CAPÍTULO

3

Límite de una función

[1]

3.6 Apéndice

3.6.1 Criterio ϵ–δ para límite de una función

- La definición rigurosa de $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ con el criterio "ϵ–δ" es la siguiente:

  $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ si dado un $\epsilon > 0$ arbitrario existe un $\delta > 0$ tal que:

  $$|\, f(x) - \alpha \,| < \epsilon \text{ si } 0 < |\, x - x_0 \,| < \delta\,.$$

  Esto es, la distancia de $f(x)$ a α es menor que cualquier número positivo ϵ si $x \neq x_0$ dista de x_0 menos que un cierto número positivo δ.

  Recordemos que:

  $$\begin{aligned} |\, f(x) - \alpha \,| < \epsilon \;&\Leftrightarrow\; -\epsilon < f(x) - \alpha < \epsilon \;\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; -\epsilon + \alpha < f(x) < \alpha + \epsilon \;\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; f(x) \in (\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)\;. \end{aligned}$$

  Y que de la misma manera

  $$\begin{aligned} 0 < |\, x - x_0 \,| < \delta \;&\Leftrightarrow\; -\delta < x - x_0 < \delta, \quad x \neq x_0 \;\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \quad x \neq x_0 \;\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}\,. \end{aligned}$$

  Entonces $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ significa que, dado cualquier intervalo abierto con centro en α, existe un intervalo abierto con centro en x_0 tal que a todos sus puntos x (con excepción posiblemente de x_0) f les hace corresponder puntos $f(x)$ del intervalo con centro en α.

[1] canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

Ejemplo 3.6.1 *Dada la función* $f(x) = \dfrac{3x^2 - 7x + 2}{x - 2}$, *usar el criterio* ϵ–δ *para demostrar que* $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$.

▼ Debemos demostrar que dado un número $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que $|\, f(x) - 5\,| < \epsilon$ siempre que $0 < |\, x - 2\,| < \delta$.
Supongamos entonces que se da un $\epsilon > 0$.
Puesto que $3x^2 - 7x + 2 = (x - 2)(3x - 1)$ y que para $x \neq 2$:

$$|\, f(x) - 5\,| = \left| \frac{3x^2 - 7x + 2}{x - 2} - 5 \right| = \left| \frac{(x - 2)(3x - 1)}{x - 2} - 5 \right| = |\,(3x - 1) - 5\,| =$$
$$= |\,3x - 6\,| = |\,3(x - 2)\,| = |\,3\,|\,|\,x - 2\,| = 3\,|\,x - 2\,|\,,$$

entonces

$$|\, f(x) - 5\,| < \epsilon \;\Leftrightarrow\; 3\,|\,x - 2\,| < \epsilon \;\Leftrightarrow\; |\,x - 2\,| < \frac{\epsilon}{3}\,.$$

Notemos aquí que, considerando al número conocido $\dfrac{\epsilon}{3}$ como el número δ cuya existencia hemos demostratrado (es decir $\dfrac{\epsilon}{3} = \delta$), podemos afirmar que $|\, f(x) - 5\,| < \epsilon$ siempre que $0 < |\,x - 2\,| < \delta = \dfrac{\epsilon}{3}$.
Esto nos indica que, dado un número $\epsilon > 0$, no importando cuan pequeño sea, podemos encontrar un número $\delta > 0$ que permite afirmar que $|\, f(x) - 5\,| < \epsilon$ siempre que $0 < |\,x - 2\,| < \delta$.
Ilustramos un poco más:

1. Dado $\epsilon = 0.03$, se tiene $\delta = \dfrac{\epsilon}{3} = \dfrac{0.03}{3} = 0.01$ y se puede afirmar que

$$\begin{array}{lll}
|\, f(x) - 5\,| < 0.03 & \text{siempre que} & 0 < |\,x - 2\,| < 0.01, \text{ o sea,} \\
-0.03 < f(x) - 5 < 0.03 & \text{siempre que} & -0.01 < x - 2 < 0.01,\ x \neq 2, \text{ esto es,} \\
5 - 0.03 < f(x) < 5 + 0.03 & \text{siempre que} & 2 - 0.01 < x < 2 + 0.01,\ x \neq 2, \text{ es decir,} \\
4.97 < f(x) < 5.03 & \text{siempre que} & 1.99 < x < 2.01.
\end{array}$$

   Efectivamente si, por ejemplo, $x = 2.001$, $f(x) = 5.003$ con $4.97 < 5.003 < 5.03$.

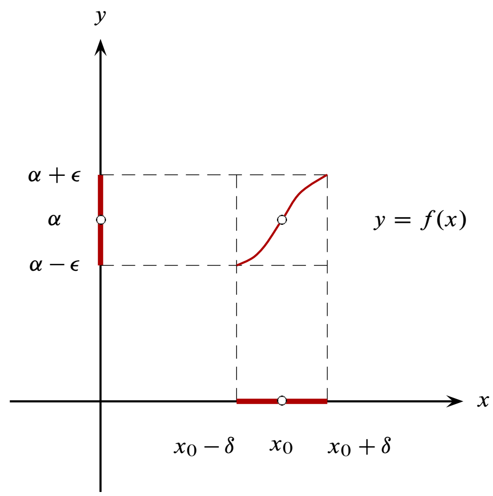
2. Dado $\epsilon = 0.0003$, se tiene que $\delta = \dfrac{\epsilon}{3} = 0.0001$ y se puede afirmar que

$$\begin{array}{ll}
|\, f(x) - 5\,| < 0.0003 & \text{siempre que } 0 < |\,x - 2\,| < 0.0001, \text{ o sea,} \\
-0.0003 < f(x) - 5 < 0.0003 & \text{siempre que } -0.0001 < x - 2 < 0.0001, \text{ esto es,} \\
5 - 0.0003 < f(x) < 5 + 0.0003 & \text{siempre que } 2 - 0.0001 < x < 2 + 0.0001, \text{ es decir,} \\
4.9997 < f(x) < 5.0003 & \text{siempre que } 1.9999 < x < 2.0001,\ x \neq 2.
\end{array}$$

Si $x = 2.00001 \Rightarrow f(x) = 5.00003$ que cumple con $4.9997 < 5.00003 < 5.0003$.

□

- Y ahora, gráficamente, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ significa que dada cualquier faja horizontal determinada por las rectas $y = \alpha - \epsilon$ & $y = \alpha + \epsilon$, existe un intervalo con centro en x_0 : $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tal que la gráfica de $f(x)$ entre las rectas $x = x_0 - \delta$ & $x = x_0 + \delta$ con excepción, posiblemente, de $[x_0, f(x_0)]$ está en esa misma franja horizontal.

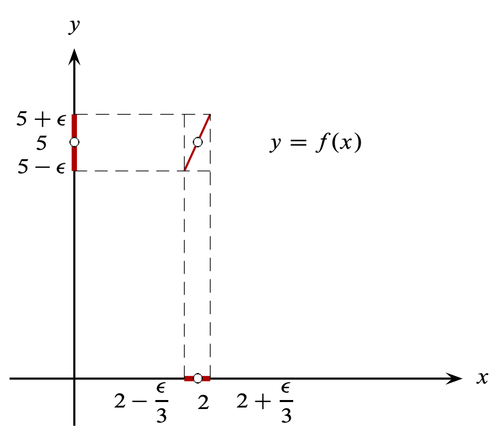


Ejemplo 3.6.2 *Dada la función* $f(x) = \dfrac{3x^2 - 7x + 2}{x - 2}$*, ilustrar gráficamente la afirmación* $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$.

▼ Como vimos en el ejemplo 3.6.1 anterior, dado un número $\epsilon > 0$ podemos encontrar un número $\delta > 0$ (a saber $\delta = \dfrac{\epsilon}{3}$) tal que

$$
\begin{array}{lll}
|f(x) - 5| < \epsilon & \text{siempre que} & 0 < |x - 2| < \delta, \text{ o sea,} \\
-\epsilon < f(x) - 5 < \epsilon & \text{siempre que} & -\delta < x - 2 < \delta, \quad x \neq 2, \text{ es decir,} \\
5 - \epsilon < f(x) < 5 + \epsilon & \text{siempre que} & 2 - \delta < x < 2 + \delta, \quad x \neq 2, \text{ esto es,} \\
5 - \epsilon < f(x) < 5 + \epsilon & \text{siempre que} & 2 - \dfrac{\epsilon}{3} < x < 2 + \dfrac{\epsilon}{3}.
\end{array}
$$

Lo que gráficamente vemos así



□

3.6.2 Algo más sobre límites infinitos

Las definiciones rigurosas de límites infinitos en un punto son las siguientes:

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ si dado un número $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > M$ si $|x - x_0| < \delta$, con $x \neq x_0$.
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ si dado un número $N < 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < N$ si $|x - x_0| < \delta$, con $x \neq x_0$.

Ejemplo 3.6.3 *Dada la función* $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$*, demostrar que* $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = +\infty$.

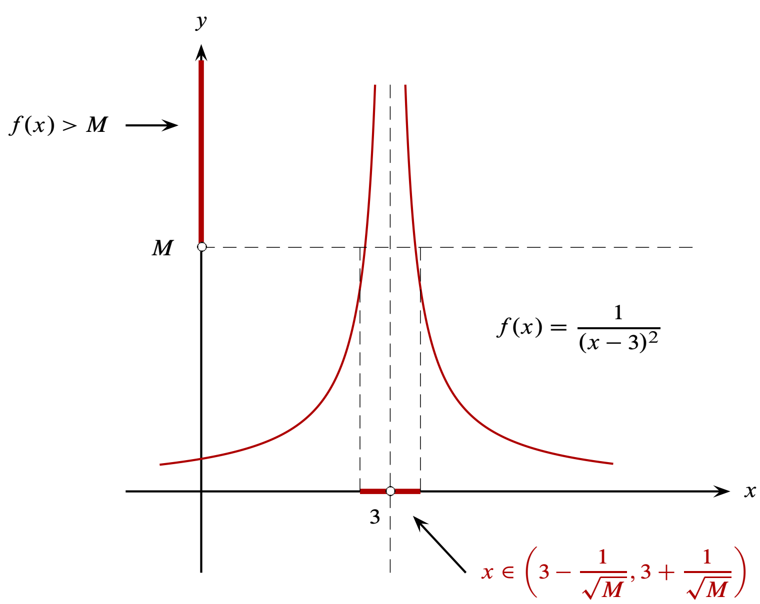
▼ Aquí debemos demostrar que, si damos un número $M > 0$ arbitrario (no importando su valor), podemos encontrar un número $\delta > 0$ tal que las imágenes $f(x)$ cumplan que $f(x) > M$ cuando x se encuentre en el intervalo $(3 - \delta, 3 + \delta) - \{3\}$.
Es decir, debemos demostrar que dado un $M > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\frac{1}{(x-3)^2} > M \text{ siempre que } x \in (3 - \delta, 3 + \delta) - \{3\}\,.$$

En efecto suponiendo que $x \neq 3$:

$$\begin{aligned} f(x) > M \;&\Leftrightarrow\; \frac{1}{(x-3)^2} > M \;\Leftrightarrow\; 1 > M(x-3)^2 \;\Leftrightarrow\; (x-3)^2 < \frac{1}{M} \;\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow\; \sqrt{(x-3)^2} < \sqrt{\frac{1}{M}} \;\Leftrightarrow\; |x-3| < \frac{1}{\sqrt{M}} \;\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow\; -\frac{1}{\sqrt{M}} < x - 3 < \frac{1}{\sqrt{M}} \;\Leftrightarrow\; 3 - \frac{1}{\sqrt{M}} < x < 3 + \frac{1}{\sqrt{M}}\,. \end{aligned}$$

Si decidimos tomar $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{M}}$, podemos afirmar que $f(x) > M$ siempre que $3 - \delta < x < 3 + \delta$, con $x \neq 3$.
Hemos demostrado pues la existencia de un número $\delta > 0$ para cada número dado $M > 0$. Gráficamente se ve así:



$\square$

Comentario adicional. Ilustremos la relación entre el $M > 0$ dado y el $\delta > 0$ encontrado ($\delta = \dfrac{1}{\sqrt{M}}$):

1. $M = 10^4 \;\Rightarrow\; \sqrt{M} = 10^2 \;\Rightarrow\; \delta = \dfrac{1}{\sqrt{M}} = \dfrac{1}{10^2} = 10^{-2} = 0.01.$

   Luego, $f(x) > 10^4$ siempre que $x \in (3 - 0.01, 3 + 0.01) - \{3\}$. Esto es, $f(x) > 10^4$ siempre que $2.99 < x < 3.01$, con $x \neq 3$.

2. $M = 10^6 \;\Rightarrow\; \sqrt{M} = 10^3 \;\Rightarrow\; \delta = \dfrac{1}{\sqrt{M}} = \dfrac{1}{10^3} = 10^{-3} = 0.001.$

   Luego, $f(x) > 10^6$ siempre que $x \in (3 - 0.001, 3 + 0.001) - \{3\}$. Esto es, $f(x) > 10^6$ siempre que $2.999 < x < 3.001$, con $x \neq 3$.

3. $M = 10^{12} \;\Rightarrow\; \sqrt{M} = 10^6 \;\Rightarrow\; \delta = \dfrac{1}{\sqrt{M}} = \dfrac{1}{10^6} = 10^{-6} = 0.000001.$

   Luego, $f(x) > 10^{12}$ siempre que $x \in (3 - 0.000001, 3 + 0.000001) - \{3\}$. Esto es, $f(x) > 10^{12}$ siempre que $2.999999 < x < 3.000001$, con $x \neq 3$.

Claramente a medida que M es mayor hay que tomar un δ menor.

Ejemplo 3.6.4 *Dada* $f(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^4}$, *demostrar que* $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\infty$.

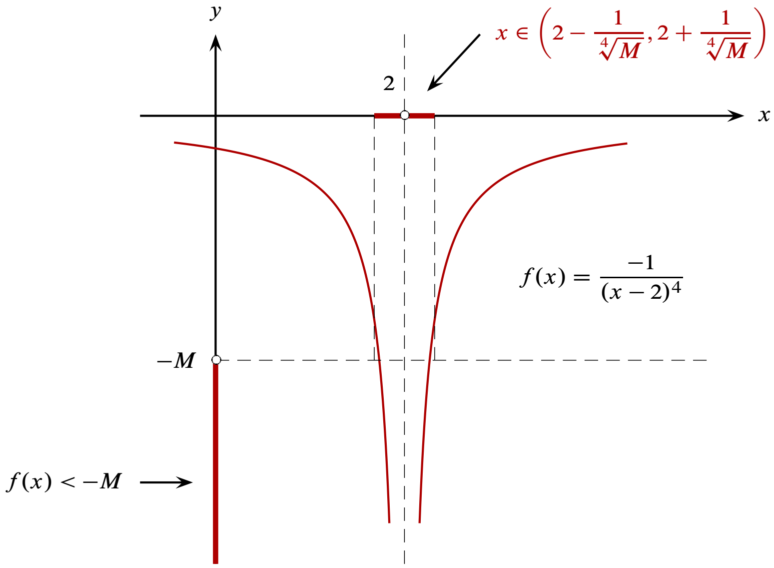
▼ Aquí debemos demostrar que, si damos un número $M > 0$ arbitrario (no importando su valor), podemos encontrar un número $\delta > 0$ tal que $f(x) < -M$ cuando $x \in (2 - \delta, 2 + \delta) - \{2\}$.
Es decir, debemos demostrar que dado un $M > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\frac{-1}{(x-2)^4} < -M \text{ siempre que } x \in (2 - \delta, 2 + \delta) - \{2\}\,.$$

En efecto suponiendo que $x \neq 2$:

$$\begin{aligned}
f(x) < -M \;&\Leftrightarrow\; \frac{-1}{(x-2)^4} < -M \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{(x-2)^4} > M \;\Leftrightarrow\; 1 > M(x-2)^4 \;\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\; (x-2)^4 < \frac{1}{M} \;\Leftrightarrow\; \sqrt[4]{(x-2)^4} < \sqrt[4]{\frac{1}{M}} \;\Leftrightarrow\; |\,x-2\,| < \frac{1}{\sqrt[4]{M}} \;\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\; -\frac{1}{\sqrt[4]{M}} < x - 2 < \frac{1}{\sqrt[4]{M}} \;\Leftrightarrow\; 2 - \frac{1}{\sqrt[4]{M}} < x < 2 + \frac{1}{\sqrt[4]{M}}\,.
\end{aligned}$$

Si aquí decidimos tomar $\delta = \dfrac{1}{\sqrt[4]{M}}$, podemos afirmar que $f(x) < -M$ siempre que $2 - \delta < x < 2 + \delta$, con $x \neq 2$.
Hemos demostrado pues la existencia de un número $\delta > 0$ para cada número $M > 0$ dado.
Gráficamente se ve así:



Comentario adicional. Ilustremos la relación entre el $M > 0$ dado y el $\delta > 0$ encontrado $\left(\delta = \frac{1}{\sqrt[4]{M}}\right)$:

1. $M = 10^8 \Rightarrow \sqrt[4]{M} = 10^2 \Rightarrow \delta = \frac{1}{\sqrt[4]{M}} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2} = 0.01.$

   Luego, $f(x) < -10^8$ siempre que $x \in (2 - 0.01, 2 + 0.01) - \{2\}$.

   Es decir, $f(x) < -10^8$ siempre que $1.99 < x < 2.01$, con $x \neq 2$.

2. $M = 10^{12} \Rightarrow \sqrt[4]{M} = 10^3 \Rightarrow \delta = \frac{1}{\sqrt[4]{M}} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3} = 0.001.$

   Luego, $f(x) < -10^{12}$ siempre que $x \in (2 - 0.001, 2 + 0.001) - \{2\}$.

   Es decir, $f(x) < -10^{12}$ siempre que $1.999 < x < 2.001$, con $x \neq 2$.

3. $M = 10^{20} \Rightarrow \sqrt[4]{M} = 10^5 \Rightarrow \delta = \frac{1}{\sqrt[4]{M}} = \frac{1}{10^5} = 10^{-5} = 0.00001.$

   Luego, $f(x) < -10^{20}$ siempre que $x \in (2 - 0.00001, 2 + 0.00001) - \{2\}$.

   Esto es, $f(x) < -10^{20}$ siempre que $1.99999 < x < 2.00001$, con $x \neq 2$.

Observamos que a medida que $-M$ decrece también lo hace δ (y M crece).

□