CAPÍTULO

3

Límite de una función

[1]

OBJETIVOS PARTICULARES

1. Comprender el concepto de límite de una función en un punto.
2. Calcular, en caso de que exista, el límite de una función mediante la aplicación de reglas y procedimientos algebraicos.
3. Comprender la noción de límites laterales (de una función en un punto) y su relación con el concepto de límite (de una función).
4. Determinar la existencia o la no existencia del límite de una función, vía la existencia y la comparación de los límites laterales.
5. Comprender la noción de límites infinitos de una función.
6. Determinar los limites infinitos de una función, mediante la aplicación de reglas y procedimientos algebraicos.
7. Comprender la noción de asíntota vertical de una función.
8. Calcular las asíntotas verticales de una función.
9. Comprender la noción de límites en infinito de una función.
10. Determinar los límites en infinito de una función, mediante la aplicación de reglas y procedimientos algebraicos.
11. Comprender la noción de asíntota horizontal de una función.
12. Calcular las asíntotas horizontales de una función.

[1] canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

13. Bosquejar la gráfica de una función considerando su comportamiento asintótico.

14. Determinar el límite de una función de ciertos puntos a partir de su gráfica.

3.1 Introducción

Supongamos que $x_0 \in (a, b)$ y que tenemos una función f tal que su dominio D_f contiene al intervalo (a, b) con excepción posiblemente de x_0; el hecho de que la función $f(x)$ esté o no definida en x_0 es irrelevante.
Decimos que el límite de la función $y = f(x)$, cuando x tiende a x_0, es el número real α si para números $x \in (a, b)$ suficientemente próximos a x_0 las imágenes correspondientes $f(x)$ están tan próximas a α como queramos. Si esto sucede, se dice que el límite de $f(x)$ en x_0 existe y es igual a α.

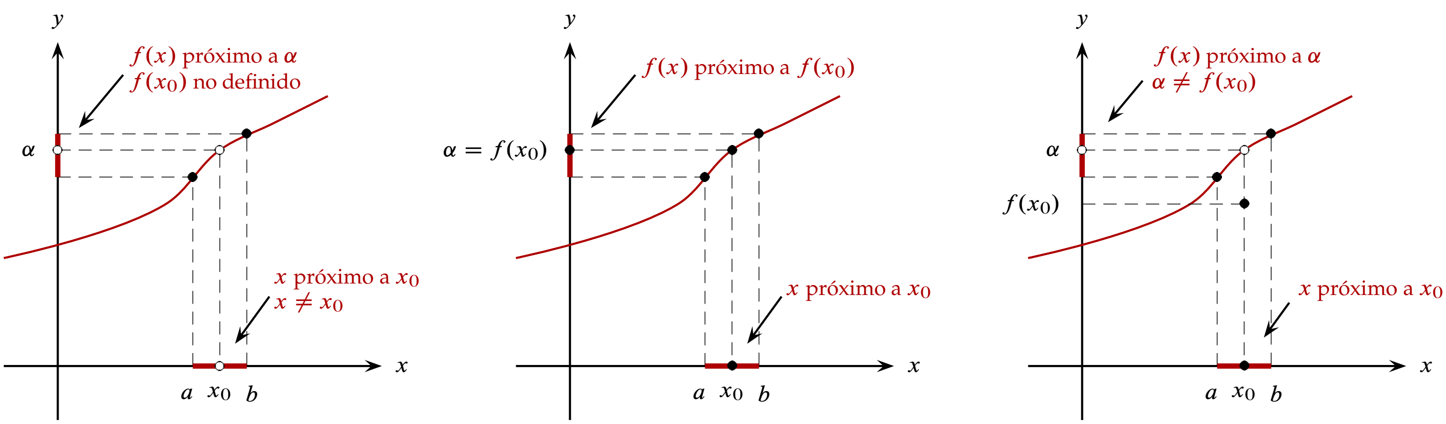
Esto lo denotamos así:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$$

lo que se lee como: el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es α.
Algunos autores escriben:

$$f(x) \to \alpha \text{ cuando } x \to x_0.$$

Es bastante claro que, en caso de existir, el límite de una función f es único.



Ejemplo 3.1.1 *La función* $f(x) = \dfrac{3x^2 - 7x + 2}{x - 2}$ *no está definida en* $x_0 = 2$. *¿Qué se puede decir acerca de* $\lim_{x \to 2} f(x)$*?*

▼ Observemos que $x = 2$ es raíz del numerador, por tanto $x - 2$ es factor de $3x^2 - 7x + 2$ y, efectuando la división, obtenemos $3x^2 - 7x + 2 = (3x - 1)(x - 2)$.

$$f(x) = \frac{3x^2 - 7x + 2}{x - 2} = \frac{(3x - 1)(x - 2)}{x - 2} = 3x - 1.$$

Podemos cancelar el factor $x - 2$ ya que $x - 2 \neq 0$ (pues $x \neq 2$).
Luego, damos valores a x cada vez más cerca de $x_0 = 2$ (pero sin llegar a $x = 2$) y obtenemos las imágenes $f(x)$ correspondientes.

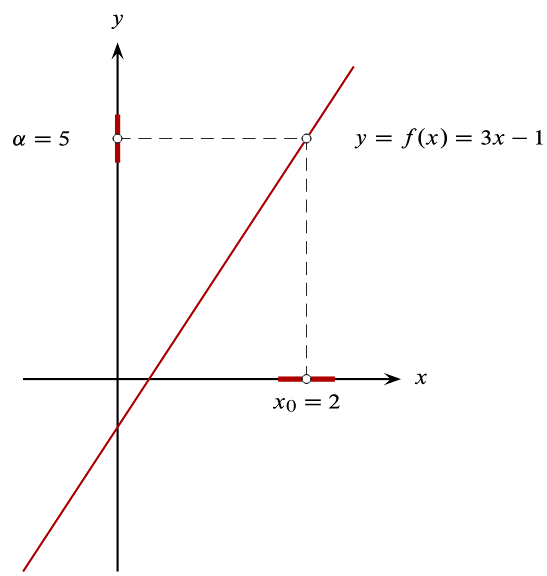
x	$f(x) = 3x - 1$
1.8	4.4
1.9	4.7
1.99	4.97
1.999	4.997
1.9999	4.9997
1.99999	4.99997
$\downarrow$	$\downarrow$
2	5

x	$f(x) = 3x - 1$
2.2	5.6
2.1	5.3
2.01	5.03
2.001	5.003
2.0001	5.0003
2.00001	5.00003
$\downarrow$	$\downarrow$
2	5

Finalmente observamos que a medida que la variable x toma valores cada vez más cercanos al número $x_0 = 2$, las imágenes correspondientes tienen valores cada vez más cerca al número $\alpha = 5$.

Podemos decir entonces que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$.

Nótese que $|f(x) - 5| \to 0$ cuando $|x - 2| \to 0$.
Gráficamente se tiene:

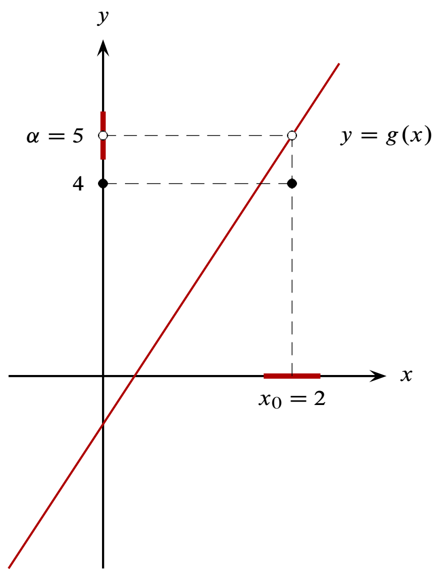


□

Ejemplo 3.1.2 *Dada la función* $g(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x \neq 2; \\ 4 & \text{si } x = 2; \end{cases}$

¿qué se puede decir acerca de $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$*?*

▼ En este caso se tiene que $x_0 = 2$ y debemos ver el comportamiento de las imágenes $g(x)$ cuando $x \to 2$; es decir, cuando x toma valores cada vez más cercanos al número $x_0 = 2$.



Notamos que para $x \neq 2$, la función $g(x) = 3x - 1$ coincide con la función $f(x) = \dfrac{3x^2 - 7x + 2}{x - 2}$ del ejemplo 3.1.1 anterior, donde vimos que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$. Podemos afirmar entonces que $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 5$. El límite existe.

¿Cómo influye el hecho de que $g(2) = 4$? ¡En nada influye!

¿Por qué? Porque al indagar por el $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$ lo que importa es el comportamiento de las imágenes $g(x)$ cuando x toma valores cerca del número $x_0 = 2$, pero siempre distintos del número 2.

□

Ejemplo 3.1.3 *Dada la función* $f(x) = \dfrac{|\,x\,|}{x}$ *¿qué se puede decir acerca de* $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$*?*

Para ver el comportamiento de las imágenes $f(x)$ cuando $x \to x_0 = 0$, debemos dar a la variable x valores cercanos a 0.

Debido a que aparece $|\,x\,|$, debemos considerar dos acercamientos por separado.

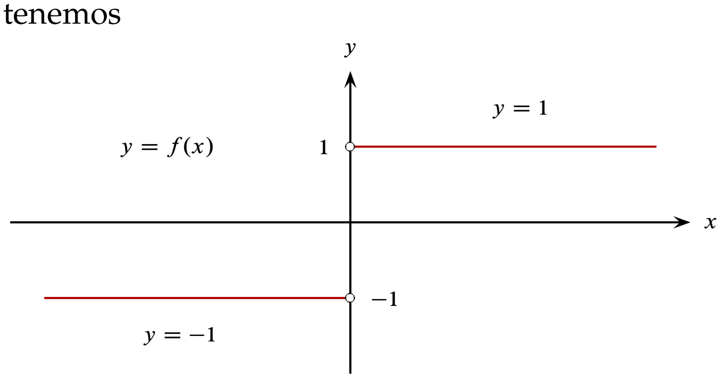
1. Si $x < 0$, entonces $|\,x\,| = -x$ & $f(x) = \dfrac{|\,x\,|}{x} = \dfrac{-x}{x} = -1$.

   Es decir, para $x < 0$ se tiene que $f(x) = -1$.

2. Si $x > 0$, entonces $|\,x\,| = x$ & $f(x) = \dfrac{|\,x\,|}{x} = \dfrac{x}{x} = 1$.

   Es decir, para $x > 0$ se tiene que $f(x) = 1$.

   ▼ Geométricamente tenemos



Ahora bien, ¿qué decir acerca de $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$?

Es claro que no se puede afirmar que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = -1$ ya que esto sucede sólo cuando $x < 0$ y no sucede cuando $x > 0$. Así también no se puede afirmar que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ ya que esto sucede solamente cuando $x > 0$ y no cuando $x < 0$.

Entonces $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) \neq -1$ y $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) \neq 1$.

Vemos entonces que no hay argumentos para asegurar la existencia de algún número α que permita afirmar que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|\,x\,|}{x} = \alpha$.

En esta situación decimos que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|\,x\,|}{x}$ no existe.

□

Ejercicios 3.1.1 *Soluciones en la página 6*

1. Sean $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$ así como $x_0 = 3$.
   ¿Qué se puede decir acerca de $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x)$?
2. Dada $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \neq -1; \\ 1 & \text{si } x = -1. \end{cases}$
   ¿Existe $\displaystyle\lim_{x\to -1} f(x)$?
3. Sean $g(x) = \dfrac{x - 4}{|\,x - 4\,|}$ así como $x_0 = 4$.
   ¿Qué puede decir acerca de $\displaystyle\lim_{x\to x_0} g(x)$?
4. Sean $\phi(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ y también $a = -1$.
   ¿Existe $\displaystyle\lim_{x\to a} \phi(x)$?
5. Dada $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -2 < x < 0; \\ 1 & \text{si } x = 0; \\ 3x & \text{si } 0 < x < 1. \end{cases}$
   ¿Existe $\displaystyle\lim_{x\to 0} h(x)$?
6. ¿Qué se puede decir acerca de $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$?

Ejercicios 3.1.1 *Introducción, página 5*

1. $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 4\,.$
2. $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 2\,.$
3. No existe $\lim\limits_{x\to 4} g(x)$.
4. $\lim\limits_{x\to -1} \phi(x) = -2\,.$
5. $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0\,.$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ no existe.