CAPÍTULO

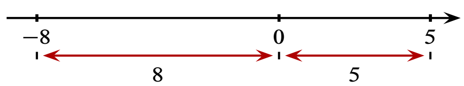
1

Los números reales

[1]

1.6 Valor absoluto

En el siguiente eje se muestran el número -8 y el 5. Se puede apreciar que la distancia de estos dos números al origen es 8 y 5 respectivamente.



- En el eje la distancia de un número a al origen, que se denota mediante $d(a, 0)$, se conoce como valor absoluto y se expresa de la siguiente manera

  $$d(a, 0) = |\,a\,|\,.$$

  Entonces, la distancia del número 5 al origen es

  $$d(5, 0) = |\,5\,| = 5$$

  y la distancia del número -8 al origen es:

  $$d(-8, 0) = |-8\,| = 8.$$

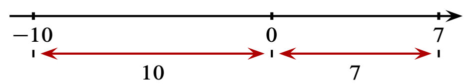
Propiedades del valor absoluto:

- $|\,a\,| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0; \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

Ejemplos:

1. $|\,7\,| = 7$ ya que $7 \geq 0$.
2. $|\,-10\,| = -(-10) = 10$ ya que $-10 < 0$.



- $|\,a\,| = \pm a$.
  El signo $\pm$ se lee más o bien menos.
- $|\,a\,| \geq 0$.
- $|\,a\,| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.
- $\sqrt{a^2} = |\,a\,|$. En general si n es par $\sqrt[n]{a^n} = |\,a\,|$.
- $|\,a\,| = |\,-a\,|$.

  Ejemplos:

  1. Si $a = 3 \Rightarrow |\,3\,| = |\,-3\,| \Rightarrow 3 = -(-3) \Rightarrow 3 = 3$.
  2. Si $a = -5 \Rightarrow |\,-5\,| = |\,-(-5)\,| \Rightarrow |\,-5\,| = |\,5\,| \Rightarrow -(-5) = 5 \Rightarrow 5 = 5$.
- $-|\,a\,| \leq a \leq |\,a\,|$.

  Ejemplos:

  1. Si $a = 2 \Rightarrow -|\,2\,| \leq 2 \leq |\,2\,| \Rightarrow -2 \leq 2 \leq 2$.
  2. Si $a = -6 \Rightarrow -|\,-6\,| \leq -6 \leq |\,-6\,| \Rightarrow -[-(-6)] \leq -6 \leq -(-6) \Rightarrow -6 \leq -6 \leq 6$.
- $|\,a \cdot b\,| = |\,a\,| \cdot |\,b\,|$.

  Ejemplos:

  1. Si $a = 2$ & $b = 4 \Rightarrow |\,2 \cdot 4\,| = |\,2\,| \cdot |\,4\,| \Rightarrow |\,8\,| = 2 \cdot 4 \Rightarrow 8 = 8$.
  2. Si $a = -4$ & $b = 3 \Rightarrow |\,-4 \cdot 3\,| = |\,-4\,| \cdot |\,3\,| \Rightarrow |\,-12\,| = -(-4) \cdot 3 \Rightarrow -(-12) = 4 \cdot 3 \Rightarrow 12 = 12$.
- $|\,a\,|^n = |\,a^n\,|$ para $n \in \mathbb{Z}$.

  Ejemplos:

  1. Si $a = 3$ & $n = 2 \Rightarrow |\,3\,|^2 = \left|\,3^2\,\right| \Rightarrow 3^2 = |\,9\,| \Rightarrow 9 = 9$.
  2. Si $a = -6$ & $n = 2 \Rightarrow |\,-6\,|^2 = \left|\,(-6)^2\,\right| \Rightarrow [-(-6)]^2 = |\,36\,| \Rightarrow 6^2 = 36 \Rightarrow 36 = 36$.
  3. Si $a = 4$ & $n = -1 \Rightarrow |\,4\,|^{-1} = \left|\,4^{-1}\,\right| \Rightarrow \dfrac{1}{|\,4\,|} = \left|\,\dfrac{1}{4}\,\right| \Rightarrow \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$.

- $\left| \dfrac{a}{b} \right| = \dfrac{|\,a\,|}{|\,b\,|}$ con $b \neq 0$.

  Ejemplo:

  Si $a = -7$ & $b = 2 \Rightarrow \left| \dfrac{-7}{2} \right| = \dfrac{|-7|}{|\,2\,|} \Leftrightarrow \left| -\dfrac{7}{2} \right| = \dfrac{|-7|}{|\,2\,|} \Leftrightarrow -\left(-\dfrac{7}{2}\right) = \dfrac{-(-7)}{2} \Leftrightarrow \dfrac{7}{2} = \dfrac{7}{2}$.

- $|\,a + b\,| \leq |\,a\,| + |\,b\,|$.

  Ejemplos:

  1. Si $a = 6$ & $b = -2 \Rightarrow |\,6 + (-2)\,| \leq |\,6\,| + |-2| \Rightarrow |\,4\,| \leq 6 + [-(-2)] \Rightarrow 4 \leq 6 + 2 \Rightarrow 4 \leq 8$.
  2. Si $a = 6$ & $b = 2 \Rightarrow |\,6 + 2\,| \leq |\,6\,| + |\,2\,| \Rightarrow |\,8\,| \leq 6 + 2 \Rightarrow 8 \leq 8$.

- $|\,a - b\,| \geq |\,a\,| - |\,b\,|$.

  Ejemplos:

  1. Si $a = 6$ & $b = -2\,|\,6 - (-2)\,| \geq |\,6\,| - |-2| \Rightarrow |\,8\,| \geq 6 - [-(-2)] \Rightarrow 8 \geq 6 - 2 \Rightarrow 8 \geq 4$.
  2. Si $a = 6$ & $b = 2 \Rightarrow |\,6 - 2\,| \geq |\,6\,| - |\,2\,| \Rightarrow |\,4\,| \geq 6 - 2 \Rightarrow 4 \geq 4$.

- $|\,a\,| \leq c$ & $|\,b\,| \leq d \Rightarrow |\,a + b\,| \leq c + d$.

  Ejemplo:

  Si $a = 3, c = 5, b = -1$ y $d = 4 \Rightarrow |\,3\,| \leq 5$ & $|-1| = 1 \leq 4 \Rightarrow |\,3 + (-1)\,| \leq 5 + 4 \Rightarrow$
  $\Rightarrow |\,2\,| \leq 9 \Rightarrow 2 \leq 9$.

Ejemplo 1.6.1 *Por definición de valor absoluto:*

▼

1. $|\,5\,| = 5$ y $|-5| = -(-5) = 5$.
2. $\left| \dfrac{2}{3} \right| = \dfrac{2}{3}$ y $\left| -\dfrac{2}{3} \right| = -\left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{2}{3}$.
3. $|-459| = -(-459) = 459$ y $|\,459\,| = 459$.
4. $\left| -\dfrac{512}{125} \right| = -\left(-\dfrac{512}{125}\right) = \dfrac{512}{125}$ y $\left| \dfrac{512}{125} \right| = \dfrac{512}{125}$.

5. $\left|\,x^2+1\,\right| = x^2+1$ ya que $x^2+1>0$ para cada $x\in\mathbb{R}$.

6. $|\,x-1\,| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x-1\ge 0\\ -(x-1) & \text{si } x-1<0\end{cases} = \begin{cases} x-1 & \text{si } x\ge 1;\\ 1-x & \text{si } x<1.\end{cases}$

7. $\left|\,1-x^2\,\right| = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } 1-x^2\ge 0\\ -(1-x^2) & \text{si } 1-x^2<0\end{cases} = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x^2\le 1\\ x^2-1 & \text{si } x^2>1\end{cases} = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } |\,x\,|\le 1;\\ x^2-1 & \text{si } |\,x\,|>1.\end{cases}$

8. $|\,4+3x\,| = \begin{cases} 4+3x & \text{si } 4+3x\ge 0\\ -(4+3x) & \text{si } 4+3x<0\end{cases} = \begin{cases} 3x+4 & \text{si } 3x\ge -4\\ -3x-4 & \text{si } 3x<-4\end{cases} = \begin{cases} 3x+4 & \text{si } x\ge \dfrac{-4}{3}=-\dfrac{4}{3};\\[2ex] -3x-4 & \text{si } x<\dfrac{-4}{3}=-\dfrac{4}{3}.\end{cases}$

9. $\left|-\dfrac{2x}{5}\right| = \begin{cases} -\dfrac{2x}{5} & \text{si } -\dfrac{2x}{5}\ge 0\\[2ex] -\left(-\dfrac{2x}{5}\right) & \text{si } -\dfrac{2x}{5}<0\end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{2}{5}x & \text{si } x\le 0;\\[2ex] \dfrac{2}{5}x & \text{si } x>0.\end{cases}$

10. $|\,x^3\,| = \begin{cases} x^3 & \text{si } x^3\ge 0\\ -x^3 & \text{si } x^3<0\end{cases} = \begin{cases} x^3 & \text{si } x\ge 0;\\ -x^3 & \text{si } x<0.\end{cases}$

□

Ejemplo 1.6.2 *Por definición de valor absoluto:*

▼

1. $|\,x\,|=5 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x=5 \text{ o bien}\\ x=-5.\end{cases}$

2. $|\,x-2\,|=5 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x-2=5 \text{ o bien}\\ x-2=-5.\end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x=7 \text{ o bien}\\ x=-3.\end{cases}$

3. $|\,2x+1\,|=9 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 2x+1=9 \text{ o bien}\\ 2x+1=-9.\end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x=\dfrac{9-1}{2}=4 \text{ o bien}\\[2ex] x=\dfrac{-9-1}{2}=-5.\end{cases}$

4. $\left|\,x^2-1\,\right| = 3 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x^2-1=3 \text{ o bien}\\ x^2-1=-3.\end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x^2=4 \text{ o bien}\\ x^2=-2.\end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x=\pm 2 \text{ o bien}\\ \text{nunca}.\end{cases} \;\Leftrightarrow$
$\begin{cases} x=-2 \text{ o bien}\\ x=2.\end{cases}$

5. $\left| x^2 - 5 \right| = 4 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x^2 - 5 = 4 \text{ o bien} \\ x^2 - 5 = -4. \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x^2 = 9 \text{ o bien} \\ x^2 = 1. \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = \pm 3 \text{ o bien} \\ x = \pm 1. \end{cases} \;\Leftrightarrow$
$\begin{cases} x = -3 \text{ o bien} \\ x = 3 \text{ o bien} \\ x = -1 \text{ o bien} \\ x = 1. \end{cases}$

6. $\left| x^3 - x \right| = 0 \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ o bien} \\ x + 1 = 0 \text{ o bien} \\ x - 1 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ o bien} \\ x = -1 \text{ o bien} \\ x = 1. \end{cases}$

7. $|\, x \,| = -2$ nunca, ya que $|\, x \,| \geq 0$ y también $-2 < 0$.

8. $|\, 4x - 3 \,| = -1$ nunca, ya que $|\, 4x - 3 \,| \geq 0$ y también $-1 < 0$.

□

Distancia entre dos puntos

- Definimos la distancia entre dos puntos a, b como:

$$d(a,b) \stackrel{\text{def}}{=} |\, a - b \,|.$$

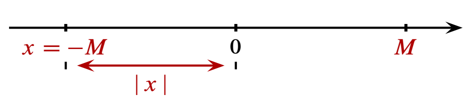
Propiedades de la distancia:

- $d(a,0) = |\, a - 0 \,| = |\, a \,|$.
- $d(a,a) = 0$.
- $d(a,b) \geq 0$.
- $d(a,b) = d(b,a)$.
- $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$, desigualdad del triángulo.

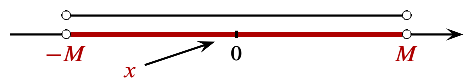
Consideramos un eje con los números $M > 0$ & x.

- Si el número x es igual a M o bien a $-M$, entonces la distancia de x al origen es M.

$$|\, x \,| = M \;\Leftrightarrow\; x = \pm M.$$

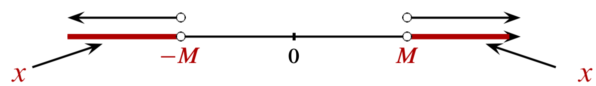


- El conjunto de números cuya distancia al origen es menor que M consta de aquellos puntos x que están a la derecha de $-M$ y a la izquierda de M.



$$d(x,0) < M \;\Leftrightarrow\; |\,x\,| < M \;\Leftrightarrow\; -M < x < M \;\Leftrightarrow\; x \in (-M, M).$$

- El conjunto de números x cuya distancia al origen es mayor que M consta de los que están a la izquierda de $-M$ o bien a la derecha de M.



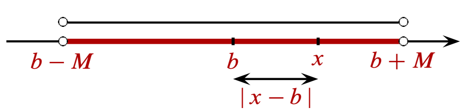
$$d(x,0) > M \;\Leftrightarrow\; |\,x\,| > M \;\Leftrightarrow\; x < -M \text{ o bien } x > M \;\Leftrightarrow\; x \in (-\infty, -M) \cup (M, +\infty)\,.$$

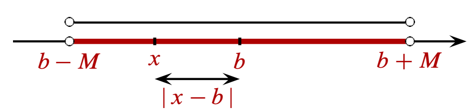
En resumen:

1. $d(x,0) = |\,x\,| \leq M \;\Leftrightarrow\; -M \leq x \leq M \;\Leftrightarrow\; x \in [-M, M]$.
2. $d(x,0) = |\,x\,| \geq M \;\Leftrightarrow\; x \leq -M \text{ o bien } x \geq M \;\Leftrightarrow\; x \in (-\infty, -M] \cup [M, \infty)$.

- Los puntos cuya distancia a b es menor que M son aquellos que están a la derecha de $b - M$ y a la izquierda de $b + M$

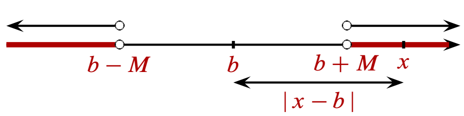
$$d(x,b) < M \Leftrightarrow |\,x - b\,| < M \Leftrightarrow -M < x{-}b < M \Leftrightarrow b{-}M < x < b{+}M \Leftrightarrow x \in (b - M, b + M)\,.$$

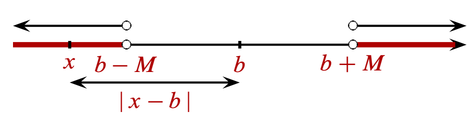




- Los puntos cuya distancia a b es mayor que M son aquellos que están a la izquierda de $b - M$ o a la derecha de $b + M$.

$$\begin{aligned} d(x,b) > M \;&\Leftrightarrow\; |\,x - b\,| > M \;\Leftrightarrow\; x - b < -M \text{ o bien } x - b > M \;\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; x < b - M \text{ o bien } x > b + M \;\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; x \in (-\infty, b - M) \cup (b + M, +\infty)\,. \end{aligned}$$



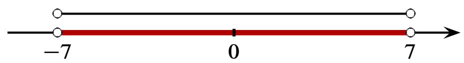


Ejemplo 1.6.3 *Utilizando el concepto de distancia, obtener los números $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen:*

1. $|\,x\,| < 7$.
2. $|\,x\,| \geq 3$.
3. $|\,x\,| \leq 4$.
4. $|\,x\,| > 5$.
5. $|\,x - 6\,| < 2$.
6. $|\,x - 4\,| \geq 1$.
7. $|\,x + 1\,| \leq 3$.
8. $|\,x + 2\,| > 4$.

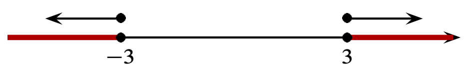
▼

1. El conjunto de números x cuya distancia al origen es menor que 7 unidades consta de aquellos puntos x tales que están a la derecha de -7 y a la izquierda de 7.



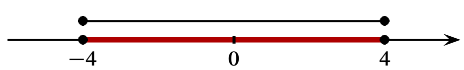
   Entonces:
$$|\,x\,| < 7 \;\Leftrightarrow\; x \in (-7, 7)\,.$$

2. El conjunto de números x cuya distancia al origen es de al menos 3 unidades consta de aquellos puntos x tales que están a la izquierda de -3 o a la derecha de 3 además de 3 y de -3.



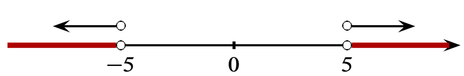
   Entonces:
$$|\,x\,| \geq 3 \;\Leftrightarrow\; x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty) = \mathbb{R} - (-3, 3)\,.$$

3. El conjunto de números x cuya distancia al origen es de a lo más 4 unidades consta de aquellos puntos x tales que están a la derecha de -4 y a la izquierda de 4, además de 4 y de -4.



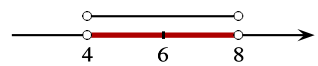
   Entonces:
$$|\,x\,| \leq 4 \;\Leftrightarrow\; x \in [-4, 4]\,.$$

4. El conjunto de números x cuya distancia al origen es mayor que 5 unidades consta de aquellos puntos x tales que están a la izquierda de -5 o a la derecha de 5.



   Entonces:
$$|\,x\,| > 5 \;\Leftrightarrow\; x \in (-\infty, -5) \cup (5, +\infty) = \mathbb{R} - [-5, 5]\,.$$

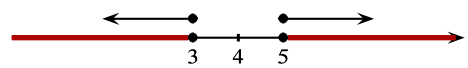
5. Ya que $|\,x-6\,| = d(x,6)$, entonces $|\,x-6\,| < 2 \Leftrightarrow d(x-6) < 2$. El conjunto de números x cuya distancia al número 6 es menor que 2 consta de aquellos puntos x tales que están a la derecha de 4 y a la izquierda de 8.



Entonces:

$$|\,x-6\,| < 2 \;\Leftrightarrow\; 4 < x < 8 \;\Leftrightarrow\; x \in (4,8)\,.$$

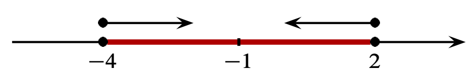
6. $|\,x-4\,| = d(x,4) \;\Rightarrow\; |\,x-4\,| \geq 1 \;\Leftrightarrow\; d(x,4) \geq 1$. El conjunto de números x cuya distancia al número 4 es al menos de 1 unidad consta de aquellos puntos x tales que están a la izquierda de 3 o a la derecha de 5 además de 3 y de 5.



Entonces:

$$|\,x-4\,| \geq 1 \;\Leftrightarrow\; x \in (-\infty,3] \cup [5,+\infty) = \mathbb{R} - (3,5)\,.$$

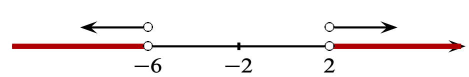
7. Ya que $|\,x+1\,| = |\,x-(-1)\,| = d(x,-1)$, entonces $|\,x+1\,| \leq 3 \;\Leftrightarrow\; d(x,-1) \leq 3$. El conjunto de números x cuya distancia a -1 es a lo más de 3 unidades consta de aquellos puntos x tales que están a la derecha de -4 y a la izquierda de 2, además de -4 y de 2.



Entonces:

$$d(x,-1) \leq 3 \;\Leftrightarrow\; |\,x+1\,| \leq 3 \;\Leftrightarrow\; x \in [-4,2]\,.$$

8. Ya que $|\,x+2\,| = |\,x-(-2)\,| = d(x,-2)$, entonces $|\,x+2\,| > 4 \;\Leftrightarrow\; d(x,-2) > 4$. El conjunto de números x cuya distancia al número -2 es mayor que 4 unidades consta de aquellos puntos x tales que están a la izquierda de -6 o bien a la derecha de 2.



Entonces:

$$d(x,-2) > 4 \;\Leftrightarrow\; |\,x+2\,| > 4 \;\Leftrightarrow\; x \in (-\infty,-6) \cup (2,+\infty) = \mathbb{R} - [-6,2]\,.$$

□

Ejercicios 1.6.1 *Soluciones en la página* **??**

Resolver las siguientes ecuaciones:

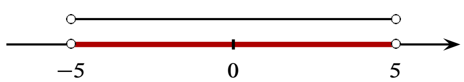
1. $|\,x\,| = \sqrt{2}$.
2. $|\,2x\,| = 6$.
3. $\left|\dfrac{3x}{2}\right| = 3$.
4. $\left|-\dfrac{5x}{4}\right| = 1$.
5. $|\,x+2\,| = 4$.
6. $|\,1-x\,| = 1$.
7. $|\,2x+3\,| = 5$.
8. $|\,2-3x\,| = 8$.
9. $\left|\,x^2-9\,\right| = 0$.
10. $\left|\,x^2-x-4\,\right| = 2$.

Utilizando el concepto de distancia, obtener los números $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen:

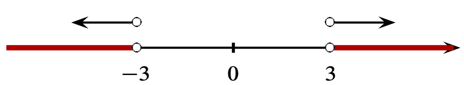
11. $|\,x\,| < 5$.
12. $|\,x\,| > 3$.
13. $|\,x\,| \leq 4$.
14. $|\,x\,| \geq 2$.
15. $|\,x\,| < -1$.
16. $|\,x-3\,| \leq 2$.
17. $|\,x-1\,| < 3$.
18. $|\,x+2\,| \geq 5$.
19. $|\,x+1\,| > 4$.
20. $|\,x-4\,| > 0$.

Ejercicios 1.6.1 *Valor absoluto, página* **??**

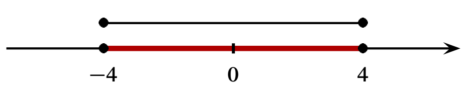
1. $x = -\sqrt{2}$ & $x = \sqrt{2}$.
2. $x = -3$ & $x = 3$.
3. $x = -2$ & $x = 2$.
4. $x = \dfrac{4}{5}$ & $x = -\dfrac{4}{5}$.
5. $x = -6$ & $x = 2$.
6. $x = 2$ & $x = 0$.
7. $x = -4$ & $x = 1$.
8. $x = \dfrac{10}{3}$ & $x = -2$.
9. $x = -3$ & $x = 3$.
10. $x = -1, x = 2, x = -2$ & $x = 3$.
11. $\{ x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 5 \} = (-5, 5)$.



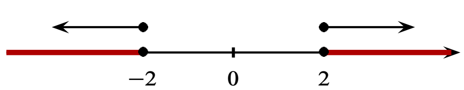
12. $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty) = \mathbb{R} - [-3, 3]$.



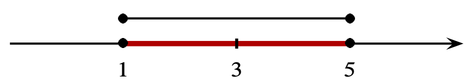
13. $\{ x \in \mathbb{R} \mid -4 \le x \le 4 \} = [-4, 4]$.



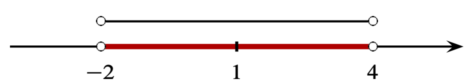
14. $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty) = \mathbb{R} - (-2, 2)$.



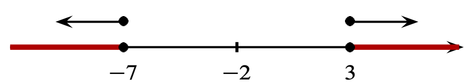
15. $\varnothing$.
16. $\{ x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x \le 5 \} = [1, 5]$.



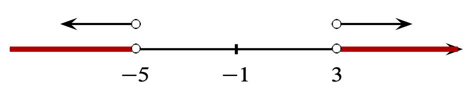
17. $(-2, 4)$.



18. $(-\infty, -7] \cup [3, +\infty) = \mathbb{R} - (-7, 3)$.



19. $(-\infty, -5) \cup (3, +\infty) = \mathbb{R} - [-5, 3]$.



20. $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty) = \mathbb{R} - \{4\}$.