CAPÍTULO

7

Razones de cambio relacionadas

[1]

Al definir la derivada de una función $y = f(x)$ en un punto fijo x_0, se explicitó que

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

donde $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ & $\Delta x = x - x_0 = h$ son los incrementos de las variables y & x, respectivamente.
Refiriéndonos a estos incrementos podemos decir que:

- El incremento $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ muestra el cambio que tiene la variable y.
- El incremento $\Delta x = x - x_0 = h$ muestra el cambio que tiene la variable x.

  De esto se desprende que el cociente

  $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

  es una razón de cambio que muestra la razón entre el cambio que tiene la variable y & el cambio que tiene la variable x.

  Es decir, es una razón que compara el cambio de la variable y con respecto al cambio de la variable x.

  O sea que es una razón que mide el cambio promedio de la variable y, a lo largo del intervalo limitado por x_0 & $x_0 + \Delta x$.

- Esto es, es la razón de cambio promedio de la función $y = f(x)$ con respecto a x, a lo largo del intervalo con extremos x_0 & $x_0 + \Delta x$.

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

Ahora bien, al escribir $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ nos estamos refiriendo a la razón de cambio promedio de la variable y cuando se consideran cambios cada vez más pequeños en la variable x. Podemos decir que con este límite se busca una razón de cambio instantánea de la variable y con respecto a la variable x.
Es decir, cuando hacemos que la longitud ($|\,\Delta x\,|$) del intervalo limitado por x_0 & $x_0 + \Delta x$ tienda a cero, "la razón de cambio promedio de y" se convierte en "la razón de cambio instantánea de y", por supuesto, con respecto a x.

En el caso particular en que la variable independiente es el tiempo t, es usual referirse a la derivada como una velocidad de cambio, en lugar de decir razón de cambio instantánea con respecto a t. Por ejemplo:

- Si $x = \phi(t)$ es la posición de un móvil en el instante de tiempo t, entonces $\dfrac{dx}{dt} = \phi'(t)$ es la velocidad de cambio de la posición $x = \phi(t)$ en el instante de tiempo t, que es la velocidad instantánea del móvil.

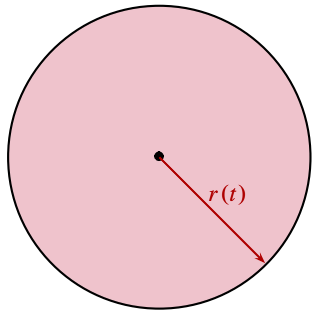
- Si $v = g(t)$ es la velocidad de un móvil en el instante de tiempo t, entonces $\dfrac{dv}{dt} = g'(t)$ es la velocidad de cambio de la velocidad $v = g(t)$ en el instante de tiempo t, que es la aceleración instantánea del móvil.

Supongamos ahora que, en el contexto de un problema, se tiene una función de la que queremos medir y obtener su razón de cambio (su derivada). Es muy problable que dicha función se encuentre relacionada con otras funciones cuyas derivadas (razones de cambio) se conozcan. La estrategia en este caso consiste en encontrar una relación matemática en donde se relacionen las funciones que aparezcan en el contexto del problema.
Posteriormente se deriva la expresión matemática mencionada y se obtiene una relación de funciones y razones de cambio (las que se conocen con las que no se conocen).
Por último se despeja la razón de cambio deseada que estará en términos de las otras razones de cambio.
Se dice entonces que se tiene un problema de razones de cambio relacionadas.

En este tipo de problemas es de vital importancia tener muy claro ¿qué es lo que se pide en el problema? así como, ¿qué es lo que se sabe en el problema? Teniendo claro lo que se pide y lo que se sabe, procedemos a matematizar el problema.

Ejemplo 7.1.1 *Al arrojar una piedra a un estanque de agua tranquila se forman ondas circulares concéntricas cuyos radios aumentan de longitud al paso del tiempo. Cuando la onda exterior tiene un radio de 3 m, éste aumenta a una rapidez (velocidad) de 50 cm/s. ¿A qué rapidez (velocidad) aumenta el área del círculo formado por dicha onda?*

▼ ¿Qué se pide en el problema? Se pide calcular la rapidez (velocidad) a la que está aumentando el área de un círculo, cuando su radio mide 3 m y la longitud de éste aumenta a razón de 0.5 m/s.
Es decir, si consideramos un círculo que (en cierto instante t) tiene un radio $r(t)$ y un área $A(t)$, entonces lo que se desea es calcular la velocidad con que cambia (razón de cambio) el área $A(t)$, cuando el radio $r(t)$ es de 3 m y la razón de cambio del radio es de 0.5 m/s. Esto es, se pide calcular la derivada $\dfrac{dA}{dt}$ cuando $r = 3$ y cuando $\dfrac{dr}{dt} = 0.5$.



El área del círculo es $A = \pi r^2$. La razón de cambio de A con respecto al tiempo t se obtiene derivando ambos miembros con respecto al tiempo:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\pi\, r^2(t)\right] = 2\pi\, r(t)\left(\frac{dr}{dt}\right).$$

En el caso particular en que $r(t) = 3$ m y $\dfrac{dr}{dt} = 0.5$ m/s:

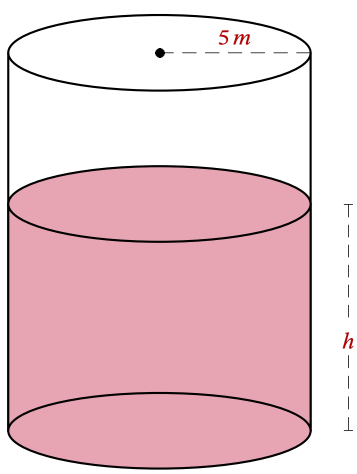
$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r(t)\left(\frac{dr}{dt}\right) = 2\pi(3\text{ m})(0.5\ \text{ m/s}) = 3\pi\text{ m}^2/\text{s} \;\Rightarrow\; \frac{dA}{dt} = 3\pi\text{ m}^2/\text{s} \approx 9.4248\,\text{m}^2/\text{s}.$$

Esto es, en el preciso instante en que el radio es de 3 m, éste tiene un cambio de 0.5 m/s y el área tiene un cambio de 3π m^2/s ≈ 9.4248 m^2/s.

□

Ejemplo 7.1.2 *A un depósito cilíndrico de base circular y 5 m de radio, le está entrando agua a razón de 25 l/s. Calcular la rapidez a la que sube la superficie del agua.*

▼ ¿Qué se pide en el problema? Se pide calcular la rapidez (velocidad) a la que está aumentando la altura del nivel de agua contenida en un cilindro circular recto de radio fijo, cuando el volumen del agua aumenta a razón de 25 l/s (25 dm^3/s). Es decir, si consideramos el cilindro circular recto formado por el agua que tiene un radio fijo $r = 5$ m, altura h y volumen V, entonces lo que se desea es calcular la velocidad con que cambia (razón de cambio) la altura h, cuando la razón de cambio del volumen V es de 25 dm^3/s. Esto es, se pide calcular la derivada $\dfrac{dh}{dt}$ cuando $r = 50$ dm y cuando $\dfrac{dV}{dt} = 25$ dm^3/s.



Obsérvese que:

1. El volumen del agua contenida en el cilindro va cambiando. La razón de cambio es $\dfrac{dV}{dt}$.
2. La altura del nivel del agua contenida en el cilindro va cambiando. La razón de cambio es $\dfrac{dh}{dt}$.
3. El radio del cilindro permanece constante.

El volumen V de un cilindro circular de radio r y altura h es $V = \pi r^2 h$. Entonces, cuando $r = 50$ dm, el volumen del cilindro es $V = \pi(50)^2 h = 2500\pi h$ dm^3.
Ya que tanto la altura como el volumen son funciones del tiempo t, derivamos con respecto a t y obtenemos:

$$\frac{dV}{dt} = 2500\,\pi\left(\frac{dh}{dt}\right) \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{2500\pi}\left(\frac{dV}{dt}\right) \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{2500\pi}(25) \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{100\pi}\ \text{dm/s} \approx 0.0032\ \text{dm/s}.$$

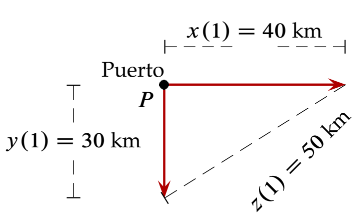
Por lo tanto, la rapidez con que sube la superficie del agua es

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{100\pi}\ \text{dm/s} \approx 0.0032\ \text{dm/s}.$$

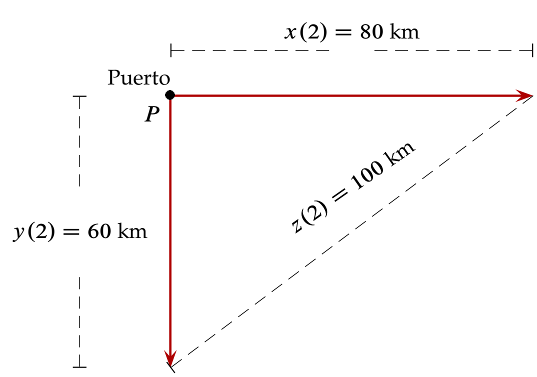
□

Ejemplo 7.1.3 *Dos barcos salen simultáneamente de un puerto; uno viaja hacia el sur a una velocidad de 30 km/h y el otro hacia el este a una velocidad de 40 km/h. Después de 2 h ¿cuál es la velocidad de separación de los dos barcos?*

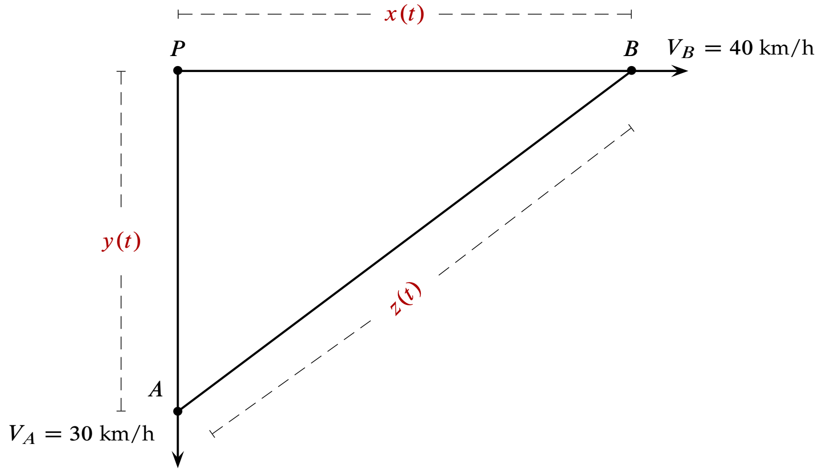
▼ ¿Qué se pide en el problema? Se pide calcular la velocidad a la que se están separando los barcos después de 2 h de haber partido del mismo puerto. Es decir, si consideramos que $z(t)$ es la distancia que separa a los barcos en cierto instante t, entonces lo que se desea es calcular la rapidez con que cambia (razón de cambio) la distancia $z(t)$ al paso del tiempo. Esto es, se pide calcular la derivada $\dfrac{dz}{dt}$ cuando el tiempo t transcurrido es de 2 h.
La posición de los barcos después de haber iniciado su desplazamiento es



Una hora después



Dos horas después



t horas después

Si $x(t)$ es la distancia recorrida en t horas por el barco B que se desplaza hacia el este, entonces

$$x(t) = v_B \cdot t = 40\,(\text{km/h}) \cdot t\ (\text{h}) = 40t\ (\text{km})\,.$$

y si $y(t)$ es la distancia recorrida en t horas por el barco A que se desplaza hacia el sur, entonces

$$y(t) = v_A \cdot t = 30\,(\text{km/h}) \cdot t\ (h) = 30t\ (\text{km})\,.$$

Luego, por el teorema de Pitágoras, la distancia z que separa a los dos barcos cumple con

$$\begin{aligned} & z(t)^2 = x(t)^2 + y(t)^2 = (40t)^2 + (30t)^2 = 1\,600t^2 + 900t^2 = 2\,500t^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow\ & z(t) = \sqrt{2\,500t^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow\ & z(t) = 50t\ (\text{km}). \end{aligned}$$

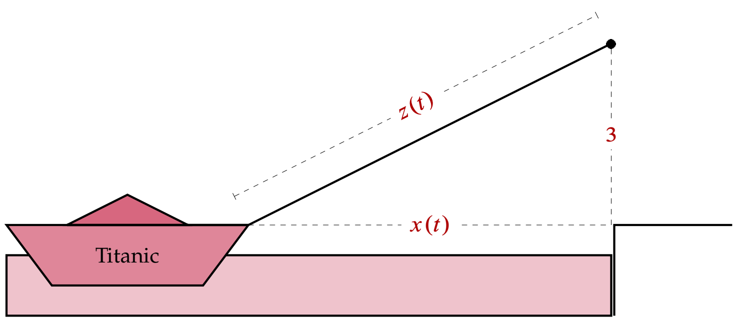
Así pues, la distancia $z(t)$ es la función lineal $z(t) = 50t$, por lo que su derivada es $\dfrac{dz}{dt} = 50$, que es una función constante. Esto es, en cualquier instante $t > 0$, los barcos se están separando a una velocidad constante $z'(t) = 50$ km/h.
En particular, después de 2 h, $z'(2) = 50$ km/h.

□

Ejemplo 7.1.4 *Un hombre está parado en un muelle y jala una lancha por medio de una cuerda. Sus manos están a 3 m por encima del amarre de la lancha. Cuando la lancha está a 4 m del muelle, el hombre está jalando la cuerda a una velocidad de 80 cm/s. ¿A qué velocidad se aproxima la lancha al muelle?*

▼ ¿Qué se pide en el problema? Se pide calcular la rapidez (velocidad) a la que está disminuyendo la distancia que hay entre la lancha y el muelle, cuando dicha distancia es de 4 m y la longitud de la cuerda está disminuyendo a razón de 0.8 m/s. Es decir, si consideramos que (en cierto instante t) la lancha se encuentra a una distancia $x(t)$ del muelle y que $z(t)$ es la longitud de la cuerda, entonces lo que se desea es calcular la velocidad con que cambia (razón de cambio) la distancia $x(t)$, cuando el valor de $x(t)$ es de 4 m y la razón de cambio de la longitud $z(t)$ de la cuerda es de -0.8 m/s. Esto es, se pide calcular la derivada $\dfrac{dx}{dt}$ cuando $x = 4$ y cuando $\dfrac{dz}{dt} = -0.8$. [El signo negativo en la razón de cambio de la longitud $z(t)$ de la cuerda se debe a que dicha longitud está disminuyendo (decreciendo)].

Consideramos el triángulo rectángulo cuyos vértices están en el amarre de la lancha, la base del muelle y las manos del hombre. Este triángulo tiene catetos de longitudes $x(t)$ (distancia entre la lancha y el muelle) y 3 (altura entre la base del muelle y las manos) e hipotenusa de longitud $z(t)$ (longitud de la cuerda).



Por el teorema de Pitágoras se cumple que

$$z^2(t) = x^2(t) + 3^2 = x^2(t) + 9\,,$$

donde $x(t)$ & $z(t)$ dependen del tiempo t.
Derivando implícitamente con respecto a t se obtiene

$$2z(t)\left(\frac{dz}{dt}\right) = 2x(t)\left(\frac{dx}{dt}\right)\,,$$

de donde, para cualquier instante t, mientras $x > 0$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{z(t)}{x(t)}\left(\frac{dz}{dt}\right)\,.$$

En el instante t_0 en que $x(t_0) = 4$ m, se tiene que

$$z(t_0)^2 = x(t_0)^2 + 3^3 = 4^2 + 9 = 25 \;\Rightarrow\; z(t_0) = 5\,\text{m}\,.$$

Y debido a que $\dfrac{dz}{dt} = -0.8$ m/s, obtenemos que, en ese instante t_0:

$$\frac{dx}{dt} = \left[\frac{z(t_0)}{x(t_0)}\right]\frac{dz}{dt} = \left(\frac{5}{4}\right)(-0.8) = -1 \;\Rightarrow\; \frac{dx}{dt} = -1\,\text{m/s}\,.$$

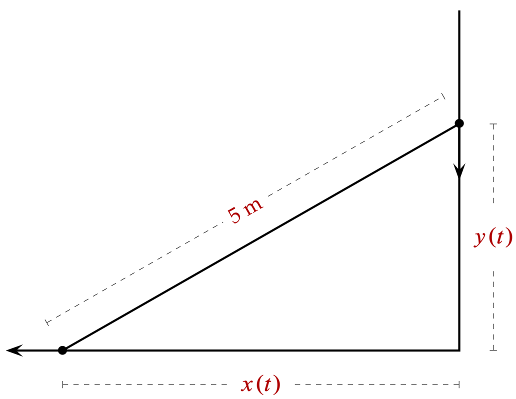
El signo negativo del resultado indica que la distancia x de la lancha al muelle disminuye o decrece a razón de 1 m/s.

□

Ejemplo 7.1.5 *Una escalera de 5 m de longitud descansa contra un muro perpendicular al suelo. Si el extremo inferior de la escalera se está resbalando a razón de 1.2 m/s, ¿a qué velocidad desciende el extremo superior cuando éste está a 3 m del suelo?*

▼ ¿Qué se pide en el problema? Se pide calcular la velocidad a la que está disminuyendo la distancia que hay entre el extremo superior de la escalera y el piso, en el instante en que dicha distancia es de 3 m y la distancia que hay entre la pared y el extremo inferior de la escalera está aumentando a razón de 1.2 m/s. Es decir, si consideramos que (en cierto instante t) el extremo superior de la escalera se encuentra a una distancia $y(t)$ del piso y que $x(t)$ es la distancia que hay entre la pared y el extremo inferior de la escalera, entonces lo que se desea es calcular la volocidad con que cambia (razón de cambio) la distancia $y(t)$, cuando la velocidad de cambio de la distancia $x(t)$ es de 1.2 m/s. Esto es, se pide calcular la derivada $\dfrac{dy}{dt}$ cuando $\dfrac{dx}{dt} = 1.2$ m/s, en el preciso instante en que $y(t) = 3$. [El signo positivo en la razón de cambio de la distancia $x(t)$ se debe a que dicha longitud está aumentando].

Consideramos el triángulo rectángulo que tiene catetos de longitudes $y(t)$ (distancia entre el extremo superior de la escalera y el piso); $x(t)$ (distancia entre el extremo inferior de la escalera y la pared) e hipotenusa de longitud $z = 5$ (longitud de la escalera).



Por el teorema de Pitágoras se cumple que

$$y^2(t) + x^2(t) = 5^2 = 25\,,$$

[donde $y(t)$ & $x(t)$ dependen del tiempo t].

Derivando implícitamente con respecto a t se obtiene

$$2y(t)\left(\frac{dy}{dt}\right) + 2x(t)\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0\,,$$

de donde, para cualquier instante t, mientras $y(t) > 0$ se tiene que

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x(t)}{y(t)}\left(\frac{dx}{dt}\right).$$

En el instante t_0 en que $y(t_0) = 3$ m:

$$3^2 + x^2(t_0) = 25 \;\Rightarrow\; x(t_0) = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4\,\text{m}.$$

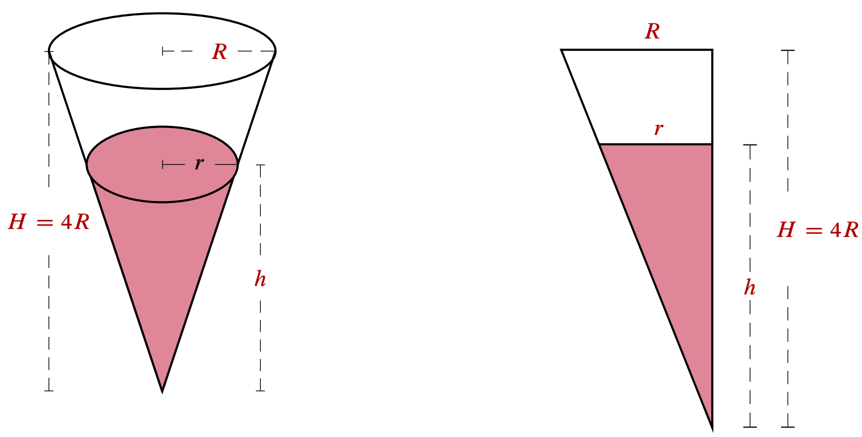
Y debido a que $\dfrac{dx}{dt} = 1.2$ m/s, obtenemos que, en ese instante t_0:

$$\frac{dy}{dt} = \left[-\frac{x(t_0)}{y(t_0)}\right]\frac{dx}{dt} = \left(-\frac{4}{3}\right)1.2 = -1.6 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dt} = -1.6\,\text{m/s}\,.$$

El signo negativo del resultado indica que la distancia $y(t)$ del extremo superior de la escalera al piso disminuye o decrece a razón de 1.6 m/s. □

Ejemplo 7.1.6 *Un recipiente tiene la forma de un cono circular recto invertido y la longitud de su altura es el doble de la de su diámetro. Al recipiente le está entrando agua a una rapidez constante, por lo que la profundidad del agua va en aumento. Cuando la profundidad es de* 1 *m, la superficie sube a razón de* 1 *cm por minuto. ¿A qué rapidez le está entrando agua al recipiente?*

▼ ¿Qué se pide en el problema? Se pide calcular la rapidez a la que está aumentando el volumen del cono limitado por la superficie del agua, cuando la altura del mismo cono es de 1 m y aumenta a razón de 1 cm/min. Es decir si consideramos el cono circular recto formado por el agua que tiene un radio r, una altura h y un volumen V, entonces lo que se desea es calcular la velocidad con que cambia (razón de cambio) el volumen V, cuando la razón de cambio de la altura h es de 1 cm/min y $h = 1$ m. Esto es, se pide calcular a la derivada $\dfrac{dV}{dt}$ cuando $\dfrac{dh}{dt} = 1$ cm/min y cuando $h = 100$ cm.



El volumen V de un cono circular recto de radio r y de altura h es

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h\,.$$

Como la longitud de su altura es el doble de la de su diámetro, por la semejanza de los triángulos mostrados se cumple que:

$$\frac{r}{h} = \frac{R}{H} \;\Rightarrow\; \frac{r}{h} = \frac{R}{4R} \;\Rightarrow\; r = \frac{h}{4},$$

y el volumen es

$$V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{4}\right)^2 h = \frac{\pi}{48} h^3\,.$$

Ya que tanto la altura como el volumen son funciones del tiempo t, derivamos respecto a t y obtenemos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{48} 3h^2 \left(\frac{dh}{dt}\right) = \frac{\pi}{16} h^2 \left(\frac{dh}{dt}\right)\,.$$

En el instante en que $h = 100\,\text{cm} = 10\,\text{dm}$ y $\dfrac{dh}{dt} = 1\,\text{cm/min} = 0.1\,\text{dm/min}$:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{16} h^2 \left(\frac{dh}{dt}\right) = \frac{\pi}{16}(10\,\text{dm})^2 (0.1\,\text{dm/min}) = \frac{10\pi}{16}\,\text{dm}^3/\text{min} = \frac{5\pi}{8}\, dm^3/\text{min}.$$

Por lo tanto, la rapidez con que entra el agua al recipiente es

$$\frac{dV}{dt} = \frac{5\pi}{8}\ell/\text{m} \approx 1.963\ell/\text{min}$$

pues $1\ell = 1\ \text{dm}^3$.

□

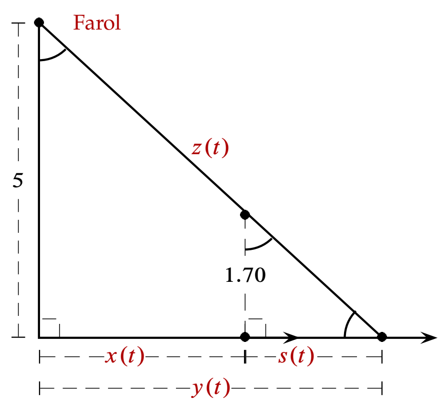
Ejemplo 7.1.7 *Un poste de 5 m de altura tiene un farol en la parte superior; un hombre de 1.70 m de estatura se aleja del poste caminando a una velocidad de 1.2 m/s. Cuando la distancia de la base del poste a la punta (parte más alejada) de la sombra del hombre es de 6 m, ¿con qué velocidad crece su sombra?; ¿con qué velocidad se mueve la punta de la sombra con respecto al farol?*

▼

- ¿Qué se pide en la primera pregunta?

  Se pide calcular la velocidad a la que está creciendo la sombra proyectada por el hombre, a medida que éste se aleja del poste. Es decir, se desea conocer la velocidad a la que crece la longitud $s(t)$ de la sombra, cuando se conoce la velocidad a la que aumenta la distancia $x(t)$ del hombre a la base del poste, así como la distancia $x(t) + s(t)$ desde la base del poste hasta la punta de la sombra. Esto es, se quiere conocer la razón de cambio $\frac{ds}{dt}$ a sabiendas de que $\frac{dx}{dt} = 1.2$ m/s y de que $x(t) + s(t) = 6$ m.

  Es importante notar que, a partir de los pies del hombre, se miden dos longitudes en el piso: su distancia $x(t)$ a la base del poste y la longitud $s(t)$ de su sombra.



Construimos dos triángulos rectángulos semejantes (uno dentro del otro) con un vértice común ubicado en la punta más alejada de la sombra. El triángulo grande con vértices en la base del poste y en farol; el triángulo pequeño con vértices en los pies y en la cabeza del hombre. El triángulo grande tiene un cateto de longitud 5 m y el otro de longitud $y(t) = x(t) + s(t)$; el triángulo pequeño tiene un cateto de longitud 1.70 m y el otro de longitud $s(t)$.

Por la semejanza de los triángulos rectángulos ocurre que $\frac{s(t)}{1.70} = \frac{y(t)}{5}$; por lo cual

$$5\,s(t) = 1.7\,y(t) \;\Rightarrow\; 5\,s(t) = 1.7[x(t) + s(t)] \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 5\,s(t) - 1.7\,s(t) = 1.7\,x(t) \;\Rightarrow\; 3.3\,s(t) = 1.7\,x(t) \;\Rightarrow\; s(t) = 0.\overline{51}x(t)\,.$$

Derivando con respecto a t se obtiene

$$\frac{ds}{dt} = 0.\overline{51}\left(\frac{dx}{dt}\right).$$

Considerando que $\frac{dx}{dt} = 1.2$ m/s, se tiene que $\frac{ds}{dt} = (0.\overline{51})(1.2\,\text{m/s}) = 0.6\overline{18}\,\text{m/s}$.

Luego, en cualquier instante, la sombra crece a razón (constante) de 0.618 m/s, no importando la distancia a la que se encuentre el hombre del poste. En particular, $\frac{ds}{dt} = (0.\overline{51})(1.2\,\text{m/s}) = 0.6\overline{18}\,\text{m/s}$ en el instante t_0 en que $y(t_0) = 6$ m.

- ¿Qué se pide en la segunda pregunta?

Se pide calcular la velocidad a la que está creciendo la distancia que hay entre la luz y la punta de la sombra. Es decir, se desea conocer la velocidad a la que crece la longitud $z(t)$ de la hipotenusa del triángulo grande, cuando se conocen la velocidad a la que aumenta la distancia $x(t)$ del hombre al poste, la velocidad a la que aumenta la longitud $s(t)$ de la sombra proyectada por el hombre, así como la distancia $y(t) = x(t) + s(t)$ desde la base del poste hasta la punta de la sombra.

Esto es, se quiere conocer la razón de cambio $\frac{dz}{dt}$ a sabiendas de que

$\frac{dx}{dt} = 1.2$ m/s, que $\frac{ds}{dt} = 0.6\overline{18}$ m/s y que $y = 6$ m.

Por el teorema de Pitágoras:

$$z(t)^2 = y(t)^2 + 5^2 \;\Rightarrow\; z(t) = \sqrt{y(t)^2 + 25} = [y(t)^2 + 25]^{1/2}.$$

Derivando respecto a t

$$\frac{dz}{dt} = \frac{y(t)}{\sqrt{y(t)^2+25}}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{y(t)}{\sqrt{y(t)^2+25}}\frac{d}{dt}[x(t)+s(t)] \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dt} = \frac{y(t)}{\sqrt{y(t)^2+25}}\left(\frac{dx}{dt}+\frac{ds}{dt}\right).$$

Sustituyendo los valores particulares $y = 6$ m, $\frac{dx}{dt} = 1.2$ m/s y $\frac{ds}{dt} = 0.6\overline{18}$ m/s,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{6}{\sqrt{6^2+25}}\left(1.2 + 0.6\overline{18}\right) = \frac{6(1.\overline{81})}{\sqrt{61}} \approx 1.3968 \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dt} \approx 1.4\,\text{m/s}.$$

□

Ejemplo 7.1.8 *La ley de los gases para un gas ideal a la temperatura absoluta T en grados (kelvin) y la presión P (en atmósferas) con un volumen V (en litros), es $PV = nRT$, donde n es el número de moles del gas y $R = 0.0821$ es la constante de los gases. Suponga que en cierto instante $P = 8$ atm y que aumenta a razón de 0.10 atm/min, además $V = 10\,\ell$ y disminuye a razón de 0.15 ℓ/min. Determinar la razón de cambio de T con respecto al tiempo, en ese preciso instante, si $n = 10$ mol.*

▼ ¿Qué se desea en el problema? Se desea determinar la razón de cambio de la temperatura T con respecto al tiempo t. Esto es, se quiere calcular la rapidez de cambio de la temperatura en el preciso instante en que la presión es de 8 atm, y aumenta a razón de 0.10 atm/min y además el volumen es de 10 ℓ y disminuye a razón de 0.15 ℓ/min. Más concretamente, se quiere calcular la velocidad de cambio de la temperatura $\dfrac{dT}{dt}$ en el preciso instante en que $P = 8$ atm, $\dfrac{dP}{dt} = 0.10$ atm/min, $V = 10\,\ell$ y $\dfrac{dV}{dt} = -0.15\ \ell/\text{min}$.

Ya que $PV = nRT$, $R = 0.0821$ y que $n = 10$ mol, entonces en cualquier instante t tenemos

$$PV = 10(0.0821)T = 0.821\,T\,,$$

donde P, V y T son funciones del tiempo t.

Derivando con respecto a t en $PV = 0.821\,T$:

$$\frac{d}{dt}(PV) = 0.821\left(\frac{dT}{dt}\right) \Rightarrow P\left(\frac{dV}{dt}\right) + V\left(\frac{dP}{dt}\right) = 0.821\left(\frac{dT}{dt}\right).$$

Despejando $\dfrac{dT}{dt}$ y sustituyendo valores obtenemos:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{0.821}\left[P\left(\frac{dV}{dt}\right) + V\left(\frac{dP}{dt}\right)\right] = \frac{1}{0.821}\big[(8)(-0.15) + (10)(0.10)\big] = \frac{-0.2}{0.821} \approx -0.24.$$

Por lo tanto, la velocidad de cambio de la temperatura es $\dfrac{dT}{dt} = -0.24$ grados kelvin/min. Esto es, la temperatura disminuye 0.24 grados kelvin cada minuto.

□

Ejercicios 7.1.1 *Soluciones en la página 14*

1. Suponga que un incendio forestal se propaga en la forma de un círculo cuyo radio cambia a razón de 1.8 m/min. ¿A qué razón está creciendo el área de la región incendiada cuando el radio alcanza 60 m?

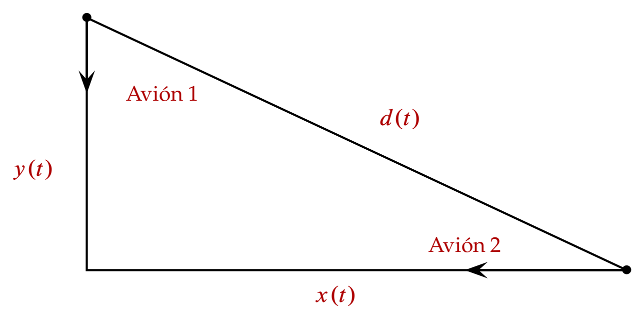
2. Sea ℓ la longitud de la diagonal de un rectángulo cuyos lados tienen longitudes x & y respectivamente. Si x aumenta con una rapidez de $\dfrac{1}{2}$ m/s y si y disminuye con una rapidez de $\dfrac{1}{4}$ m/s:
   a. ¿A qué razón está cambiando la longitud de la diagonal cuando $x = 3$ m & $y = 4$ m?
   b. ¿La diagonal está aumentando o disminuyendo en ese instante?

3. Un anuncio publicitario tiene forma de un cilindro circular recto. Determinar la variación de su volumen en el proceso de inflado, sabiendo que la altura permanece constante.

4. Dos automóviles empiezan a moverse a partir del mismo punto con velocidad constante. Uno viaja hacia el sur a 60 km/h y el otro hacia al oeste a 25 km/h ¿Con qué razón aumenta la distancia entre los dos automóviles 2 h más tarde?

5. Dos trenes parten de una estación con 3 h de diferencia. El que parte primero se dirige hacia el norte con una rapidez de 100 km/h. El otro tren se dirige hacia el este con una rapidez de 60 km/h. ¿A qué razón está cambiando la distancia entre los trenes 2 h después que partió el segundo tren?

6. Un controlador aéreo sitúa 2 aviones a la misma altitud, convergiendo en su vuelo hacia un mismo punto de encuentro (ver figura). Uno de ellos (avión 1) está a 150 millas de ese punto y vuela a 450 millas por hora. El otro (avión 2) está a 200 millas del punto y vuela a 600 millas por hora.



   a. ¿A qué velocidad decrece la distancia entre los aviones?
   b. ¿De cuánto tiempo dispone el controlador para situarlos en trayectorias diferentes?

7. Cuando un tanque esférico de radio a contiene líquido con una profundidad h, el volumen de este líquido está dado por
$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3a - h).$$
Suponga ahora que un tanque esférico de 5 m de radio se está llenando de agua a razón de $\dfrac{20}{3}$ ℓ/s. Calcule la razón de cambio del nivel de agua cuando $h = 1.25$ m ($1\,\ell = 1\,\text{dm}^3$).

8. Un avión vuela horizontalmente a una altitud de 1 milla a una velocidad de 500 millas/h y pasa sobre una estación de radar. Encuentre la razón a la que aumenta la distancia del avión a la estación cuando el avión está a 2 millas de la estación.

9. Una placa en forma de triángulo equilátero se expande con el tiempo. Cada lado aumenta a razón constante de 2 cm/h.

   ¿Con qué rapidez crece el área cuando cada lado mide 8 cm?

10. Una placa en forma de triángulo equilátero se expande con el tiempo. Cada lado aumenta a razón constante de 2 cm/h. ¿Cuál es la razón de crecimiento del área en el instante en que el valor de ésta es $\sqrt{75}$ cm^2?

11. La ley adiabática (sin pérdida ni ganancia de calor) para la expansión de un gas es
$$PV^{1.4} = C,$$
(donde P es la presión, V el volumen y C una constante). En cierto instante, el volumen es de 1 pie^3, la presión es de 40 libras/pie^2 y ésta está creciendo a razón de 8 libras/pie^2 en cada segundo. Calcular la razón de variación del volumen en dicho instante.

12. Cuando se expande aire a temperatura constante, su presión y su volumen, satisfacen

$$P\,V^{1.4} = C\,,$$

donde C es una constante. Si en un momento determinado el volumen es de 400 cm^3 y la presión es de 80 KPa, disminuyendo ésta a razón de 10 KPa/min, ¿con qué razón aumenta el volumen en ese instante?

13. Una lámpara se encuentra suspendida a 15 pies sobre una calle horizontal y recta. Si un hombre de 6 pies de estatura camina alejándose de la lámpara en línea recta con una velocidad de 5 pies/s, ¿con qué rapidez se alarga su sombra?

14. Una lámpara proyectora situada sobre el piso ilumina una pared que está a 12 m de distancia. Si un hombre de 2 m de alto camina desde la lámpara hacia la pared a una velocidad de 1.6 m/s ¿con qué rapidez decrece su sombra proyectada sobre la pared cuando se encuentra a 4 m de ésta?

15. El radio de una esfera se incrementa a razón de 2 cm/s.

    a. ¿Cuál es la razón de cambio del volumen cuando el radio mide $r = 5$ cm?
    b. ¿Cuál es la medida del radio cuando la razón de cambio del volumen es 512 cm^3/s?

16. Se infla un globo esférico introduciendo aire a razón de 50 cm^3/s. Calcular la velocidad de cambio del radio del globo cuando su diámetro es de 26 cm.

17. Un derrame de petróleo adopta una forma circular y tiene un espesor de $\dfrac{1}{50}$ pie. Si el petróleo se está escapando a razón de 40 pies^3/min, ¿a qué razón está aumentando el radio de la mancha de petróleo cuando el radio es de 50 pies?

18. Un cohete es lanzado en dirección vertical y rastreado por una estación de radar situada en el suelo a 4 millas de la rampa de lanzamiento. ¿Cuál es la velocidad del cohete cuando está a 5 millas de la estación de radar y su distancia aumenta a razón de 3 600 milla/h?

Ejercicios 7.1.1 *Razones de cambio relacionadas, página 11*

1. $\approx 679\dfrac{\text{m}^2}{\text{min}}$.
2. a. $\dfrac{1}{10}$ m/s;
   b. crece en ese momento.
3. $2\pi r(t)h\dfrac{dr(t)}{dt}$.
4. 65 km/h.
5. $\approx$ 111.2411 km/h.
6. a. -750 millas/h;
   b. $\dfrac{1}{3}$ hora.
7. $\approx$ 0.00194017 dm/s.
8. $\approx$ 433 millas/h.
9. $\approx$ 13.856406 cm^2/h.
10. $2\sqrt{15}$ cm/h.
11. $-\dfrac{1}{7}\dfrac{\text{pies}^3}{s}$.
12. 35.7 cm^3/min.
13. $\dfrac{10}{3}$ pie/s .
14. $-\dfrac{3}{5}$ m/s.
15. a. 200π cm^3/s;
    b. $\dfrac{8}{\sqrt{\pi}}$ cm.
16. $\approx$ 0.0235 cm/s.
17. $\dfrac{20}{\pi}$ pies/min.
18. 6 000 millas/h.