x^3)(6x^2)}{(1+2x^3)^2} = \\
&= 5\left(\frac{1-2x^3}{1+2x^3}\right)^4 \frac{(-6x^2)(1+2x^3+1-2x^3)}{(1+2x^3)^2} = \\
&= \frac{5(1-2x^3)^4(-6x^2)(2)}{(1+2x^3)^4(1+2x^3)^2} = \\
&= \frac{-60x^2(1-2x^3)^4}{(1+2x^3)^6}\,.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 6.2.6 *Calcular la derivada de* $z = (u^3+1)^5(u^3-2)^8$.

▼ Por la regla del producto y luego por la de la potencia

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{du} &= \frac{d}{du}[(u^3+1)^5(u^3-2)^8] = \\
&= (u^3+1)^5\frac{d}{du}(u^3-2)^8 + (u^3-2)^8\frac{d}{du}(u^3+1)^5 = \\
&= (u^3+1)^5 8(u^3-2)^{8-1}\frac{d}{du}(u^3-2) + (u^3-2)^8 5(u^3+1)^{5-1}\frac{d}{du}(u^3+1) = \\
&= (u^3+1)^5 8(u^3-2)^7(3u^2) + (u^3-2)^8 5(u^3+1)^4(3u^2) = \\
&= 24u^2(u^3+1)^5(u^3-2)^7 + 15u^2(u^3-2)^8(u^3+1)^4\,.
\end{aligned}$$

Para simplificar, factorizamos

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{du} &= 3u^2(u^3+1)^4(u^3-2)^7[8(u^3+1)+5(u^3-2)] = \\
&= 3u^2(u^3+1)^4(u^3-2)^7(8u^3+8+5u^3-10) = \\
&= 3u^2(u^3+1)^4(u^3-2)^7(13u^3-2)\,.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 6.2.7 *Calcular la derivada de* $w = \dfrac{(3t^2-4)^3}{(2-t^2)^4}$.

▼ Primero por la regla del cociente y luego por la de la potencia

$$
\begin{aligned}
\frac{dw}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[\frac{(3t^2-4)^3}{(2-t^2)^4}\right] = \\
&= \frac{(2-t^2)^4\dfrac{d}{dt}(3t^2-4)^3-(3t^2-4)^3\dfrac{d}{dt}(2-t^2)^4}{[(2-t^2)^4]^2} = \\
&= \frac{(2-t^2)^4 3(3t^2-4)^{3-1}\dfrac{d}{dt}(3t^2-4)-(3t^2-4)^3 4(2-t^2)^{4-1}\dfrac{d}{dt}(2-t^2)}{(2-t^2)^8} = \\
&= \frac{(2-t^2)^4 3(3t^2-4)^2(6t)-(3t^2-4)^3 4(2-t^2)^3(-2t)}{(2-t^2)^8} = \\
&= \frac{18t(2-t^2)^4(3t^2-4)^2+8t(3t^2-4)^3(2-t^2)^3}{(2-t^2)^8}.
\end{aligned}
$$

Para simplificar, factorizamos

$$
\begin{aligned}
\frac{dw}{dt} &= \frac{2t(2-t^2)^3(3t^2-4)^2[9(2-t^2)+4(3t^2-4)]}{(2-t^2)^8} = \\
&= \frac{2t(2-t^2)^3(3t^2-4)^2(18-9t^2+12t^2-16)}{(2-t^2)^3(2-t^2)^5} = \\
&= \frac{2t(3t^2-4)^2(2+3t^2)}{(2-t^2)^5}.
\end{aligned}
$$

□

Ejemplo 6.2.8 *Calcular la derivada de* $f(x) = \sqrt{(1-x)^2+\sqrt{x-1}.}$.

▼ Puesto que $f(x) = \left[(1-x)^2+(x-1)^{1/2}\right]^{1/2}$:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2}\left[(1-x)^2+(x-1)^{\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{1}{2}}\left[2(1-x)(-1)+\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}\right] = \\
&= \frac{-2(1-x)+\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}}{2\sqrt{(1-x)^2+\sqrt{x-1}}} = \frac{-4(1-x)\sqrt{x-1}+1}{4\sqrt{x-1}\sqrt{(1-x)^2+\sqrt{x-1}}} = \\
&= \frac{4(x-1)\sqrt{x-1}+1}{4\sqrt{x-1}\sqrt{(1-x)^2+\sqrt{x-1}}}.
\end{aligned}
$$

□

Ejemplo 6.2.9 *Calcular la derivada de* $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

▼

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right) = \frac{d}{dx}\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\frac{d}{dx}\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[\frac{d}{dx}(x)+\frac{d}{dx}\sqrt{x+\sqrt{x}}\right] =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{d}{dx}\left(x+\sqrt{x}\,\right)^{\frac{1}{2}}\right] =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2}(x+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left(x+\sqrt{x}\,\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left\{1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left[\frac{d}{dx}(x)+\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}})\right]\right\} =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right].$$

□

Ejemplo 6.2.10 *Utilizando 3 procedimientos diferentes, obtener la derivada de*

$$y = \sqrt{\frac{3x^2-1}{3x^2+1}}.$$

▼

1. Considerando que: $y = \left(\dfrac{3x^2-1}{3x^2+1}\right)^{\frac{1}{2}}$ es potencia de una función

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2-1}{3x^2+1}\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3x^2-1}{3x^2+1}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2-1}{3x^2+1}\right). \tag{*}$$

Pero

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2-1}{3x^2+1}\right) = \frac{(3x^2+1)\frac{d}{dx}(3x^2-1)-(3x^2-1)\frac{d}{dx}(3x^2+1)}{(3x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{(3x^2+1)(6x)-(3x^2-1)(6x)}{(3x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{18x^3+6x-18x^3+6x}{(3x^2+1)^2} = \frac{12x}{(3x^2+1)^2}.$$

Entonces, sustituyendo en $(*)$

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2}\frac{(3x^2-1)^{-\frac{1}{2}}}{(3x^2+1)^{-\frac{1}{2}}}\,\frac{12x}{(3x^2+1)^2} = \frac{12x(3x^2-1)^{-\frac{1}{2}}}{2(3x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \\
&= \frac{6x}{(3x^2+1)^{\frac{3}{2}}(3x^2-1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{6x}{(3x^2+1)\sqrt{3x^2+1}\sqrt{3x^2-1}} = \\
&= \frac{6x}{(3x^2+1)\sqrt{(3x^2+1)(3x^2-1)}} = \frac{6x}{(3x^2+1)\sqrt{9x^4-1}}\,.
\end{aligned}
$$

2. Considerando que $y = \dfrac{(3x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{(3x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$ es un cociente de potencias de funciones:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left[\frac{(3x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{(3x^2+1)^{\frac{1}{2}}}\right] = \\
&= \frac{(3x^2+1)^{\frac{1}{2}}\dfrac{d}{dx}(3x^2-1)^{\frac{1}{2}} - (3x^2-1)^{\frac{1}{2}}\dfrac{d}{dx}(3x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{[(3x^2+1)^{\frac{1}{2}}]^2}\,. \qquad (**)
\end{aligned}
$$

Pero

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(3x^2-1)^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(3x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(3x^2-1) = \frac{1}{2}(3x^2-1)^{-\frac{1}{2}}6x = \frac{3x}{(3x^2-1)^{\frac{1}{2}}} \\
\frac{d}{dx}(3x^2+1)^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(3x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(3x^2+1) = \frac{1}{2}(3x^2+1)^{-\frac{1}{2}}6x = \frac{3x}{(3x^2+1)^{\frac{1}{2}}}\,.
\end{aligned}
$$

Entonces, al sustituir en $(**)$

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{(3x^2+1)^{\frac{1}{2}}\dfrac{3x}{(3x^2-1)^{\frac{1}{2}}} - (3x^2-1)^{\frac{1}{2}}\dfrac{3x}{(3x^2+1)^{\frac{1}{2}}}}{(3x^2+1)} = \\
&= \frac{1}{3x^2+1}\left[\frac{3x(3x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{(3x^2-1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{3x(3x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{(3x^2+1)^{\frac{1}{2}}}\right] = \\
&= \frac{1}{3x^2+1}\left[\frac{3x(3x^2+1) - 3x(3x^2-1)}{(3x^2-1)^{\frac{1}{2}}(3x^2+1)^{\frac{1}{2}}}\right] = \\
&= \frac{1}{3x^2+1}\left(\frac{9x^3+3x-9x^3+3x}{\sqrt{3x^2-1}\sqrt{3x^2+1}}\right) = \frac{6x}{(3x^2+1)\sqrt{9x^4-1}}\,.
\end{aligned}
$$

3. Considerando que $y = (3x^2-1)^{\frac{1}{2}}(3x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$ es un producto de potencias de funciones:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}[(3x^2-1)^{\frac{1}{2}}(3x^2+1)^{-\frac{1}{2}}] = \\
&= (3x^2-1)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(3x^2+1)^{-\frac{1}{2}} + (3x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(3x^2-1)^{\frac{1}{2}}\,. \qquad (***)
\end{aligned}
$$

Pero

$$\frac{d}{dx}(3x^2+1)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(3x^2+1)^{-\frac{3}{2}}6x = -3x(3x^2+1)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-3x}{(3x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d}{dx}(3x^2-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(3x^2-1)^{-\frac{1}{2}}6x = \frac{3x}{(3x^2-1)^{\frac{1}{2}}}\,.$$

Entonces, al sustituir en $(***)$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (3x^2-1)^{\frac{1}{2}}\frac{-3x}{(3x^2+1)^{\frac{3}{2}}} + (3x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\frac{3x}{(3x^2-1)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{-3x(3x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{(3x^2+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x}{(3x^2+1)^{\frac{1}{2}}(3x^2-1)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{-3x(3x^2-1)+3x(3x^2+1)}{(3x^2+1)^{\frac{3}{2}}(3x^2-1)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{-9x^3+3x+9x^3+3x}{(3x^2+1)\sqrt{3x^2+1}\sqrt{3x^2-1}} = \frac{6x}{(3x^2+1)\sqrt{9x^4-1}}\,.\end{aligned}$$

□

Ejercicios 6.2.1 *Soluciones en la página 12*

Utilizando reglas de derivación, calcular la derivada de las funciones siguientes.

1. $y = (3x^4-2)^5\,.$
2. $u = \left(t+\dfrac{1}{t}\right)^{10}.$
3. $z = 4\sqrt{1-y^2}\,.$
4. $w = \dfrac{5}{(3u^2+1)^2}\,.$
5. $x = \dfrac{6}{\sqrt[3]{y^5-2}}\,.$
6. $y = \sqrt{x+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}\,.$
7. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-3x^2}{x}}\,.$
8. $f(z) = \sqrt{4z^2+\sqrt{27-2z}}\,.$
9. $y = \sqrt[3]{\dfrac{4t+1}{2-5t}}\,.$

10. $y = x\sqrt{x + \sqrt{x + 1}}$.

11. $x = \dfrac{3y^2}{\sqrt{y^2 + 1}}$.

12. $y = \dfrac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$.

13. $f(z) = \dfrac{\sqrt{z} + 1}{(\sqrt{z} + 3)^2}$.

14. Si $f(w) = \dfrac{\sqrt{w + 1} + 3}{(w^2 + 1)^3}$, calcular $f\,'(1)$.

15. Sean $\Phi(s) = \sqrt{1 - \psi(s)}$, $\psi(-2) = -3$ & $\psi\,'(-2) = 3$, calcule $\Phi'(-2)$.

Ejercicios 6.2.1 *Regla de la cadena, página 10*

1. $\dfrac{dy}{dx} = 60x^3(3x^4 - 2)^4.$

2. $\dfrac{du}{dt} = 10\left(t + \dfrac{1}{t}\right)^9\left(1 - \dfrac{1}{t^2}\right).$

3. $\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{-4y}{\sqrt{1 - y^2}}.$

4. $\dfrac{dw}{du} = \dfrac{-60u}{(3u^2 + 1)^3}.$

5. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{-10y^4}{\sqrt[3]{(y^5 - 2)^4}}.$

6. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{\dfrac{1}{x}}}}\left[1 + \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1}{x}}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\right].$

7. $f'(x) = -\dfrac{3x^2 + 1}{2x^2}\sqrt{\dfrac{x}{1 - 3x^2}}.$

8. $f'(z) = \dfrac{1}{2\sqrt{4z^2 + \sqrt{27 - 2z}}}\left(8z - \dfrac{1}{\sqrt{27 - 2z}}\right).$

9. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{13}{3\sqrt[3]{(2 - 5t)^4(4t + 1)^2}}.$

10. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x\sqrt{x + 1} + 5x + 4}{4\sqrt{x + 1}\sqrt{x + \sqrt{x + 1}}}.$

11. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{3y(y^2 + 2)}{\sqrt{(y^2 + 1)^3}}.$

12. $y' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1} - x^2 + 1}.$

13. $f'(z) = \dfrac{-\sqrt{z} + 1}{2\sqrt{z}(\sqrt{z} + 3)^3}.$

14. $f'(1) \approx -1.6111.$

15. $\Phi'(-2) = -\dfrac{3}{4}.$