CAPÍTULO

3

Límite de una función

[1]

3.2 Álgebra de límites

Es bastante claro intuitivamente lo siguiente:

Si existen $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ entonces:

- $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
- $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
- $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\times g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \times \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
- $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)/g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)/\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

Esto es, que si $f(x)$ y también $g(x)$ están tan cerca de α y β, respectivamente, como queramos para valores de x próximos a x_0, entonces:

$f(x)+g(x)$	está tan próximo a	$\alpha+\beta$	como queramos con tal de que x esté suficientemente próximo a x_0 ;
$f(x)-g(x)$	"	$\alpha-\beta$	idem.
$f(x)\times g(x)$	"	$\alpha\times\beta$	idem.
$f(x)/g(x)$	"	α/β	idem.

Este hecho se puede extender para sumas y productos de más de dos funciones.
En el caso del cociente β tiene que ser $\neq 0$. Si $\beta = 0$, la afirmación no tiene sentido.

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

Ejemplo 3.2.1 *Considerando que*

$$\lim_{x\to -3} f(x) = 4, \quad \lim_{x\to -3} g(x) = -2 \quad \& \quad \lim_{x\to -3} h(x) = 0,$$

calcular los límites que existan de la siguiente lista. Si el límite no existe argumentar por qué.

1. $\displaystyle\lim_{x\to -3}[f(x) + g(x)]$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to -3}\frac{f(x)}{g(x)}$;
3. $\displaystyle\lim_{x\to -3}[g(x)h(x)]$;
4. $\displaystyle\lim_{x\to -3}\frac{g(x)}{h(x)}$;
5. $\displaystyle\lim_{x\to -3}\frac{h(x)}{g(x) - f(x)}$.

▼

1. $\displaystyle\lim_{x\to -3}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to -3} f(x) + \lim_{x\to -3} g(x) = 4 + (-2) = 4 - 2 = 2.$

2. $\displaystyle\lim_{x\to -3}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to -3} f(x)}{\displaystyle\lim_{x\to -3} g(x)} = \frac{4}{-2} = -2.$

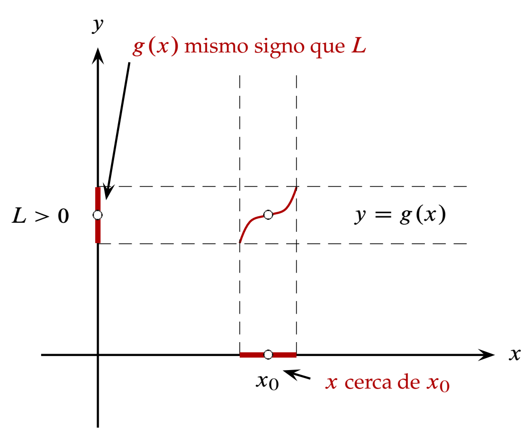
3. $\displaystyle\lim_{x\to -3}[g(x)h(x)] = [\lim_{x\to -3} g(x)][\lim_{x\to -3} h(x)] = (-2)(0) = 0.$

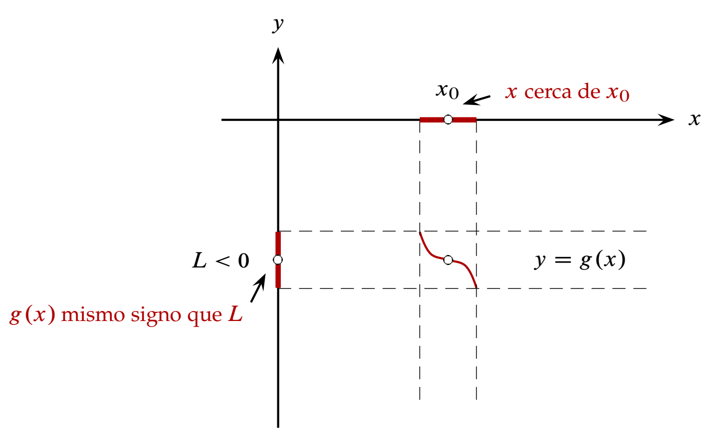
4. $\displaystyle\lim_{x\to -3}\frac{g(x)}{h(x)} = \text{“}\left(\frac{-2}{0}\right)\text{”} \notin \mathbb{R}\,.\ \lim_{x\to -3}\frac{g(x)}{h(x)}$ no existe como veremos más adelante.

5. $\displaystyle\lim_{x\to -3}\frac{h(x)}{g(x) - f(x)} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to -3} h(x)}{\displaystyle\lim_{x\to -3}[g(x) - f(x)]} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to -3} h(x)}{\displaystyle\lim_{x\to -3} g(x) - \lim_{x\to -3} f(x)} = \frac{0}{-2-4} = \frac{0}{-6} = 0.$

□

- Tambié es cierto que si $\displaystyle\lim_{x\to x_0} g(x) = L$ y $L \neq 0$, entonces “cerca" de x_0 las imágenes $g(x)$ tienen el mismo signo que L.





- Uno de los casos más simples en el calculo de límites es el de una función constante $f(x) = \gamma$ en el que para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \gamma = \gamma.$$

Ejemplo 3.2.2 *Tenemos que:*

▼

1. $\lim\limits_{x\to 4} 5 = 5$;
2. $\lim\limits_{x\to -7} 8 = 8$;
3. $\lim\limits_{x\to 3} -2 = -2$.

□

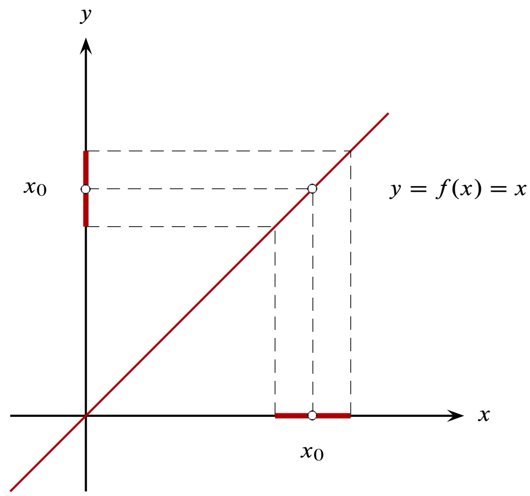
Entonces:

- $\lim\limits_{x\to x_0} [\beta \times f(x)] = \beta \times \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

  En particular de $\beta = -1$, tenemos $\lim\limits_{x\to x_0} [-f(x)] = -\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Otro caso muy simple es el de la función identidad $f(x) = x$; aquí evidentemente

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$.



Y en consecuencia:

- Si $g(x) = mx + n$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = mx_0 + n$ para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$.
- Si $h(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = x_0^n$, para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$.

Además:

- Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \alpha$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^n = \alpha^n$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Dos resultados muy importantes son:

- Si $f(x)$ es una función polinomial y además $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Si $f(x)$ es una función racional y además $x_0 \in D_f$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ejemplo 3.2.3 *Dada la función* $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x - 5$, *calcular los límites siguientes:*

1. $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$;
2. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$;
3. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$;
4. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$;
5. $\lim\limits_{x \to -\frac{3}{2}} f(x)$;
6. $\lim\limits_{x \to -\frac{2}{3}} f(x)$.

▼ Por ser f una función polinomial:

1. $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1) = 2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 4(-1) - 5 = -2 + 3 + 4 - 5 = 0.$
2. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 2(2)^3 + 3(2)^2 - 4(2) - 5 = 16 + 12 - 8 - 5 = 15.$
3. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 2(0)^3 + 3(0)^2 - 4(0) - 5 = 0 + 0 - 0 - 5 = -5.$
4. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right) - 5 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 2 - 5 = -6.$
5. $$\begin{aligned}\lim_{x \to -\frac{3}{2}} f(x) &= f\left(-\frac{3}{2}\right) = 2\left(-\frac{3}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{3}{2}\right) - 5 = \\ &= 2\left(-\frac{27}{8}\right) + 3\left(\frac{9}{4}\right) + 6 - 5 = \\ &= -\frac{27}{4} + \frac{27}{4} + 6 - 5 = 1.\end{aligned}$$
6. $$\begin{aligned}\lim_{x \to -\frac{2}{3}} f(x) &= f\left(-\frac{2}{3}\right) = 2\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 3\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{2}{3}\right) - 5 = \\ &= 2\left(-\frac{8}{27}\right) + 3\left(\frac{4}{9}\right) + \frac{8}{3} - 5 = -\frac{16}{27} + \frac{4}{3} + \frac{8}{3} - 5 = -\frac{16}{27} + 4 - 5 = -\frac{43}{27}.\end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.2.4 *Dada la función* $g(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{x^2 - 4}$, *calcular:*

1. $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$;
2. $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$;
3. $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$;
4. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} g(x)$;
5. $\lim\limits_{x \to -\frac{2}{3}} g(x)$;
6. $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} g(x)$.

▼ La función g es racional y su dominio es $D_g = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.
Por estar los números $0, -1, 3, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}$ y $-\frac{1}{2}$ en el dominio de la función g:

1. $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0) = \dfrac{4(0)^2 - 1}{0^2 - 4} = \dfrac{-1}{-4} = \dfrac{1}{4}.$

2. $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = g(-1) = \dfrac{4(-1)^2 - 1}{(-1)^2 - 4} = \dfrac{4-1}{1-4} = \dfrac{3}{-3} = -1.$

3. $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = g(3) = \dfrac{4(3)^2 - 1}{(3)^2 - 4} = \dfrac{36-1}{9-4} = \dfrac{35}{5} = 7.$

4. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} g(x) = g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{4\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 4} = \dfrac{1-1}{\dfrac{1}{4} - 4} = \dfrac{0}{-\dfrac{15}{4}} = 0.$

5. $\lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}} g(x) = g\left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{4\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 - 1}{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 - 4} = \dfrac{\dfrac{16}{9} - 1}{\dfrac{4}{9} - 4} = \dfrac{\dfrac{7}{9}}{-\dfrac{32}{9}} = -\dfrac{7}{32}.$

6. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} g(x) = g\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{4\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 - 1}{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 - 4} = \dfrac{1-1}{\dfrac{1}{4} - 4} = \dfrac{0}{-\dfrac{15}{4}} = 0.$

De 4. y de 6. se desprende que $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} g(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} g(x)$, lo cual es consistente pues $g(x)$ es par.

□

Otro resultado también importante es

- Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ y si $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Este resultado usualmente se aplica de la siguiente forma:

- Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ y si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ no existe.

Ejemplo 3.2.5 *Dada la función* $f(x) = \dfrac{4x}{2x-1}$, *calcular* $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x)$.

▼ Notamos primero que $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(2x-1) = 2\left(\dfrac{1}{2}\right) - 1 = 1 - 1 = 0$ y luego que $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(4x) = 4\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2 \neq 0$.
Podemos afirmar entonces que $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$ no existe.

□

Próximamente diremos algo más del $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, cuando $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq 0$ al ver límites infinitos.

- Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ y si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ puede o no existir.

A este resultado algunos autores le llaman <u>indeterminación cero sobre cero</u>: "$\left(\dfrac{0}{0}\right)$".

Ejemplo 3.2.6 *Dada la función* $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4}$, *calcular* $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.

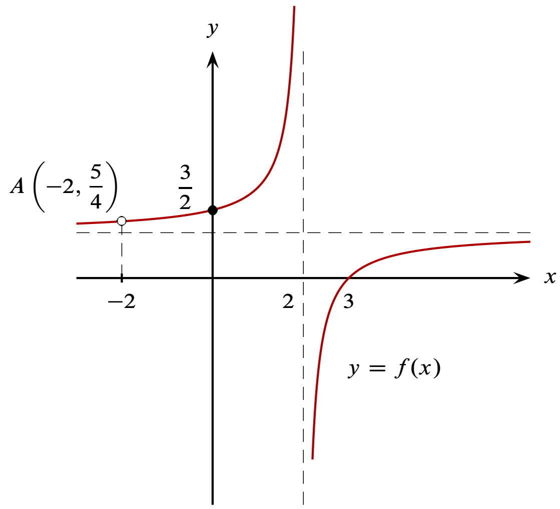
▼ Primero notamos que $\lim\limits_{x\to -2}(x^2 - 4) = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$.
Luego notamos que

$$\lim_{x\to -2}(x^2 - x - 6) = (-2)^2 - (-2) - 6 = 4 + 2 - 6 = 0.$$

Entonces, puede ser que exista $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.
Como $x = -2$ anula tanto a $x^2 - 4$ como a $x^2 - x - 6$, entonces $x - (-2) = x + 2$ es factor de ambos polinomios por el teorema del Residuo. Por lo tanto, después de factorizar,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2} f(x) &= \lim_{x\to -2}\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\to -2}\frac{x-3}{x-2} = \\ &= \frac{\lim\limits_{x\to -2}(x-3)}{\lim\limits_{x\to -2}(x-2)} = \frac{-2-3}{-2-2} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}.\end{aligned}$$

Pudimos cancelar el factor $x + 2$ en numerador y en denominador pues al calcular el límite hallamos que $x + 2 \neq 0$ al ser $x \neq -2$.
Comentario: puesto que $f(-2)$ no existe y que $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \dfrac{5}{4}$, entonces podemos visualizar que la gráfica de f tiene un orificio en el punto $A\left(-2, \dfrac{5}{4}\right)$.



□

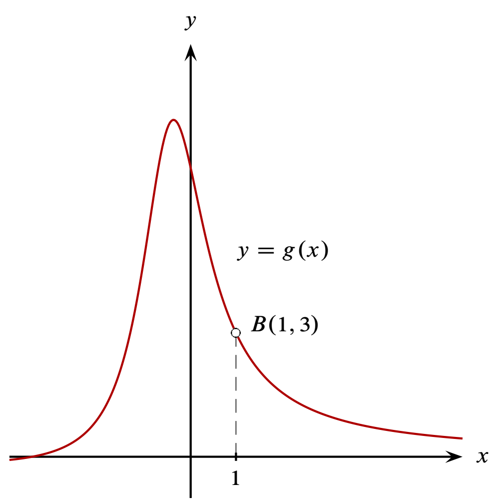
Ejemplo 3.2.7 *Dada la función* $g(x) = \dfrac{2x^2 + 5x - 7}{x^3 - 1}$, *calcular* $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$.

▼ Primero notamos que $\lim\limits_{x \to 1}(x^3 - 1) = 1^3 - 1 = 0$ y luego que $\lim\limits_{x \to 1}(2x^2 + 5x - 7) = 2 + 5 - 7 = 0$. Entonces puede ser que exista $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$.

Como $x = 1$ anula tanto a $2x^2 + 5x - 7$ como a $x^3 - 1$, entonces $x - 1$ es factor de ambos polinomios. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + 5x - 7}{x^3 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(2x+7)}{(x-1)(x^2+x+1)} =$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{2x + 7}{x^2 + x + 1} = \frac{\lim\limits_{x \to 1}(2x+7)}{\lim\limits_{x \to 1}(x^2+x+1)} = \frac{2+7}{1+1+1} = \frac{9}{3} = 3.$$

Comentario: como $g(1)$ no existe y $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 3$, entonces podemos concluir que la gráfica de g tiene un orificio en el punto $B(1, 3)$.



□

Ejemplo 3.2.8 *Dada* $h(x) = \dfrac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^3 + 27}$, *calcular* $\lim\limits_{x \to -3} h(x)$.

▼ Notamos primero que

$$\lim_{x\to -3}(x^3+27) = (-3)^3+27 = -27+27 = 0$$

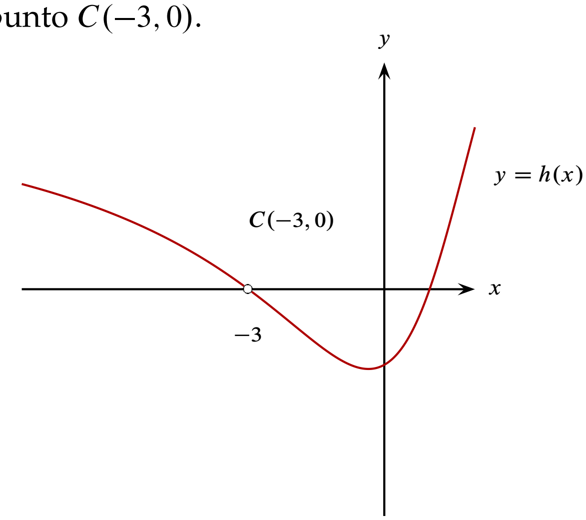
y luego que

$$\lim_{x\to -3}(x^3+5x^2+3x-9) = (-3)^3+5(-3)^2+3(-3)-9 = -27+45-9-9 = 0.$$

Puede suceder entonces que exista $\lim_{x\to -3} h(x)$.
Como $x=-3$ anula tanto al numerador como al denominador, entonces $x+3$ es factor de ambos polinomios. Recuérdese que, en cada caso, el otro factor se puede obtener dividiendo el polinomio entre el factor $x+3$.
Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -3} h(x) &= \lim_{x\to -3}\frac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+27} = \lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x^2+2x-3)}{(x+3)(x^2-3x+9)} = \\ &= \lim_{x\to -3}\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+9} = \frac{\lim\limits_{x\to -3}(x^2+2x-3)}{\lim\limits_{x\to -3}(x^2-3x+9)} = \frac{(-3)^2+2(-3)-3}{(-3)^2-3(-3)+9} = \\ &= \frac{9-6-3}{9+9+9} = \frac{0}{27} = 0.\end{aligned}$$

Comentario: ya que $h(-3)$ no existe y que $\lim_{x\to -3} h(x) = 0$, entonces se puede afirmar que la curva $y=h(x)$ tiene un orificio en el punto $C(-3,0)$.



□

Ejemplo 3.2.9 *Dada* $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1}$, *calcular* $\lim_{x\to -1} g(x)$.

▼ Notamos primero que

$$\lim_{x\to -1}(x^2+2x+1) = (-1)^2+2(-1)+1 = 1-2+1 = 0$$

y luego que

$$\lim_{x\to -1}(x^2-1) = (-1)^2-1 = 1-1 = 0.$$

Entonces puede ser que exista $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$.
Factorizando numerador y denominador:

$$\lim_{x\to -1} g(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x+1}.$$

Ahora notamos que

$$\lim_{x\to -1}(x+1) = -1+1 = 0$$

y que

$$\lim_{x\to -1}(x-1) = -1-1 = -2 \neq 0.$$

Entonces sucede que $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x-1}{x+1}$ no existe.
Por lo tanto $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$ no existe.

□

Ejemplo 3.2.10 *Calcular* $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3} \right)$.

▼ Ya que $\lim\limits_{x\to 1}(1-x) = 0$ y que $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^3) = 0$ y también que tanto $\lim\limits_{x\to 1} 1 = 1$ como $\lim\limits_{x\to 1} 3 = 3$ son distintos de cero, no podemos expresar el límite pedido como la diferencia de límites:

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} - \lim_{x\to 1} \frac{3}{1-x^3},$$

pues estos últimos no existen. Entonces, procedemos algebraicamente. Primero sumamos las fracciones y luego simplificamos.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} &= \frac{1}{1-x} - \frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)} = \\
&= \frac{(1+x+x^2)-3}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)} = \\
&= \frac{(x-1)(x+2)}{-(x-1)(1+x+x^2)} = \\
&= \frac{x+2}{-(1+x+x^2)} \text{ si } x-1 \neq 0, \text{ es decir, si } x \neq 1.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) &= \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{-(1+x+x^2)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 1}[-(1+x+x^2)]} = \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x+2)}{-\lim\limits_{x\to 1}(1+x+x^2)} = \frac{1+2}{-(1+1+1)} = \frac{3}{-3} = -1.
\end{aligned}$$

□

Otras reglas importantes para el cálculo de límites son las siguientes:

- $f(x) = \sqrt[n]{x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \sqrt[n]{x_0}$.

  Si n es par se requiere que $x_0 > 0$.

- $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = x^{\frac{m}{n}} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = x_0^{\frac{m}{n}}$.

  Si n es par se requiere que $x_0 > 0$.

- Si $n \in \mathbb{N}$ es impar o bien $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$ cuando $n \in \mathbb{N}$ sea par, entonces

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)}.$$

  Si n es par se requiere que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$.

- Si $f(x) \le h(x) \le g(x)$ para x en un intervalo abierto que contiene a x_0 y

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \alpha \Rightarrow \lim_{x\to x_0} h(x) = \alpha.$$

Ejemplo 3.2.11 *Dadas las funciones* $f(x) = \sqrt{x^3+1}$ & $g(x) = \sqrt[3]{4-3x^2}$*, calcular*

1. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$;
2. $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$;
3. $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$;
4. $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$;
5. $\lim\limits_{x\to 0}[f(x) - g(x)]$;
6. $\lim\limits_{x\to -3}[f(x)g(x)]$.

▼

1. $$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \sqrt{x^3+1} = \sqrt{\lim_{x\to 2}(x^3+1)} = \sqrt{(2)^3+1} = $$
$$= \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3.$$

2. $$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} \sqrt[3]{4-3x^2} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 2}(4-3x^2)} = \sqrt[3]{4-3(2)^2} = $$
$$= \sqrt[3]{4-12} = \sqrt[3]{-8} = -2.$$

3. Notamos primero que $\lim\limits_{x\to -2}(x^3+1) = (-2)^3 + 1 = -8 + 1 = -7 < 0$ y afirmamos luego que $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ no tiene sentido pues

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^3 + 1 \ge 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^3 \ge -1 \right\} = [-1, +\infty)$$

   y no contiene intervalos abiertos que contengan a -2.

4. $\displaystyle \lim_{x\to-1} g(x) = \lim_{x\to-1} \sqrt[3]{4-3x^2} = \sqrt[3]{\lim_{x\to-1}(4-3x^2)} =$
$\displaystyle = \sqrt[3]{4-3(-1)^2} = \sqrt[3]{4-3} = \sqrt[3]{1} = 1.$

5. $\displaystyle \lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \sqrt{x^3+1} = \sqrt{\lim_{x\to0}(x^3+1)} = \sqrt{0^3+1} = \sqrt{1} = 1.$

   Por otra parte

$$\lim_{x\to0} g(x) = \lim_{x\to0} \sqrt[3]{4-3x^2} = \sqrt[3]{\lim_{x\to0}(4-3x^2)} = \sqrt[3]{4-3(0)^2} = \sqrt[3]{4-0} = \sqrt[3]{4}.$$

   Luego

$$\lim_{x\to0}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to0} f(x) - \lim_{x\to0} g(x) = 1-\sqrt[3]{4}.$$

6. Observamos que

$$D_{f\cdot g} = D_f \cap D_g = [-1,+\infty)\cap\mathbb{R} = [-1,+\infty)$$

   y entonces calcular

$$\lim_{x\to-3} f(x)g(x)$$

   no tiene sentido puesto que la función $f\cdot g$ no está definida cerca de -3.

□

Ejemplo 3.2.12 *Calcular* $\displaystyle \lim_{x\to4}\frac{4-x}{2-\sqrt{x}}$.

▼ Notamos primero que $\lim_{x\to4}(2-\sqrt{x}) = 2-\sqrt{4} = 2-2 = 0$ y luego que $\lim_{x\to4}(4-x) = 4-4 = 0$. Observamos que podemos factorizar el numerador y entonces

$$\lim_{x\to4}\frac{4-x}{2-\sqrt{x}} = \lim_{x\to4}\left[\frac{2^2-(\sqrt{x})^2}{2-\sqrt{x}}\right] = \lim_{x\to4}\frac{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}{(2-\sqrt{x})} =$$
$$= \lim_{x\to4}(2+\sqrt{x}) = 2+\sqrt{4} = 2+2 = 4.$$

□

Ejemplo 3.2.13 *Calcular* $\displaystyle \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}}{x}$.

▼ Vemos primero que $\lim_{x\to0} x = 0$ y luego que $\lim_{x\to0}(\sqrt{3-x}-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-\sqrt{3} = 0$.
Usemos un artificio algebraico: racionalizamos al numerador para generar una diferencia de cuadrados (multiplicamos al numerador y al denominador por el "binomio conjugado" del numerador que

es $\neq 0$):

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}}{x}\,\frac{\sqrt{3-x}+\sqrt{3}}{\sqrt{3-x}+\sqrt{3}} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{3-x})^2-(\sqrt{3})^2}{x(\sqrt{3-x}+\sqrt{3})} = \lim_{x\to 0}\frac{(3-x)-3}{x(\sqrt{3-x}+\sqrt{3})} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-x}{x(\sqrt{3-x}+\sqrt{3})} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{3-x}+\sqrt{3}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}(-1)}{\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{3-x}+\sqrt{3})} = \\
&= \frac{-1}{\sqrt{3-0}+\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} = \frac{-1}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.2.14 *Calcular* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$.

▼ Notemos primero que

$$\lim_{x\to 3}(x^2-4x+3) = 3^2-4(3)+3 = 9-12+3 = 0.$$

Y luego observemos que

$$\lim_{x\to 3}\left(\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}\right) = \sqrt{9-6+6}-\sqrt{9+6-6} = 3-3 = 0.$$

Procedemos analogamente al ejemplo anterior racionalizando al numerador. Se multiplica y divide por $\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}$ que es una cantidad $\neq 0$ si consideramos que $x \neq 3$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}&\frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3} = \\
&= \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}\,\frac{\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}}{\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}} = \\
&= \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x^2-2x+6})^2-(\sqrt{x^2+2x-6})^2}{(x^2-4x+3)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})} = \\
&= \lim_{x\to 3}\frac{(x^2-2x+6)-(x^2+2x-6)}{(x^2-4x+3)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})} = \\
&= \lim_{x\to 3}\frac{-4x+12}{(x^2-4x+3)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})} = \\
&= \lim_{x\to 3}\frac{-4(x-3)}{(x-3)(x-1)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})} = \\
&= \lim_{x\to 3}\frac{-4}{(x-1)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})} = \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to 3}-4}{\lim\limits_{x\to 3}[(x-1)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})]} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{-4}{\lim\limits_{x\to 3}(x-1)\lim\limits_{x\to 3}(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})} =$$
$$= \frac{-4}{2\left(\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x^2-2x+6}+\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x^2+2x-6}\right)} =$$
$$= \frac{-4}{2(3+3)} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}.$$

$\square$

Ejercicios 3.2.1 *Soluciones en la página 16*

I. Considerando que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -8$, $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 4$, $\lim\limits_{x\to 2} h(x) = 0$ y que $\lim\limits_{x\to 2} \phi(x)$ no existe, calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to 2} [g(x) - f(x)]$.
2. $\lim\limits_{x\to 2} [f(x)\cdot g(x)]$.
3. $\lim\limits_{x\to 2} [f(x) + \phi(x)]$.
4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{g(x)}{f(x)}$.
5. $\lim\limits_{x\to 2} \left[f^2(x) - g^3(x)\right]$.
6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)h(x)}{g(x)}$.
7. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{g(x)}{h(x)}$.
8. $\lim\limits_{x\to 2} \left[\sqrt{g(x)} + \sqrt[3]{f(x)}\right]$.
9. $\lim\limits_{x\to 2} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]^5$.
10. $\lim\limits_{x\to 2} \left[h(x)\sqrt{f(x)}\right]$.

II. Calcular los límites siguientes:

1. $\lim\limits_{x\to 4} (-x^2 - 9x - 8)$.
2. $\lim\limits_{x\to -2} \sqrt{x^4 - 2x + 1}$.
3. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{x^2 - 3x + 1}{-x^2 + 8x - 3}$.
4. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$.
5. $\lim\limits_{x\to 6} \left[(x+4)^3(x-5)^2\right]$.
6. $\lim\limits_{x\to -1} (4x^3 + 3x^2 - 2x - 1)$.
7. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} (x^3 - x^2 - x + 1)$.
8. $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}} (3 - 4x + 5x^2)$.
9. $\lim\limits_{x\to 0} (3x^2 - 2)^5$.
10. $\lim\limits_{x\to -3} (6 - x^2)^4$.
11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2 - 4x + 5}{6x^2 - 7x + 8}$.
12. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x + 2}{x^2 + 4}$.
13. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$.

14. $\displaystyle\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{(2x-1)^3}{(4x^2+1)^5}$.

III. Calcular los límites siguientes:

1. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-2x}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{x^2-7x+10}{x^2-25}$.
4. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{6x^2-3x^3}$.
5. $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$.
6. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^4-3x^2+2}{x^4+2x^2-3}$.
7. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x^3-1}$.
8. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$.
9. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.
10. $\displaystyle\lim_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.
11. $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$.
12. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$.
13. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$.
14. $\displaystyle\lim_{x\to 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$.
15. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.
16. $\displaystyle\lim_{x\to 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$.
17. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.
18. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2x}{x^2+2x-3}$.
19. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3-3x^2-5x}{x^2-7x}$.
20. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x-2}$.
21. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)$.
22. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{2x-\sqrt{-12x+40}}{3x^2+x-14}$.
23. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h+1}-1}{h}$.
24. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$.
25. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$.
26. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{2x^3-16}{-3x^2+8x-4}$.
27. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$.
28. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{2}{3}} \frac{\sqrt{9x+19}-6x-1}{6x^2-19x+10}$.
29. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{4-\sqrt{x+15}}{x^2-1}$.
30. $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2+5x+6}$.
31. $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{2x^2+5x-3}{x^2-2x-15}$.

32. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$.

33. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-x}{x^2-1}$.

34. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2+4x-7}{x^2-1}$.

35. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{-\sqrt{x+4}+2}$.

36. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-2x^2+2x-1}{x-1}$.

37. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{4}{x}-3\right)x$.

38. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+25}-5}$.

39. Considere la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{13-x^2}-x-1}{x^2-5x+6}$.

a. Viendo la tabla de imágenes de f, calcule $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ con dos cifras decimales exactas:

x	$f(x)$
1.997	1.66096
1.998	1.66286
1.999	1.66476
2	Indeterminado
2.001	1.66858
2.002	1.67049
2.003	1.67241

b. Calcule exactamente $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ usando la expresión algebraica de la función.
¿Cuál es la tercera cifra decimal exacta del valor del límite?

Ejercicios 3.2.1 *Álgebra de límites, página 13*

I.

1. 12.
2. -32.
3. No existe.
4. $-\dfrac{1}{2}$.
5. 0.
6. 0.
7. No existe.
8. 0.
9. -32.
10. No existe.

II.

1. $\lim\limits_{x\to 4}(-x^2-9x-8)=-60$.
2. $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{x^4-2x+1}=\sqrt{21}$.
3. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{x^2-3x+1}{-x^2+8x-3}=-\dfrac{1}{3}$.
4. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^5=32$.
5. $\lim\limits_{x\to 6}\left[(x+4)^3(x-5)^2\right]=1\,000$.
6. $\lim\limits_{x\to -1}(4x^3+3x^2-2x-1)=0$.
7. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}(x^3-x^2-x+1)=\dfrac{3}{8}$.
8. $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}}(3-4x+5x^2)=\dfrac{23}{9}$.
9. $\lim\limits_{x\to 0}(3x^2-2)^5=-32$.
10. $\lim\limits_{x\to -3}(6-x^2)^4=81$.
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-4x+5}{6x^2-7x+8}=\dfrac{5}{8}$.
12. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x+2}{x^2+4}=-\dfrac{1}{2}$.
13. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2+1}=0$.
14. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{(2x-1)^3}{(4x^2+1)^5}=-\dfrac{1}{4}$.

III.

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}=-2$.
2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-2x}=0$.
3. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-25}=\dfrac{3}{10}$.
4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{6x^2-3x^3}=-1$.
5. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}=\dfrac{a-1}{3a^2}$.
6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x^2+2}{x^4+2x^2-3}=-\dfrac{1}{4}$.
7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^3-1}=\dfrac{4}{3}$.
8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

9. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1$.

10. $\lim_{x \to 7} \dfrac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49} = -\dfrac{1}{56}$.

11. $\lim_{x \to 4} \dfrac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}} = -\dfrac{1}{3}$.

12. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

13. $\lim_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+6} - \sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3} = -\dfrac{1}{3}$

14. $\lim_{x \to 8} \dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = 12$.

15. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \dfrac{1}{2}$.

16. $\lim_{x \to 64} \dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4} = 3$.

17. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} = \dfrac{4}{3}$.

18. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{3x+1}-2x}{x^2+2x-3} = -\dfrac{5}{16}$.

19. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^3-3x^2-5x}{x^2-7x} = \dfrac{5}{7}$.

20. $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x-2} = \dfrac{1}{2}$.

21. $\lim_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{x^3-1} \right) = 1$.

22. $\lim_{x \to 2} \dfrac{2x - \sqrt{-12x+40}}{3x^2+x-14} = \dfrac{7}{26}$.

23. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{h+1}-1}{h} = \dfrac{1}{2}$.

24. $\lim_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \dfrac{1}{4}$.

25. $\lim_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{12}{x^3-8} \right) = \dfrac{1}{2}$.

26. $\lim_{x \to 2} \dfrac{2x^3-16}{-3x^2+8x-4} = -6$.

27. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

28. $\lim_{x \to \frac{2}{3}} \dfrac{\sqrt{9x+19}-6x-1}{6x^2-19x+10} = \dfrac{51}{110}$.

29. $\lim_{x \to 1} \dfrac{4-\sqrt{x+15}}{x^2-1} = -\dfrac{1}{16}$.

30. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3+8}{x^2+5x+6} = 12$.

31. $\lim_{x \to -3} \left(\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-2x-15} \right) = \dfrac{7}{8}$.

32. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

33. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2-x}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}$.

34. $\lim_{x \to 1} \dfrac{3x^2+4x-7}{x^2-1} = 5$.

35. $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{-\sqrt{x+4}+2} \right) = -2$.

36. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3-2x^2+2x-1}{x-1} = 1$.

37. $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{4}{x} - 3 \right) x = 4$.

38. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+25}-5} = 0$.

39.
   a. Se comprueba que $\lim_{x \to 2} f(x) = 1.66$;
   b. $\lim_{x \to 2} f(x) = 1.6667$;
   6 es la tercera cifra decimal del límite.