CAPÍTULO

1

Apéndice

[1]

1.7.1 Conjuntos

- Un conjunto es una colección de objetos de cualquier tipo y a dichos objetos se les denomina elementos del conjunto.

En nuestro caso todos los elementos considerados, si no se especifica otra cosa, serán números reales.

Generalmente a un conjunto se le representa mediante una letra mayúscula $(A, B, C, D, \ldots)$ y a sus elementos mediante letras minúsculas $(a, b, c, x, t, \ldots)$.

- Si se quiere decir que x es un elemento del conjunto A, escribimos $x \in A$ y si se quiere decir que c no es un elemento de A, escribimos $c \notin A$.

Un conjunto puede ser expresado de las siguientes maneras:

1. Escribiendo sus elementos entre un par de llaves:

$$A = \{-1, 0, 1\}.$$

   En este caso definimos al conjunto por extensión.

2. Describiendo propiedades o características que definan de manera única a los elementos:

$$A = \{\text{todos los } x \text{ tales que } x^3 = x\}.$$

   En este caso definimos al conjunto por comprensión.

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

3. Como en (2) pero simbólicamente

$$A = \{\, x \mid x^3 = x \,\}.$$

Lo anterior lo leemos: A es el conjunto de los elementos x tales que $x^3 = x$.

Un conjunto no se modifica si se cambia el orden de sus elementos o bien si se repite alguno de éstos.

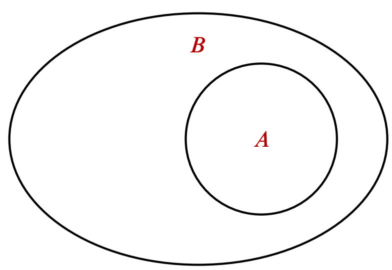
$$A = \{-1, 0, 1\} = \{1, -1, 0\} = \{0, 1, -1\};$$
$$A = \{-1, 0, 1\} = \{-1, 0, 1, 0, 1\} = \{-1, -1, 0, 1\}.$$

- Un conjunto que no tiene elementos es nombrado conjunto vacío y se le denota con el símbolo $\emptyset$.

Por ejemplo el conjunto de todas las monedas de 4 pesos mexicanos es un conjunto vacío, ya que dichas monedas no existen.

Otro ejemplo: el conjunto de los x reales tales que $x^2 = -7$ es un conjunto vacío.

- Si A y B son dos conjuntos, y sucede que todo elemento de A es también elemento de B, se dice que A es un subconjunto de B o bien que A está contenido en B y se escribe $A \subset B$.



- Cuando A no es subconjunto de B se escribe $A \not\subset B$.
- El conjunto A es un subconjunto propio de B si $A \subset B$ y además $B \not\subset A$.

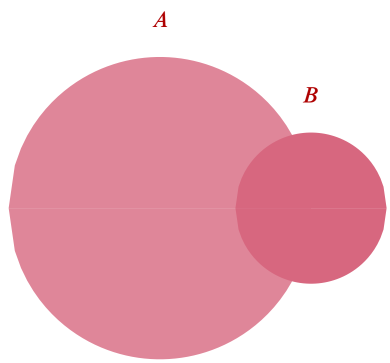
Por ejemplo, si V es el conjunto de las vocales, C es el conjunto de las consonantes y A es todo el abecedario, entonces V y C son subconjuntos propios de A ya que $V \subset A$ & $A \not\subset V$, así como $C \subset A$ & $A \not\subset C$.

- Se tiene que el conjunto vacío $\emptyset$ es un subconjunto propio de cualquier no vacío A, es decir $\emptyset \subset A$.
- Dos conjuntos A y B son iguales cuando tienen los mismos elementos y se escribe $A = B$.

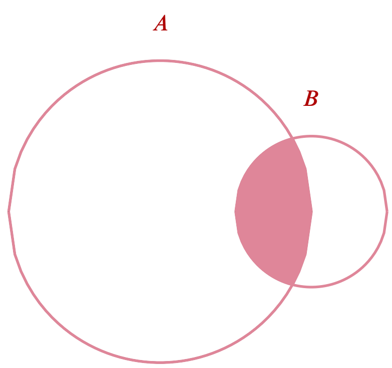
  En este caso sucede que $A \subset B$ y a la vez $B \subset A$.

1.7.2 Operaciones con conjuntos

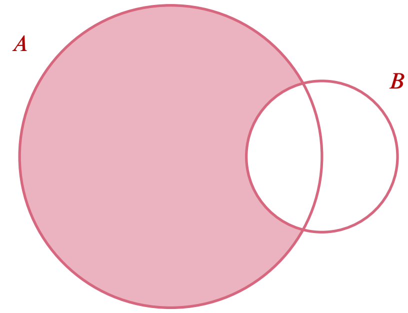
- La unión de dos conjuntos A y B, denotada por $A \cup B$, se define como el conjunto de todos los elementos que pertenecen al menos a uno de los conjuntos. Esto es
$$A \cup B = \left\{ x \,\middle|\, x \in A \text{ o bien } x \in B \right\}.$$



- La intersección de dos conjuntos A y B, denotada por $A \cap B$, se define como el conjunto de aquellos elementos que pertenecen a ambos conjuntos a la vez. Esto es
$$A \cap B = \left\{ x \,\middle|\, x \in A \,\&\, x \in B \right\}.$$



- La diferencia de dos conjuntos, A menos B, denotada por $A - B$, se define como el conjunto de todos los elementos que están en A y que no están en B. Esto es
$$A - B = \left\{ x \,\middle|\, x \in A \,\&\, x \notin B \right\}.$$



Ejemplo: dados los conjuntos

$$A = \{a, e, i, o, u\}, \quad B = \{a, b, c, d, e\} \quad \& \quad C = \{t, u, v, x\},$$

se tiene entonces que

1. $A \cup B = \{a, e, i, o, u, b, c, d\}$.
2. $A \cup C = \{a, e, i, o, u, t, v, x\}$.
3. $B \cup C = \{a, b, c, d, e, t, u, v, x\}$.
4. $A \cap B = \{a, e\}$.
5. $A \cap C = \{u\}$.
6. $B \cap C = \varnothing$.
7. $A - B = \{i, o, u\}$.
8. $A - C = \{a, e, i, o\}$.
9. $C - A = \{t, v, x\}$.
10. $(A - B) \cap (A - C) = \{i, o\}$.

- Dos conjuntos son disjuntos o ajenos cuando su intersección es el conjunto vacío.

  Ejemplo: los conjuntos B y C del ejemplo anterior son disjuntos ya que no tienen elementos en común ($B \cap C = \varnothing$).

- Si A es un conjunto cualquiera y $\varnothing$ es el conjunto vacío, entonces

$$A \cup \varnothing = A \quad \& \quad A \cap \varnothing = \varnothing.$$

- Si A y B son conjuntos tales que $A \subset B$, entonces

$$A \cup B = B \quad \& \quad A \cap B = A.$$

Ejercicios 1.8.1 *Soluciones en la página 8*

Expresar por extensión los conjuntos siguientes:

1. $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 2x + 3 = 0 \right\}$.
2. $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 3x^2 = 4 \right\}$.
3. $C = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^3 - 1 = 0 \right\}$.
4. $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^4 - 1 = 0 \right\}$.
5. $E = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^3 = 4x \right\}$.
6. $F = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 + 2x - 15 = 0 \right\}$.
7. $G = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^3 - 7x^2 + 10x = 0 \right\}$.
8. $H = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = x \right\}$.
9. $I = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq x \right\}$.

10. $J = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0 \}$.

11. Considerando el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, indicar si es falsa (F) o verdadera (V) cada una de las siguientes afirmaciones. Argumentar cada respuesta.

    a. $2 \in A$.
    b. $\{1, 2\} \subset A$.
    c. $\{3, 1, 2\} = A$.
    d. $\{1, 2, 3, 2, 3\} \not\subset A$.
    e. $\{2\} \subset A$.
    f. $\varnothing \subset A$.

12. Considerando los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, obtener los conjuntos siguientes:

    a. $A \cup B$.
    b. $A \cup C$.
    c. $A \cap B$.
    d. $A \cap C$.
    e. $B - A$.
    f. $C - A$.
    g. $B \cup C$.
    h. $D - C$.
    i. $D - B$.
    j. $B \cap C$.
    k. $D \cup A$.
    l. $D \cap A$.
    m. $B \cup D$.
    n. $C \cap D$.
    o. $(A \cup C) - (A \cap C)$.

1.8.3 Igualdades

El símbolo $=$ se lee "es igual a" y divide a la expresión en la que aparece, que se llama igualdad, en dos partes llamadas miembros: lo que está escrito antes que el símbolo es el primer miembro y lo que está después se llama segundo miembro.

A su vez si una igualdad en la que aparecen números y letras es cierta para cualquier valor de las letras, decimos que se trata de una identidad; en caso contrario decimos que tenemos una ecuación.

El símbolo $\neq$ se lee "no es igual a" o bien "es diferente o distinto de"; en general cruzar un símbolo con una diagonal / significa negarlo.

En cualquier igualdad se pueden intercambiar los miembros, esto es:

$a = b \;\Rightarrow\; b = a$. (Esta expresión se lee "si $a = b$, entonces $b = a$".)

Dos números iguales a un tercero son iguales entre sí; esto se denota así:

$$a = b \;\&\; b = c \;\Rightarrow\; a = c\,.$$

Generalizando esto, se escribe sin más:

$$a = b \;\&\; b = c \;\&\; c = d \;\&\; d = \cdots \;\Rightarrow\; a = b = c = d = \cdots$$

y cualquier expresión de la sucesión es igual a cualquier otra.

1.8.4 Otras desigualdades

Ejemplo 1.8.1 *Resolver la desigualdad* $\left|\dfrac{2x+3}{4x-5}\right| \leq 6.$

▼ Esta desigualdad no es del tipo $\dfrac{ax+b}{cx+d} \geq k$, pero se puede reducir a resolver dos desigualdades de ese tipo aplicando una de las propiedades del valor absoluto. Tenemos que

$$\left|\frac{2x+3}{4x-5}\right| \leq 6 \;\Leftrightarrow\; -6 \leq \frac{2x+3}{4x-5} \leq 6 \;\Leftrightarrow\; -6 \leq \frac{2x+3}{4x-5} \;\&\; \frac{2x+3}{4x-5} \leq 6.$$

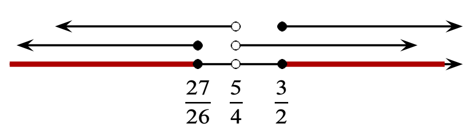
Luego, el conjunto solución CS de la desigualdad original es precisamente la intersección de los conjuntos solución de las desigualdades $\dfrac{2x+3}{4x-5} \geq -6 \quad \& \quad \dfrac{2x+3}{4x-5} \leq 6.$

1. Resolvemos la desigualdad $\dfrac{2x+3}{4x-5} \geq -6$ y obtenemos (ver el ejemplo **??** de la sección **??**) el conjunto solución
$$CS_1 = \left(-\infty, \frac{27}{26}\right] \bigcup \left(\frac{5}{4}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left(\frac{27}{26}, \frac{5}{4}\right].$$

2. Resolvemos la desigualdad $\dfrac{2x+3}{4x-5} \leq 6$ y obtenemos (ver el ejemplo **??** de la sección **??**) el conjunto solución
$$CS_2 = \left(-\infty, \frac{5}{4}\right) \bigcup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right).$$

Finalmente obtenemos la intersección de CS_1 y CS_2, para así tener el conjunto solución CS de la desigualdad original

$$CS = CS_1 \bigcap CS_2 = \left\{ \left(-\infty, \frac{27}{26}\right] \bigcup \left(\frac{5}{4}, +\infty\right) \right\} \bigcap \left\{ \left(-\infty, \frac{5}{4}\right) \bigcup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right) \right\}.$$



$$CS = \left(-\infty, \frac{27}{26}\right] \bigcup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left(\frac{27}{26}, \frac{3}{2}\right).$$

□

Ejemplo 1.8.2 *Resolver la desigualdad* $\left|\dfrac{2x+3}{4x-5}\right| > 6.$

▼ Aún cuando ya sabemos que (debido al resultado obtenido en el ejemplo 1.8.1) el conjunto solución de esta desigualdad es $\left(\dfrac{27}{26}, \dfrac{3}{2}\right) - \left\{\dfrac{5}{4}\right\}$, procedemos a resolverla como en los ejemplos anteriores.

Para quitar el valor absoluto utilizamos una de sus propiedades, la cual permite afirmar que

$$\left|\frac{2x+3}{4x-5}\right| > 6 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{4x-5} < -6 \text{ o bien } \frac{2x+3}{4x-5} > 6\,.$$

Luego, el conjunto solución CS de la desigualdad original es precisamente la unión de los conjuntos solución de las desigualdades

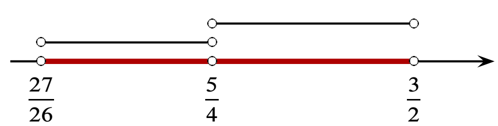
$$\frac{2x+3}{4x-5} < -6 \;\&\; \frac{2x+3}{4x-5} > 6.$$

1. Resolvemos la desigualdad $\dfrac{2x+3}{4x-5} < -6$ y obtenemos (ver y analizar el ejemplo **??** de la sección **??**) que el conjunto solución es
$$CS_1 = \left(\frac{27}{26}, \frac{5}{4}\right)\,.$$

2. Resolvemos la desigualdad $\dfrac{2x+3}{4x-5} > 6$ y obtenemos (ver y analizar el ejemplo **??** de la sección **??**) que el conjunto solución es
$$CS_2 = \left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right)\,.$$

Finalmente obtenemos la unión de CS_1 y CS_2 para así tener el conjunto solución CS de la desigualdad original

$$CS = CS_1 \bigcup CS_2 = \left(\frac{27}{26}, \frac{5}{4}\right) \bigcup \left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{27}{26}, \frac{3}{2}\right) - \left\{\frac{5}{4}\right\}.$$



□

Ejercicios 1.8.1 *Conjuntos, página 4*

1. $A = \left\{ -\dfrac{3}{2} \right\}$.
2. $B = \left\{ -\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}} \right\}$.
3. $C = \{ 1 \}$.
4. $D = \{ -1, 1 \}$.
5. $E = \{ 0, -2, 2 \}$.
6. $F = \{ -5, 3 \}$.
7. $G = \{ 0, 2, 5 \}$.
8. $H = \mathbb{R}$.
9. $I = \varnothing$ (el conjunto vacío) .
10. $J = \varnothing$ (el conjunto vacío) .

11. a. V .
    b. V .
    c. V .
    d. F .
    e. V .
    f. V .

12. a. $A \cup B = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 \}$.
    b. $A \cup C = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9 \}$.
    c. $A \cap B = \{ 2, 4 \}$.
    d. $A \cap C = \{ 1, 3, 5 \}$.
    e. $B - A = \{ 0, 6, 8 \}$.
    f. $C - A = \{ 7, 9 \}$.
    g. $B \cup C = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \} = D$.
    h. $D - C = \{ 0, 2, 4, 6, 8 \} = B$.
    i. $D - B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \} = C$.
    j. $B \cap C = \varnothing$.
    k. $D \cup A = D$.
    l. $D \cap A = A$.
    m. $B \cup D = D$.
    n. $C \cap D = C$.
    o. $(A \cup C) - (A \cap C) = \{ 2, 4, 7, 9 \}$.