CAPÍTULO

3

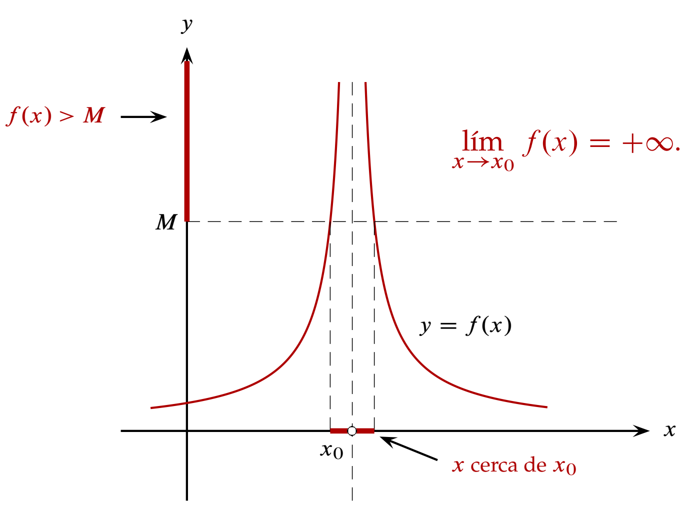
Límite de una función

[1]

3.4 Límites infinitos

- Si dado cualquier número $M > 0$, $f(x) > M$ con tal de tomar a x suficientemente cerca de x_0, diremos que $f(x)$ diverge a $+\infty$ (se lee "más infinito") y lo denotaremos así: $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

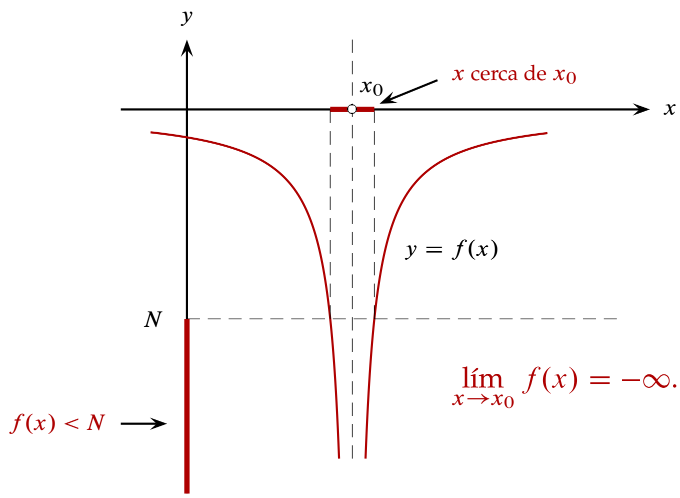
  Gráficamente $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ quiere decir que dada cualquier recta $y = M$ con $M > 0$, la gráfica de $f(x)$ en cierto intervalo con centro en x_0 está arriba de tal recta, exceptuando lo que ocurre en x_0.



- Si dado cualquier número $N < 0$, $f(x) < N$ con tal de tomar a x suficientemente cerca de x_0 diremos que $f(x)$ diverge a $-\infty$ (se lee "menos infinito") y lo denotaremos así: $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

Gráficamente $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ quiere decir que dada cualquier recta $y = N$ con $N < 0$, la gráfica de $f(x)$ en cierto intervalo con centro en x_0 está abajo de tal recta, exceptuando lo que ocurre en x_0.



Las definiciones de $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$ y de $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$ son análogas.

Tenemos entonces:

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty.$
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty.$

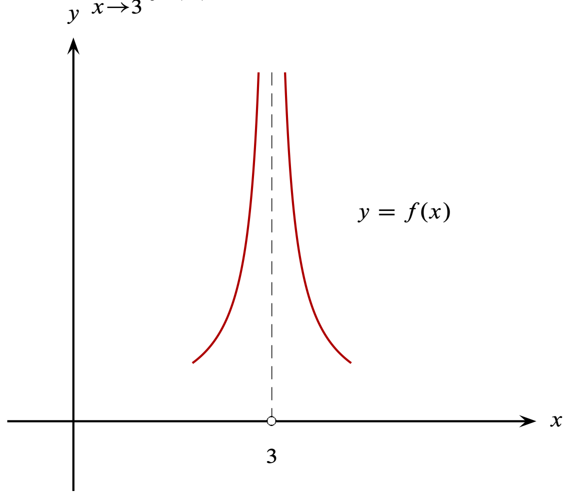
Ejemplo 3.4.1 *Dada la función* $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$, *mostrar numéricamente que* $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = +\infty$.

▼ Numéricamente podemos dar a la variable x valores cada vez más cercanos (por la izquierda o por la derecha) al número $x_0 = 3$; obtener las imágenes $f(x)$ correspondientes y observar su comportamiento.

x	$f(x)$
2.9	$\dfrac{1}{10^{-2}} = 10^2$
2.99	$\dfrac{1}{10^{-4}} = 10^4$
2.999	$\dfrac{1}{10^{-6}} = 10^6$
2.9999	$\dfrac{1}{10^{-8}} = 10^8$
$\downarrow$	$\downarrow$
3^-	$+\infty$

x	$f(x)$
3.1	$\dfrac{1}{10^{-2}} = 10^2$
3.01	$\dfrac{1}{10^{-4}} = 10^4$
3.001	$\dfrac{1}{10^{-6}} = 10^6$
3.0001	$\dfrac{1}{10^{-8}} = 10^8$
$\downarrow$	$\downarrow$
3^+	$+\infty$

Observamos aquí que, cuanto más se acerca x al número $x_0 = 3$, las imágenes $f(x)$ $(= 10^2, 10^4, 10^6, 10^8, \ldots)$ son cada vez más grandes. Este comportamiento es el que (intuitivamente) nos lleva a afirmar que $f(x) \to +\infty$ cuando $x \to 3$. Es decir $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = +\infty$. Gráficamente se ve así:



□

Ejemplo 3.4.2 *Dada* $f(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^4}$, *mostrar numéricamente que* $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$.

▼ Damos a x valores numéricos cada vez más cercanos al número $x_0 = 2$, primero por la izquierda $(x \to 2^-)$ y luego por la derecha $(x \to 2^+)$; obtenemos las imágenes $f(x)$ correspondientes y observamos su comportamiento.

1. Cuando $x \to 2^-$:

$$x = 1.9 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{(1.9-2)^4} = \frac{-1}{(-0.1)^4} = \frac{-1}{(-10^{-1})^4} = \frac{-1}{10^{-4}} = -10^4;$$
$$x = 1.99 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{(1.99-2)^4} = \frac{-1}{(-0.01)^4} = \frac{-1}{(-10^{-2})^4} = \frac{-1}{10^{-8}} = -10^8;$$
$$x = 1.999 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{(1.999-2)^4} = \frac{-1}{(-0.001)^4} = \frac{-1}{(-10^{-3})^4} = \frac{-1}{10^{-12}} = -10^{12}.$$

   Observamos aquí que las imágenes $f(x)$ son negativas y cada vez de mayor valor absoluto. Intuitivamente decimos que $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to 2^-$. Esto es $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$.

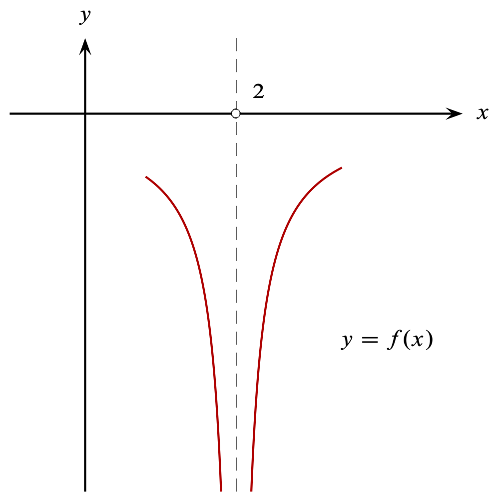
2. Cuando $x \to 2^+$:

$$x = 2.1 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{(2.1-2)^4} = \frac{-1}{(0.1)^4} = \frac{-1}{(10^{-1})^4} = \frac{-1}{10^{-4}} = -10^4;$$
$$x = 2.01 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{(2.01-2)^4} = \frac{-1}{(0.01)^4} = \frac{-1}{(10^{-2})^4} = \frac{-1}{10^{-8}} = -10^8;$$
$$x = 2.001 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{(2.001-2)^4} = \frac{-1}{(0.001)^4} = \frac{-1}{(10^{-3})^4} = \frac{-1}{10^{-12}} = -10^{12}.$$

   Aquí también observamos que las imágenes $f(x)$ son negativas y cada vez de mayor valor absoluto; por lo cual (intuitivamente) decimos que $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to 2^+$. Es decir, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$.

3. Ya que $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ & $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$, podemos afirmar que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$.

Gráficamente se ve así:



□

Además tenemos en general

- Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ y si $g(x) > 0$ cerca de x_0, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{c}{g(x)} = +\infty$ si $c > 0$;
- Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ y si $g(x) < 0$ cerca de x_0, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{c}{g(x)} = -\infty$ si $c > 0$;
- Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ y si $g(x) > 0$ cerca de x_0, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{c}{g(x)} = -\infty$ si $c < 0$;
- Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ y si $g(x) < 0$ cerca de x_0, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{c}{g(x)} = +\infty$ si $c < 0$.

Algunos autores escriben

- $\text{“}\left(\dfrac{c}{0^+}\right)\text{”} = \text{“}\left(\dfrac{+}{0^+}\right)\text{”} = +\infty$ si $c > 0$;
- $\text{“}\left(\dfrac{c}{0^-}\right)\text{”} = \text{“}\left(\dfrac{+}{0^-}\right)\text{”} = -\infty$ si $c > 0$;
- $\text{“}\left(\dfrac{c}{0^+}\right)\text{”} = \text{“}\left(\dfrac{-}{0^+}\right)\text{”} = -\infty$ si $c < 0$;
- $\text{“}\left(\dfrac{c}{0^-}\right)\text{”} = \text{“}\left(\dfrac{-}{0^-}\right)\text{”} = +\infty$ si $c < 0$.

Ejemplo 3.4.3 *Calcular* $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x}$ & $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}$.

▼

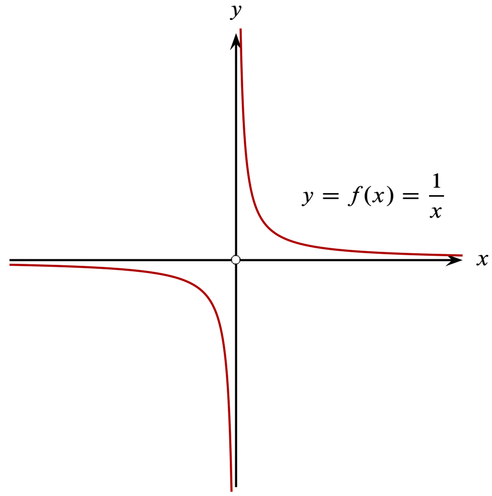
1. Si $x \to 0^-$, entonces $x < 0$ & $\dfrac{1}{x} < 0$.

   Como $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} x = 0$ & $x < 0$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

2. Si $x \to 0^+$, entonces $x > 0$ & $\dfrac{1}{x} > 0$.

   Como $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x = 0$ & $x > 0$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Recordemos que la gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$ es una hipérbola equilátera.



□

Ejemplo 3.4.4 *Calcular* $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{-2}{x-1}$ & $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{-2}{x-1}$.

▼

1. Si $x \to 1^-$, entonces $x < 1$ por lo que $x - 1 < 0$ & $\dfrac{-2}{x-1} > 0$.

   Como $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} (x-1) = 0$ & $x - 1 < 0$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{-2}{x-1} = +\infty$.

2. Si $x \to 1^+$, entonces $x > 1$ por lo cual $x - 1 > 0$ & $\dfrac{-2}{x-1} < 0$.

   Como $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} (x-1) = 0$ & $x - 1 > 0$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{-2}{x-1} = -\infty$.

Como consecuencia, no existe $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{-2}{x-1}$. No es $+\infty$ ni $-\infty$.

□

Ejemplo 3.4.5 *Dada la función* $f(x) = \dfrac{3}{x^2-4}$, *calcular:*

$$\lim_{x\to -2^-} f(x), \quad \lim_{x\to -2^+} f(x), \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) \quad \& \quad \lim_{x\to 2^+} f(x).$$

▼ Notamos que

$$x^2 - 4 < 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 < 4 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x^2} < \sqrt{2^2} \;\Leftrightarrow\; |\,x\,| < 2 \;\Leftrightarrow\; -2 < x < 2\,;$$

De igual forma:

$$x^2 - 4 > 0 \;\Leftrightarrow\; \ldots \;\Leftrightarrow\; |\,x\,| > 2 \;\Leftrightarrow\; x < -2 \text{ o bien } x > 2\,.$$

Por lo tanto:

1. Si $x \to -2^-$, entonces $x < -2$ por lo que $x^2 - 4 > 0$.

   Como $\displaystyle\lim_{x\to -2^-}(x^2-4) = 0$ & $x^2 - 4 > 0$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to -2^-}\frac{3}{x^2-4} = +\infty$.

2. Si $x \to -2^+$, entonces $|\,x\,| < 2$ por lo que $x^2 - 4 < 0$.

   Como $\displaystyle\lim_{x\to -2^+}(x^2-4) = 0$ & $x^2 - 4 < 0$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to -2^+}\frac{3}{x^2-4} = -\infty$.

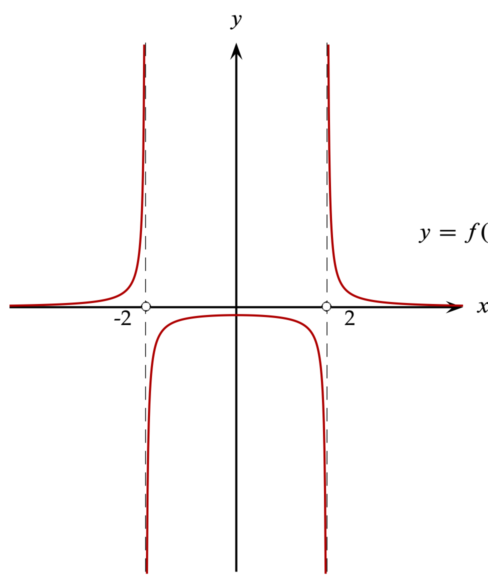
3. Si $x \to 2^-$, entonces $|\,x\,| < 2$ por lo cual $x^2 - 4 < 0$.

   Como $\displaystyle\lim_{x\to 2^-}(x^2-4) = 0$ & $x^2 - 4 < 0$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to 2^-}\frac{3}{x^2-4} = -\infty$.

4. Si $x \to 2^+$, entonces $x > 2$ por lo cual $x^2 > 4 \;\Rightarrow\; x^2 - 4 > 0$.

   Como $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}(x^2-4) = 0$ & $x^2 - 4 > 0$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}\frac{3}{x^2-4} = +\infty$.

Los resultados 1., 4., 2., 3. son consistentes con el hecho de que la función es par.



□

En general tenemos:

- Si $\displaystyle\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, $g(x) > 0$ & $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha \neq 0$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ si $\alpha > 0$.

$$\text{“}\left(\frac{+}{0^+}\right)\text{”} = +\infty\,.$$

- Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, $g(x) > 0$ & $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \alpha \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ si $\alpha < 0$.

$$“\left(\frac{-}{0^+}\right)” = -\infty\,.$$

- Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, $g(x) < 0$ & $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \alpha \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ si $\alpha > 0$.

$$“\left(\frac{+}{0^-}\right)” = -\infty\,.$$

- Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, $g(x) < 0$ & $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \alpha \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ si $\alpha < 0$.

$$“\left(\frac{-}{0^-}\right)” = +\infty\,.$$

Ejemplo 3.4.6 *Calcular* $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x-3}{x-1}$ & $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x-3}{x-1}$.

▼ Notamos que $\lim\limits_{x\to 1^-}(x-3) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x-3) = \lim\limits_{x\to 1}(x-3) = 1-3 = -2$.

1. Si $x \to 1^-$, entonces $x < 1$ por lo cual $x - 1 < 0$.

   Como $\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1) = 0$, $x-1<0$ & $\lim\limits_{x\to 1^-}(x-3) = -2 < 0$, entonces $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x-3}{x-1} = +\infty$.

2. Si $x \to 1^+$, entonces $x > 1$ por lo que $x - 1 > 0$.

   Como $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1) = 0$, $x-1>0$ & $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-3) = -2 < 0$ entonces, $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x-3}{x-1} = -\infty$;

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-3}{x-1}$ no diverge a $+\infty$ ni a $-\infty$.

□

Ejemplo 3.4.7 *Calcular* $\lim\limits_{x\to -2^-} \frac{x^2+2}{x^3+8}$ & $\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{x^2+2}{x^3+8}$.

▼ Recordemos el comportamiento creciente de la función $y = x^3$.
Notemos además que

$$\lim_{x\to -2^-}(x^2+2) = \lim_{x\to -2^+}(x^2+2) = \lim_{x\to -2}(x^2+2) = (-2)^2 + 2 = 4 + 2 = 6\,.$$

1. Si $x \to -2^-$, entonces $x < -2$ por lo cual $x^3 < (-2)^3 \Rightarrow x^3 < -8 \Rightarrow x^3 + 8 < 0$.

   Como $\lim\limits_{x\to -2^-}(x^3+8) = 0$, $x^3+8<0$ & $\lim\limits_{x\to -2^-}(x^2+2) = 6 > 0$, entonces $\lim\limits_{x\to -2^-} \frac{x^2+2}{x^3+8} = -\infty$.

2. Si $x \to -2^+$, entonces $x > -2$ por lo que $x^3 > (-2)^3 \Rightarrow x^3 > -8 \Rightarrow x^3 + 8 > 0$.

   Como $\lim\limits_{x\to -2^+}(x^3+8) = 0$, $x^3+8>0$ & $\lim\limits_{x\to -2^+}(x^2+2) = 6 > 0$, entonces $\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{x^2+2}{x^3+8} = +\infty$.

$\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^2+2}{x^3+8}$ no diverge a $+\infty$ ni a $-\infty$.

□

Algunas afirmaciones interesantes que podemos hacer con límites infinitos son las siguientes:

Si $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ y si $\displaystyle\lim_{x\to x_0} g(x) = \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

- $\displaystyle\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = +\infty$.
- $\displaystyle\lim_{x\to x_0} [g(x) \pm f(x)] = \pm\infty$.
- $\displaystyle\lim_{x\to x_0} [f(x) \times g(x)] = +\infty$ si $\alpha > 0$.
- $\displaystyle\lim_{x\to x_0} [f(x) \times g(x)] = -\infty$ si $\alpha < 0$.
- $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ si $\alpha > 0$.
- $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ si $\alpha < 0$.
- $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0^+$ si $\alpha > 0$.
- $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0^-$ si $\alpha < 0$.

Hacemos notar que:

- $\displaystyle\lim_{x\to x_0} h(x) = 0^+$ quiere decir que $\displaystyle\lim_{x\to x_0} h(x) = 0$ y que $h(x) > 0$ cerca de x_0.
- $\displaystyle\lim_{x\to x_0} h(x) = 0^-$ quiere decir que $\displaystyle\lim_{x\to x_0} h(x) = 0$ y que $h(x) < 0$ cerca de x_0.

Resultados análogos se obtienen cuando $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ y todos siguen siendo válidos si en lugar de x_0 ponemos x_0^- o bien x_0^+.

Ejemplo 3.4.8 *Dadas las funciones* $f(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$ & $g(x) = \dfrac{1-x^2}{x-1}$, *obtener*

1. $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} [f(x) - g(x)]$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} [f(x) \times g(x)]$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)}$.
4. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{g(x)}{f(x)}$.
5. $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} [g(x) - f(x)]$.
6. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} [g(x) - f(x)]$.

▼ Sabemos que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ & $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$.

Además:

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)(1+x)}{-(1-x)} = \lim_{x\to 1}[-(1+x)] = -2$$

por lo cual $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = -2$.

1. Ya que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ & $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = -2$, entonces $\lim\limits_{x\to 1^-} [f(x) - g(x)] = +\infty$.
2. Ya que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ & $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = -2$, entonces $\lim\limits_{x\to 1^+} [f(x) \times g(x)] = +\infty$.
3. Ya que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ & $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = -2$, entonces $\lim\limits_{x\to 1^-} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = -\infty$.
4. Ya que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ & $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = -2$, entonces $\lim\limits_{x\to 1^+} \left[\dfrac{g(x)}{f(x)}\right] = 0^+$.
5. Ya que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ & $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = -2$, entonces $\lim\limits_{x\to 1^-} [g(x) - f(x)] = -\infty$.
6. Ya que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ & $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = -2$, entonces $\lim\limits_{x\to 1^+} [g(x) - f(x)] = +\infty$.

□

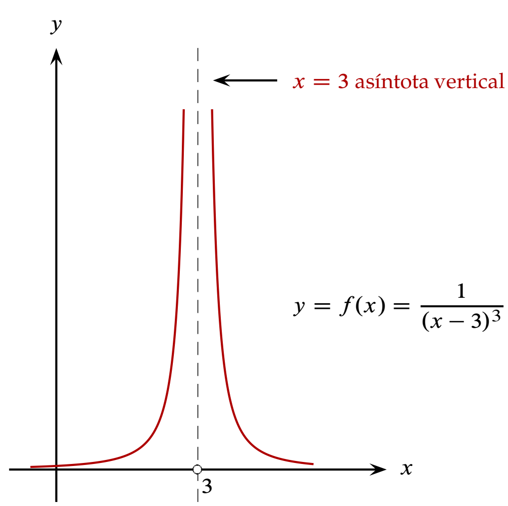
- La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la función f o bien de la curva $y = f(x)$ si ocurre al menos una de las condiciones siguientes

  $$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty\,.$$

  Nota. Determinar las asíntotas verticales de una función resulta de mucha utilidad para realizar el bosquejo de la gráfica de una función.

Ejemplo 3.4.9 *Sea la función* $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$.

▼ Sabemos que $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$. Por lo tanto la recta $x = 3$ es una asíntota vertical de la función $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$.

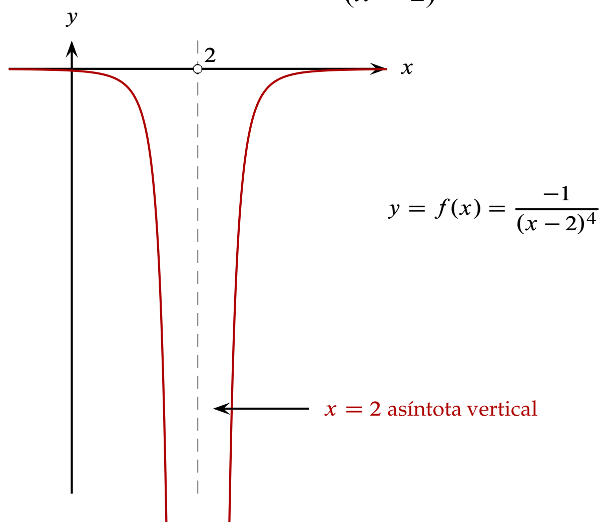


□

Ejemplo 3.4.10 *Sea la función* $f(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^4}$.

▼ Sabemos que $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty = \lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

Luego la recta $x = 2$ es una asíntota verical de la curva $y = \dfrac{-1}{(x-2)^4}$.

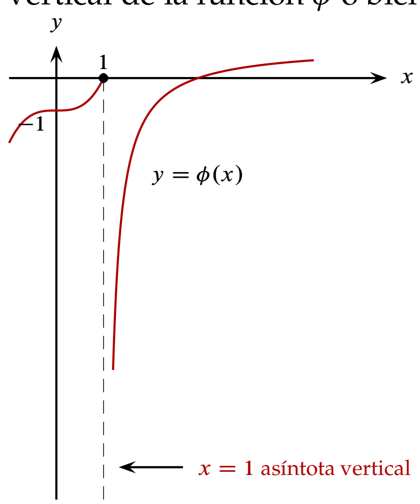


□

Ejemplo 3.4.11 *Sea la función* $\phi(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & \textit{si } x \le 1\,; \\ \dfrac{x-3}{x-1} & \textit{si } x > 1\,. \end{cases}$

▼ Se tiene que $\lim\limits_{x\to 1^+} \phi(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-3}{x-1} = -\infty$.

Luego la recta $x = 1$ es una asíntota vertical de la función ϕ o bien de la curva $y = \phi(x)$.



Nótese que

$$\lim_{x\to 1^-} \phi(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^3 - 1) = 0\,.$$

□

Ejercicios 3.4.1 *Soluciones en la página 13*

I. Calcular los límites siguientes:

1. Para $f(x) = \dfrac{1}{x}$, calcular:

   a. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, b. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, c. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2. Para $f(x) = \dfrac{-3}{x+2}$, calcular:

   a. $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$, b. $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$, c. $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.

3. Para $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$, calcular:

   a. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, b. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, c. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

4. Para $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-1}$, calcular:

   a. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$,
   b. $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$,
   c. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$,
   d. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

5. Para $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{|\,x\,|}$, calcular:

   a. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, b. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, c. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

6. Para $f(x) = \dfrac{-5x}{(x^2-4)^2}$, calcular:

   a. $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$,
   b. $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$,
   c. $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$,
   d. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$,
   e. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$,
   f. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

7. De acuerdo con la teoría de la relatividad, la masa m de un objeto que viaja a una velocidad v, está dada por

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}},$$

   donde m_0 es la masa del objeto en reposo y c es la velocidad de la luz.

   a. Explicar qué ocurre cuando v se acerca a la velocidad de la luz.

b. Explicar por qué sólo tiene sentido calcular $\lim\limits_{v \to c^-} m$.

8. Calcular: $\lim\limits_{s \to 2^+} \left(\dfrac{1}{s-2} - \dfrac{3}{s^2-4} \right)$.

9. Calcular: $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{3x^2}{x^2-1}$.

10. Calcular: $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{-x^2}{4-x^2}$.

Ejercicios 3.4.1 *Límites infinitos, página 11*

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty;$

   $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty;$

   $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ no diverge ni a $+\infty$ ni a $-\infty$.

2. $\displaystyle\lim_{x\to -2^-}\frac{-3}{x+2}=+\infty;$

   $\displaystyle\lim_{x\to -2^+}\frac{-3}{x+2}=-\infty;$

   $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{-3}{x+2}$ no diverge ni a $+\infty$ ni a $-\infty$.

3. $\displaystyle\lim_{x\to 2^-}\frac{x-1}{x-2}=-\infty;$

   $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}\frac{x-1}{x-2}=+\infty;$

   $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x-2}=\pm\infty\,.$

4. $\displaystyle\lim_{x\to -1^-}f(x)=-\infty;$

   $\displaystyle\lim_{x\to -1^+}f(x)=+\infty;$

   $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}f(x)=-\infty;$

   $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}f(x)=+\infty\,.$

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}f(x)=0;$

   $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}f(x)=+\infty;$

   $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)$ no existe.

6. $\displaystyle\lim_{x\to -2^-}f(x)=+\infty;$

   $\displaystyle\lim_{x\to -2^+}f(x)=+\infty;$

   $\displaystyle\lim_{x\to -2}f(x)=+\infty;$

   $\displaystyle\lim_{x\to 2^-}f(x)=-\infty;$

   $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}f(x)=-\infty;$

   $\displaystyle\lim_{x\to 2}f(x)=-\infty.$

7. a. $\displaystyle\lim_{v\to c^-}m=\lim_{v\to c^-}\frac{cm_0}{\sqrt{c^2-v^2}}=+\infty;$

   b. puesto que $v<c$.

8. $\displaystyle\lim_{s\to 2^+}\left(\frac{1}{s-2}-\frac{3}{s^2-4}\right)=+\infty\,.$

9. $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{3x^2}{x^2-1}\right)=-\infty\,.$

10. $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{-x^2}{4-x^2}\right)=+\infty\,.$