CAPÍTULO

1

Los números reales

[1]

1.1 Algunos tipos de números

El conjunto de los números naturales o enteros positivos $\mathbb{N}$ es:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\};$$

éstos son una parte de los números enteros $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -(n+1), -n, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}.$$

A los números $\mathbb{Z}^- = \{\ldots, -(n+1), -n, \ldots, -3, -2, -1\}$ se les conoce como enteros negativos por lo que vemos que los números enteros están constituidos por los naturales, el cero y los enteros negativos, esto es, en símbolos:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

Expresión que se lee: el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ es igual al conjunto de los números enteros negativos $\mathbb{Z}^-$ unión con el cero, unión con el conjunto de los números naturales.

A su vez, los números enteros son una parte de los números racionales $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z} \;\&\; q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Esta última expresión se lee: $\mathbb{Q}$ es igual al conjunto de los números de la forma $\frac{p}{q}$ tales que p es un entero y q un natural. Nótese que al ser q natural no puede ser 0.

Observemos que todo número entero a se puede escribir como $\frac{a}{1}$, o bien $\frac{2a}{2}$, o bien $\frac{3a}{3}$, $\ldots$, o bien $\frac{na}{n}$, para cualquier número natural n de donde se sigue claramente que los números enteros son una parte de los números racionales. Es decir tenemos que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

[1] canek.azc.uam.mx: 14/ 5/ 2008

Usando la notació decimal, todo número racional se puede escribir como una expresión decimal periódica, por ejemplo:

$$\frac{1}{3} = 0.333, \cdots = 0.\overline{3};\ \frac{1}{2} = 0.5000, \cdots = 0.5\overline{0} = 0.5;$$

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857, \cdots = 0.\overline{142857}.$$

La representación decimal de un número racional $\frac{p}{q}$ se obtiene dividiendo el numerador p entre el denominador q. Ejemplificamos con el racional $\frac{4}{7}$:

$$\begin{array}{r|l} & \;0.571428 \\ \hline 7 & \;40 \\ & \;\;\;50 \\ & \;\;\;\;10 \\ & \;\;\;\;\;30 \\ & \;\;\;\;\;\;20 \\ & \;\;\;\;\;\;\;60 \\ & \;\;\;\;\;\;\;\;\;4 \end{array}$$

Como los diferentes residuos tienen que ser cero o un natural menor que el divisor 7, a lo más tendremos 7 residuos diferentes, entonces si continuamos el proceso de dividir más de 7 veces, necesariamente nos tiene que aparecer un residuo repetido y a partir de él también se producirán exactamente las mismas cifras en el cociente, por lo que la representación decimal será efectivamente periódica.

$$\frac{4}{7} = 0.\overline{571428}.$$

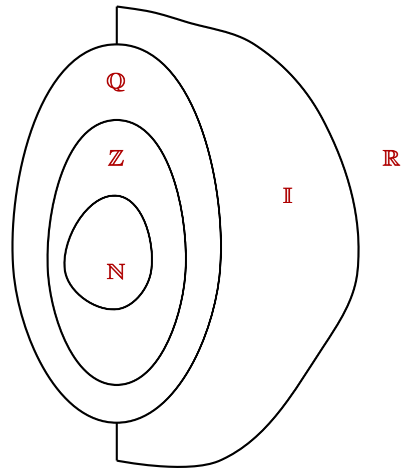
Otros números son los irracionales $\mathbb{I}$, es decir, aquellos cuyas expresiones decimales son no periódicas, como por ejemplo:

$$\sqrt{2} = 1.414213562\ldots;\ \pi = 3.141592653589\ldots;\ e = 2.718281828\ldots$$

Los números racionales $\mathbb{Q}$ y los irracionales $\mathbb{I}$ constituyen los números reales $\mathbb{R}$. Esto es:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Que visualizamos así:



Ejercicios 1.1.1 *Soluciones en la página 5*

Expresar el número racional dado mediante una expresión decimal finita (es decir, con periodo 0) o bien periódica infinita:

1. $\dfrac{3}{8}$.
2. $\dfrac{5}{6}$.
3. $\dfrac{-8}{125}$.
4. $\dfrac{17}{3}$.
5. $\dfrac{-100}{9}$.
6. $\dfrac{25}{22}$.
7. $\dfrac{1}{10}$.
8. $\dfrac{1}{100} = \dfrac{1}{10^2}$.
9. $\dfrac{1}{10^n}$ con $n \in \mathbb{N}$.
10. Dé un ejemplo de número entero no natural.
11. Dé un ejemplo de número racional no entero.
12. ¿Cómo haría para hallar la representación decimal de un número racional de la forma $\dfrac{p}{q}$ con p entero y q natural?
13. Transforme la representación decimal periódica $0.\overline{3}$ en racional de la forma $\dfrac{p}{q}$ con p entero y q natural.
14. Transforme la representación decimal periódica $0.5\overline{0}$ en racional de la forma $\dfrac{p}{q}$ con p entero y q natural.
15. Transforme la representación decimal periódica $0.\overline{142857}$ en racional, de la forma $\dfrac{p}{q}$ con p entero y q natural.
16. Transforme la representación decimal periódica $0.1\overline{3}$ en racional, de la forma $\dfrac{p}{q}$ con p entero y q natural.

17. Transforme la representación decimal periódica $0.2\overline{12}$ en racional, de la forma $\dfrac{p}{q}$ con p entero y q natural.

18. Transforme la representación decimal periódica $0.3\overline{123}$ en racional, de la forma $\dfrac{p}{q}$ con p entero y q natural.

Ejercicios 1.1.1 *Algunos tipos de números, página 3*

1. $0.375\bar{0} = 0.375$.
2. $0.833\ldots = 0.8\bar{3}$.
3. $-0.064\bar{0} = -0.064$.
4. $5.66\ldots = 5.\bar{6}$.
5. $-11.11\ldots = -11.\bar{1}$.
6. $1.13636\ldots = 1.1\overline{36}$.
7. $0.1\bar{0} = 0.1$.
8. $0.01\bar{0} = 0.01$.
9. $0.\underbrace{0\cdots0}_{(n-1)\text{ ceros}}1\bar{0} = 0.\underbrace{0\cdots0}_{(n-1)\text{ ceros}}1$.
10. -1.
11. $\dfrac{1}{2}$.
12. Dividiendo p entre q .
13. $0.\bar{3} = \dfrac{1}{3}$.
14. $0.5\bar{0} = \dfrac{1}{2}$.
15. $0.\overline{142857} = \dfrac{1}{7}$.
16. $0.1\bar{3} = \dfrac{2}{15}$.
17. $0.2\overline{12} = \dfrac{7}{33}$.
18. $0.3\overline{123} = \dfrac{104}{333}$.