CAPÍTULO

9

Gráfica de una función

[1]

9.2 Interpretación de gráficas y símbolos

Con la finalidad de reafirmar la relación existente entre el contenido de un concepto, la notación simbólica utilizada para representarlo y la interpretación gráfica de dicho concepto, mediante ejemplos, trataremos de inducir al lector para que lleve a cabo actividades importantes como son las siguientes:

- A partir de la gráfica de una función f desconocida, obtener información sobre características relevantes de dicha función f.
- A partir de condiciones impuestas mediante notación simbólica a una función, bosquejar una posible gráfica de dicha función.
- A partir de la gráfica de f' o bien de f'', obtener información sobre algunas características de la función f.

Para el éxito de estas actividades se debe tener claridad en los conceptos, en las notaciones simbólicas utilizadas para representarlos y en las interpretaciones gráficas asociadas a dichos conceptos.

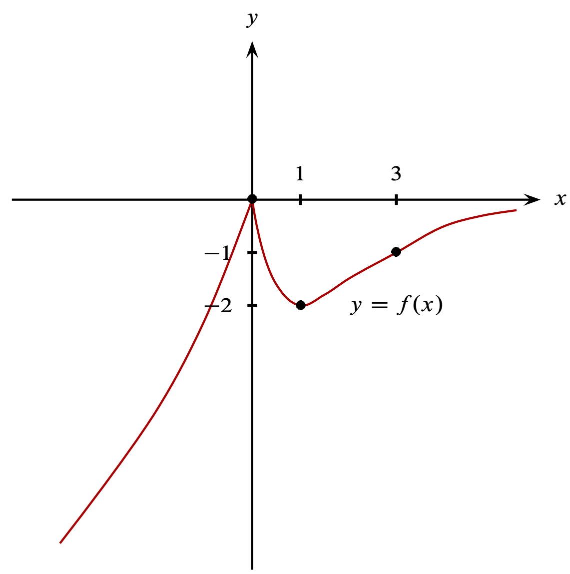
Ejemplo 9.2.1 *Bosquejar la gráfica de una función continua f que satisfaga las condiciones siguientes:*

1. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$;
3. $f(0) = 0$;
4. $f(1) = -2$;
5. $f(3) = -1$;
6. $f'(0)$ *no existe;*
7. $f'(1) = 0$;
8. $f''(3) = 0$;
9. $f'(x) > 0$ *si* $x \in (-\infty, 0) \bigcup (1, +\infty)$;

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

10. $f'(x) < 0$ *si* $x \in (0, 1)$;
11. $f''(x) > 0$ *si* $x \in (-\infty, 0) \bigcup (0, 3)$;
12. $f''(x) < 0$ *si* $x \in (3, +\infty)$.

▼ Una gráfica posible de la función $f(x)$ es

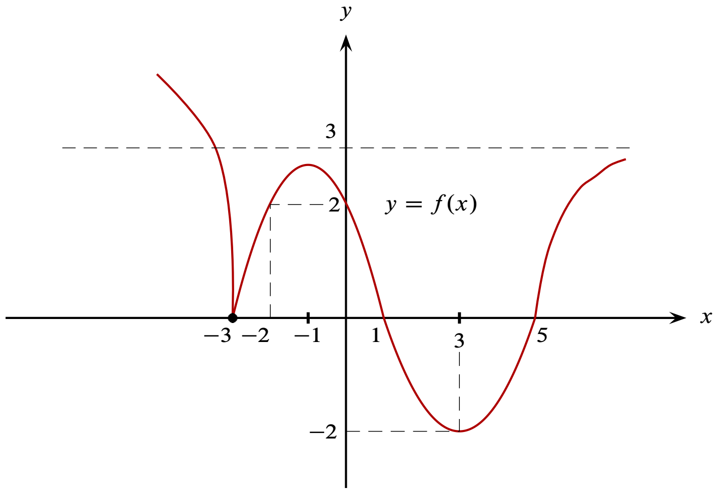


□

Ejemplo 9.2.2 *Bosquejar la gráfica de una función continua $f(x)$ que satisfaga todas las condiciones siguientes:*

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$;
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$;
3. $f(-3) = 0$;
4. $f(-2) = 2$;
5. $f(1) = 0$;
6. $f(3) = -2$;
7. $f(5) = 0$;
8. $f'(-3)$ *no existe*;
9. $f'(-1) = 0$;
10. $f'(3) = 0$;
11. $f'(x) < 0$ *si* $x \in (-\infty, -3) \bigcup (-1, 3)$;
12. $f'(x) > 0$ *si* $x \in (-3, -1) \bigcup (3, +\infty)$;
13. $f''(x) < 0$ *si* $x \in (-\infty, -3) \bigcup (-3, 1) \bigcup (5, +\infty)$;
14. $f''(x) > 0$ *si* $x \in (1, 5)$.

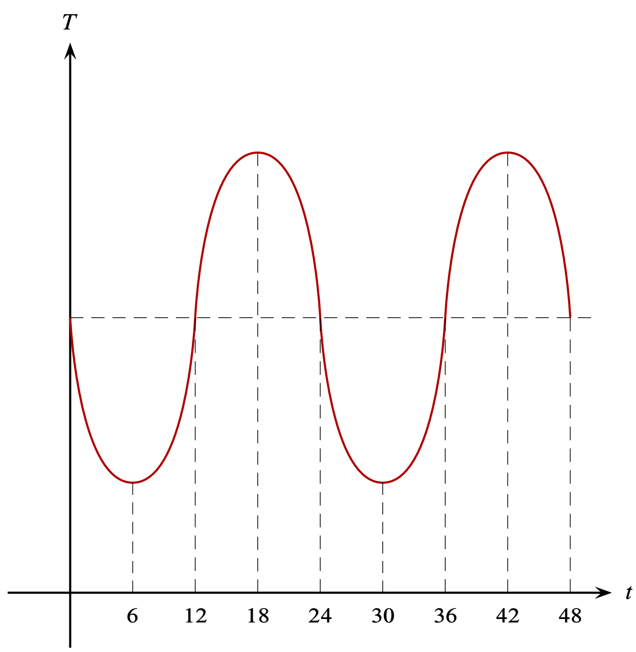
▼ Una posible gráfica de la función $f(x)$:



□

Ejemplo 9.2.3 *En la figura siguiente se muestra la gráfica de la temperatura T como función del tiempo t, en un periodo de dos días de primavera en la ciudad de Monterrey, empezando desde las 0 horas del primer día. Conteste lo siguiente:*

1. *¿En qué intervalos de tiempo la razón de cambio T con respecto a t es positiva?*
2. *¿En qué intervalos de tiempo la temperatura está bajando?*
3. *¿En qué intervalos la gráfica es cóncava hacia arriba y en cuáles hacia abajo?*
4. *¿En qué valores de t se localizan los puntos de inflexión y cómo los interpreta en términos de la temperatura?*
5. *Finalmente, explique con palabras el comportamiento de la temperatura durante los dos días.*



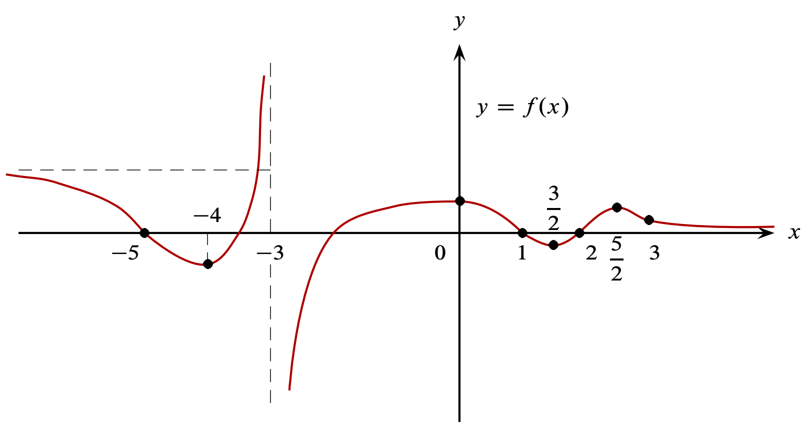
▼

1. $\dfrac{dT}{dt} > 0$ en los intervalos de tiempo $(6, 18)$ y $(30, 42)$.
2. T decrece en los intervalos $(0, 6)$, $(18, 30)$ y $(42, 48)$.
3. La gráfica de T es cóncava hacia arriba en los intervalos $(0, 12)$ y $(24, 36)$.

   La gráfica de T es cóncava hacia abajo en los intervalos $(12, 24)$ y $(36, 48)$.
4. Los puntos de inflexión están en $t = 12$, $t = 24$ y en $t = 36$. En estos puntos la razón de cambio $\dfrac{dT}{dt}$ pasa de crecer (12 y 36) a decrecer (24).
5. Durante el segundo día, la temperatura tiene el mismo comportamiento (iguales características) que durante el primer día. La temperatura mínima a las seis de la mañana y la máxima a las seis de la tarde.

□

Ejemplo 9.2.4 *Considere la gráfica de la función f:*



Determinar el conjunto de $x \in D_f$ tales que:

1. $f'(x) > 0$, $f'(x) = 0$, $f'(x) < 0$.
2. $f''(x) > 0$, $f''(x) = 0$, $f''(x) < 0$.

▼

1. $f'(x) > 0$ si $x \in (-4, -3) \bigcup (-3, 0) \bigcup \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$;

   $f'(x) = 0$ si $x \in \left\{-4, 0, \dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right\}$;

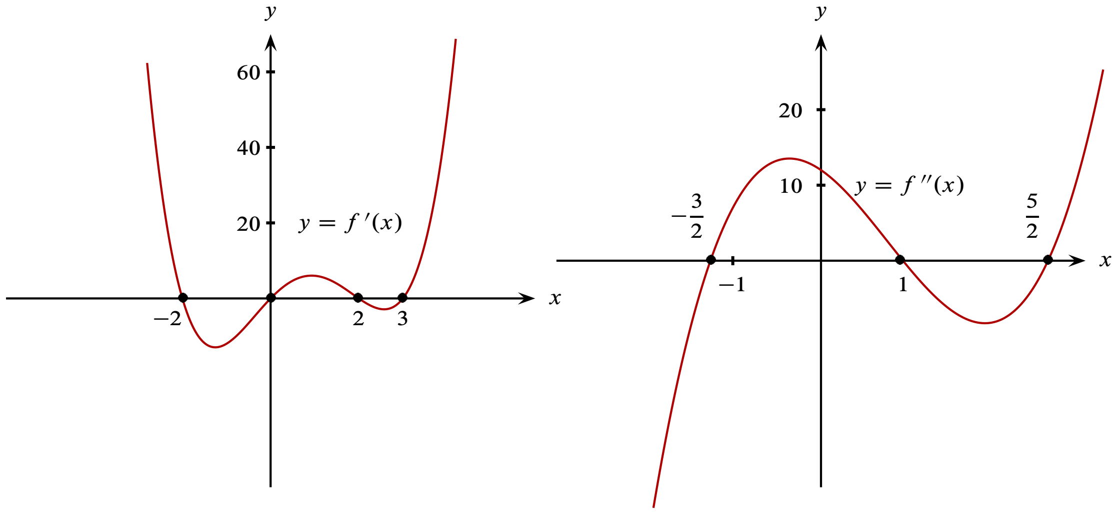
   $f'(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -4) \bigcup \left(0, \dfrac{3}{2}\right) \bigcup \left(\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$.
2. $f''(x) > 0$ si $x \in (-5, -3) \bigcup (1, 2) \bigcup (3, +\infty)$;

   $f''(x) = 0$ si $x \in \{-5, 1, 2, 3\}$;

   $f''(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -5) \bigcup (-3, 1) \bigcup (2, 3)$.

□

Ejemplo 9.2.5 *Suponga que las siguientes son las gráficas de f' y f'' para una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*



A partir de las gráficas de f' y f'', determine para f: dónde es creciente y dónde es decreciente; sus intervalos de concavidad; máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión.

▼

1. Intervalos de monotonía:

   La función f es creciente en $(-\infty, -2)$, $(0, 2)$ y $(3, +\infty)$. Es decir, $f'(x) > 0$ en ellos.

   La función f es decreciente $(-2, 0)$ y $(2, 3)$. Es decir, $f'(x) < 0$ ahí.

2. Intervalos de concavidad:

   La función f es cóncava hacia arriba en $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$ y en $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$. Es decir, $f''(x) > 0$ en ellos.

   La función f es cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ y en $\left(1, \frac{5}{2}\right)$. Es decir, $f''(x) < 0$ ahí.

3. Máximos y mínimos:

   La función f tiene extremos en $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$ y en $x = 3$.

   En $x = -2$ y en $x = 2$ hay máximos relativos [$f(x)$ pasa de creciente a decreciente].

   En $x = 0$ y en $x = 3$ hay mínimos relativos [$f(x)$ pasa de decreciente a creciente].

4. Puntos de inflexión:

   Hay puntos de inflexión en $x = -\frac{3}{2}$, $x = 1$ y en $x = \frac{5}{2}$ pues ahí f'' cambia de signo ($f'' = 0$ en ellos).

□

Ejercicios 9.2.1 *Soluciones en la página* **??**

Gráfica de una función sujeta a ciertas condiciones.

1. Bosquejar la gráfica de una función continua f que satisfaga todas las condiciones siguientes:

a. $f(-4) = 0$;
b. $f'(-4) = -1$;
c. $f(-1) = -3$;
d. $f'(-1) = 0$;
e. $f(2) = 5$;
f. $f'(2) = 1$;
g. $f(0) = 0$;
h. $f'(0)$ no existe;
i. $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = +\infty$;
j. $f'(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -1)$;
k. $f'(x) > 0$ si $x \in [-1, +\infty) - \{0\}$;
l. $f''(x) > 0$ si $x \in (-\infty, 0)$;
m. $f''(x) < 0$ si $x \in (0, +\infty)$.

2. Dar un bosquejo de la gráfica de una función f que cumple los requisitos siguientes:

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -3$;
b. $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = 0$;
c. $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$;
d. $f'(x) > 0$ para $x < -2$;
e. $f''(x) > 0$ para $x < -2$;
f. $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 0$;
g. $f(0) = -3$;
h. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$;
i. $f'(x) < 0$ para $-2 < x < 1$;
j. $f''(x) < 0$ para $-2 < x < 1$;
k. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$;
l. $f(3) = -1$;
m. $f'(3) = 0$;
n. $f'(x) < 0$ para $1 < x < 3$;
o. $f'(x) > 0$ para $x > 3$;
p. $f''(x) > 0$ para $1 < x < 5$;
q. $f(5) = 0$;
r. $f''(x) < 0$ para $x > 5$;
s. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

3. Dibuje una gráfica de una función f que satisfaga las condiciones siguientes:

a. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -2$;
b. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$;
c. $f(0) = -1$;
d. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$;
e. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$;
f. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$;
g. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 4$;
h. $f(-1) = -2$;
i. $f'(-1)$ no existe;
j. $f''(1) = 0$;
k. $f''(x) < 0$ para $0 < x < 1$;
l. $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) > 0$.

4. Trace una posible gráfica para una función f continua en su dominio: $(-\infty, 5] - \{-2, 3\}$ que satisfaga,

- $f(5) = 3$;
- $f(1) = \dfrac{1}{2}$;
- $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = +\infty$;
- $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4$;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$;

- $f'(1) = 0$;
- $f'(2) = 0$;
- $f'(4) = 0$;
- $f'(x) > 0$ si $x \in (-\infty, -2)$;
- $f'(x) > 0$ si $x \in (1, 4) - \{3\}$;
- $f'(x) < 0$ si $x \in (-2, 1)$;
- $f'(x) < 0$ si $x \in (4, 5)$.

Especifique los intervalos de concavidad de su gráfica, los máximos y mínimos locales, y absolutos.

5. Trace una posible gráfica para una función f continua en su dominio: $[-4, +\infty) - \{-3, 2\}$ y que satisfaga:

- $f(-4) = 2$;
- $f(1) = -1$;
- $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 3$;
- $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$;
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$;

- $f'(-2) = 0$;
- $f'(-1) = 0$;
- $f'(1) = 0$;
- $f'(x) > 0$ si $x \in (-4, -2) - \{-3\}$;
- $f'(x) < 0$ si $x \in (-2, 1) - \{-1\}$;
- $f'(x) > 0$ si $x \in (1, 2)$;
- $f'(x) < 0$ si $x \in (2, \infty)$.

Especifique los intervalos de concavidad de su gráfica y los máximos y mínimos locales y absolutos.

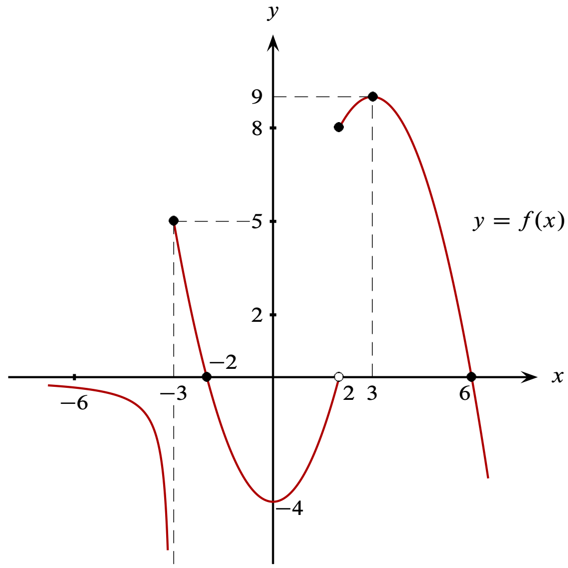
6. Dar un bosquejo de la gráfica de una función f que cumpla las siguientes condiciones:

- $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, -2) \bigcup (-2, 4)$;
- $f'(x) < 0$ para $x \in (4, +\infty)$;
- tiene asíntota vertical en $x = -2$;
- $y = 1$ es asíntota horizontal de f.

Ejercicios 9.2.2 *Soluciones en la página* **??**

Interpretar la gráfica de una función.

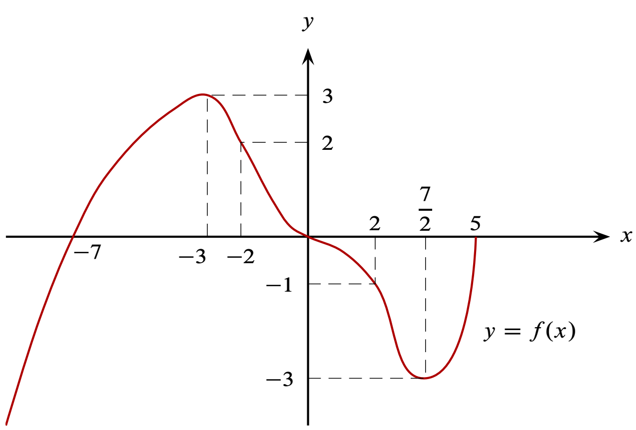
1. Considere la siguiente gráfica de la función f



y determine:

a. Los puntos donde la derivada no existe.
b. Los puntos donde $f'(x) = 0$.
c. Los intervalos donde $f'(x) > 0$.
d. Los intervalos donde $f'(x) < 0$.
e. Los intervalos donde $f''(x) > 0$.
f. Los intervalos donde $f''(x) < 0$.

2. Si la gráfica de f es

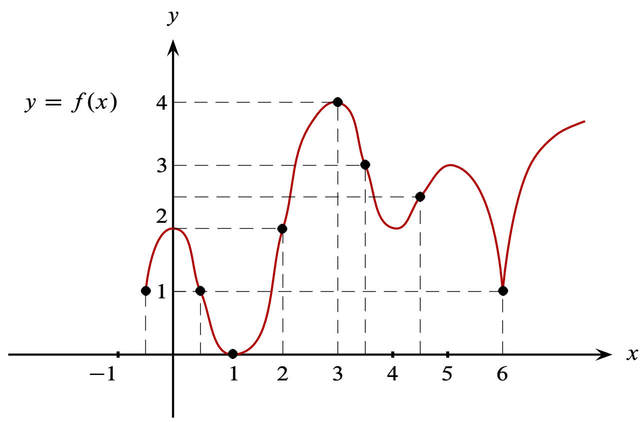


halle:

a. Dominio, raíces, paridad y rango.
b. Monotonía, máximos y mínimos locales y absolutos.
c. Concavidad y puntos de inflexión.
d. Intervalos donde $f'(x) > 0$, donde $f'(x) < 0$, donde $f''(x) > 0$ y donde $f''(x) < 0$.

e. Puntos donde $f'(x) = 0$ e intervalos donde $f(x) > 0$ y donde $f(x) < 0$.

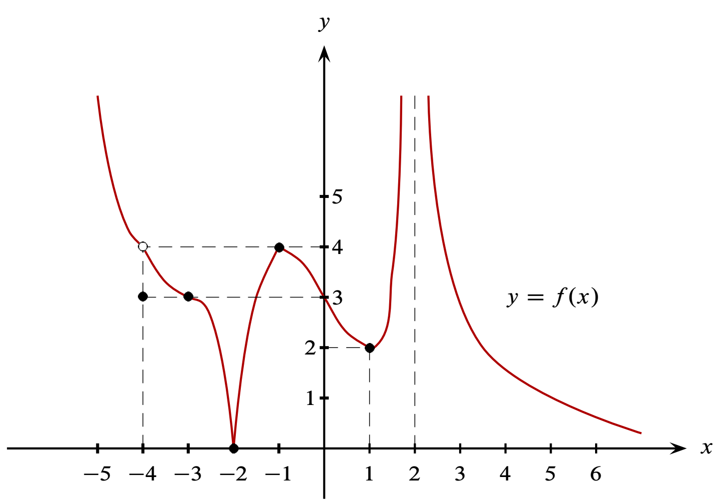
3. A partir de la gráfica dada de f, cuyo dominio es $[-0.5, \infty)$



determine:

a. Los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento.
b. Los intervalos de concavidad hacia arriba y los de concavidad hacia abajo.
c. Los máximos y mínimos relativos, los máximos y mínimos absolutos, y los puntos de inflexión.

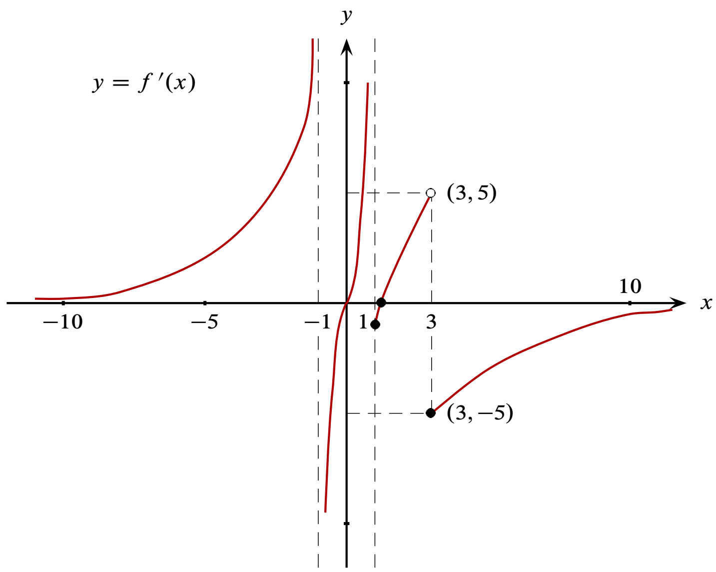
4. A partir de la gráfica de f



determine el conjunto de puntos del dominio de f que satisfacen:

a. $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f'(x) = 0$.
b. $f'' > 0$, $f''(x) < 0$, $f''(x) = 0$.
c. $f'(x)$ no existe.

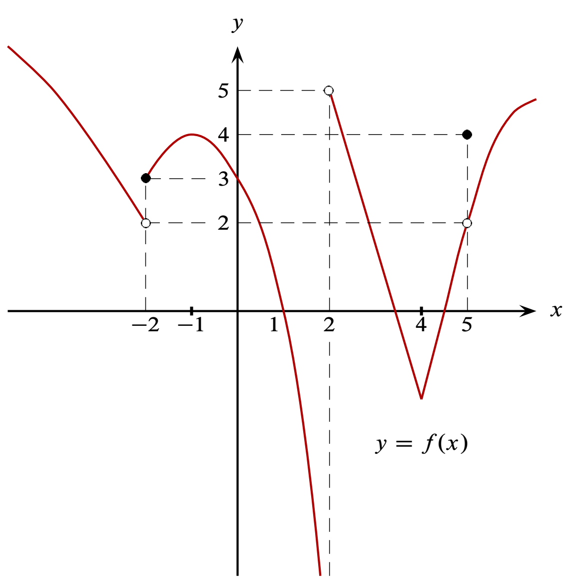
5. La figura siguiente muestra la gráfica de la derivada de una función f la cual es continua en todos los reales.



A partir de ella, determine:

a. Intervalos donde f es creciente o decreciente.
b. Puntos críticos de f.
c. Extremos relativos de f.
d. Concavidad de f.
e. Abscisas de los puntos de inflexión de f.

6. Sea f la función que tiene la siguiente gráfica



determine:

a. Los intervalos de continuidad y los siguientes valores

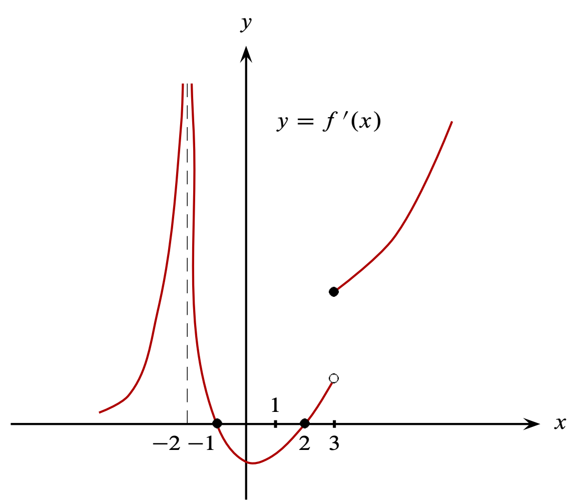
$$\lim_{x\to a^-} f(x), \;\; \lim_{x\to a^+} f(x), \;\; \lim_{x\to a} f(x) \;\&\; f(a)$$

para $a = -2$, $a = 2$, $a = 5$.

b. La clasificación de discontinuidades. ¿En cuáles puntos y con qué valores se puede redefinir $f(x)$ para convertirla en una función continua en esos puntos?

c. Los intervalos donde $f' > 0$, $f'(x) < 0$ y los puntos donde $f' = 0$, o donde no existe la derivada.

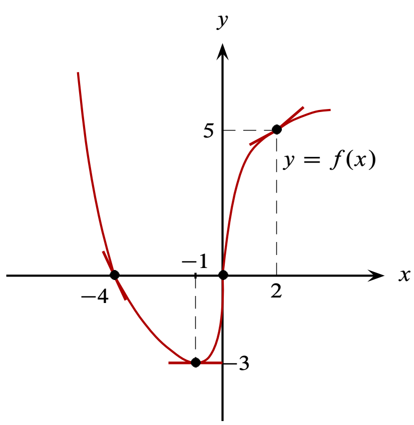
7. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\mathbb{R}$ cuya primera derivada f' tiene la siguiente gráfica:



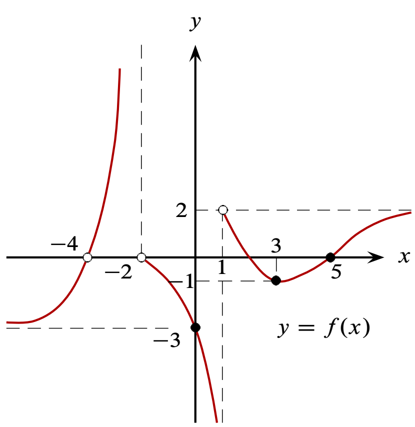
Determinar dónde la función f es creciente y dónde es decreciente. Explicar además, cómo es la tangente a la gráfica de f en $x = -2$, $x = -1$, $x = 2$ & $x = 3$.

Ejercicios 9.2.1 *Gráfica de una función sujeta a ciertas condiciones, página* **??**

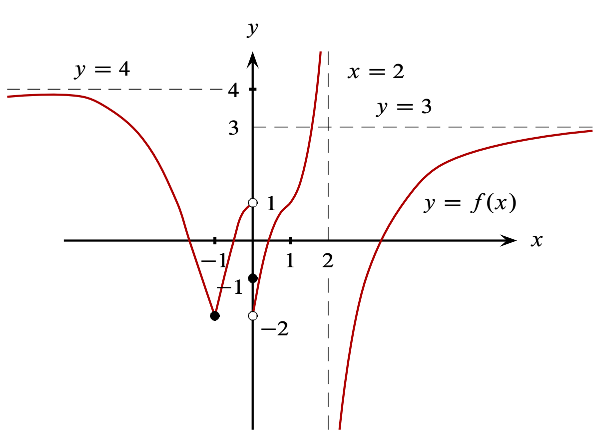
1.



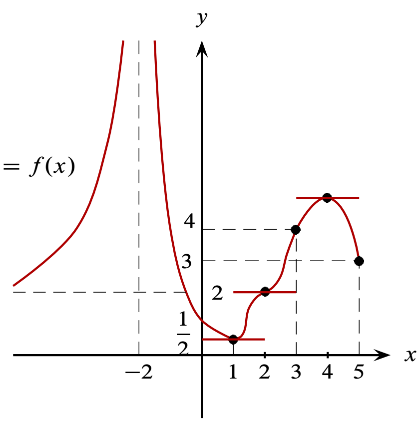
2.



3.



4.



Cóncava hacia arriba en $(-\infty,-2) \bigcup \left(-2,\dfrac{3}{2}\right) \bigcup (2,3)$;

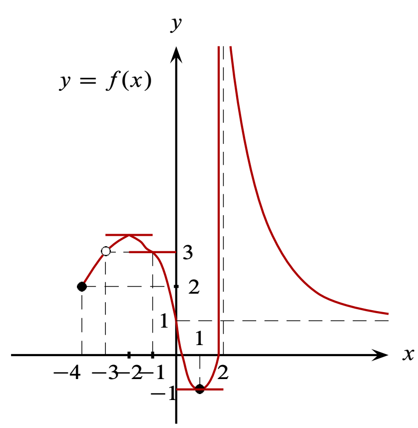
cóncava hacia abajo en $\left(\dfrac{3}{2},2\right) \bigcup (3,5)$;

en $x = 1$ hay un mínimo local. Es mínimo absoluto;

en $x = 4$ hay un máximo local;

no tiene máximos absolutos.

5.



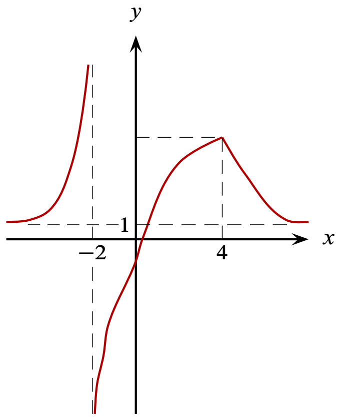
Cóncava hacia arriba en $\left(-\dfrac{3}{2},-1\right)$, $(0,2)$ y $(2,+.\infty)$;

cóncava hacia abajo en $\left(-4,-\dfrac{3}{2}\right)$, y en $(-1,0)$;

máximo local en $x = -2$;

mínimo local en $x = -1$ que es mínimo absoluto.

6.



Ejercicios 9.2.2 *Interpretar la gráfica de una función, página* **??**

1. a. $x = -3$ & $x = 2$;
   b. $x = 0$ & $x = 3$;
   c. $f' > 0$: $(0, 2)$ y $(2, 3)$;
   d. $f' < 0$: $(-\infty, -3)$, $(-3, 0)$ y $(3, +\infty)$;
   e. $f'' > 0$: $(-3, 2)$;
   f. $f'' < 0$: $(-\infty, -3)$ y $(2, +\infty)$.

2. a. $D_f = (-\infty, 5]$; raíces: $x = -7$, $x = 0$ & $x = 5$; no es par ni impar; $R_f = (-\infty, 3]$;
   b. creciente en $(-\infty, -3)$ y en $\left(\frac{7}{2}, 5\right)$;
   decreciente en $\left(-3, \frac{7}{2}\right)$;
   máximo local en $(-3, 3)$, es máximo absoluto;
   mínimo local en $\left(\frac{7}{2}, -3\right)$;
   no tiene mínimo absoluto;
   c. cóncava hacia arriba en $(-2, 0)$ y en $(2, 5)$;
   cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2)$ y en $(0, 2)$;
   $(-2, 2)$, $(0, 0)$ y $(2, -1)$ son puntos de inflexión;
   d. $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -3)$ y en $\left(\frac{7}{2}, 5\right)$;
   $f'(x) < 0$ en $(-3, 0)$ y en $\left(0, \frac{7}{2}\right)$;
   $f''(x) > 0$ en $(-2, 0)$ y en $(2, 5)$;
   $f''(x) < 0$ en $(-\infty, -2)$ y en $(0, 2)$;
   e. $f'(x) = 0$ en $(-3, 3)$, en $(0, 0)$ y en $\left(\frac{7}{2}, -3\right)$;
   $f(x) > 0$ en $(-7, 0)$;
   $f(x) < 0$ en $(-\infty, -7)$ y en $(0, 5)$.

3. a. Creciente en $[-0.5, 0]$, $[1, 3]$, $[4, 5]$ y en $[6, +\infty)$;
   decreciente en $[0, 1]$, $[3, 4]$ y en $[5, 6]$;
   b. cóncava hacia arriba en $[0.5, 2]$ y en $[3.5, 4.5)$;
   cóncava hacia abajo en
   $[-0.5, 0.5]$, $[2, 3.5]$, $[4.5, 6]$ y $[6, +\infty)$;
   c. máximos relativos: $(0, 2)$, $(3, 4)$ y $(5, 3)$
   mínimos relativos:
   $(-0.5, 1)$, $(1, 0)$, $(4, 2)$ y $(6, 1)$;
   no tiene máximo absoluto y el mínimo absoluto es $(1, 0)$;
   puntos de inflexión:
   $(0.5, 1)$, $(2, 2)$, $(3.5, 3)$ y $(4.5, 2.5)$.

4. a. $f'(x) > 0$ en $(-2, -1) \bigcup (1, 2)$;
   $f'(x) < 0$ en $(-\infty, -4) \bigcup (-4, -3) \bigcup (-3, -2) \bigcup$
   $\bigcup (-1, 1) \bigcup (2, +\infty)$;
   $f'(x) = 0$ si $x = -3, -1$ o bien 1;
   b. $f'' > 0$ en $(-\infty, -4) \bigcup (-4, -3) \bigcup (0, 2) \bigcup (2, +\infty)$;
   $f'' < 0$ en $(-3, -2) \bigcup (-2, 0)$;
   $f'' = 0$ si $x = -3$ o bien $x = 0$;
   c. en $x = -4, -2$ & 2 no existe la derivada.

5. a. Creciente en $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$ y en $(1.2, 3)$;
   decreciente en $(-1, 0)$, $(1, 1.2)$ y en $(3, +\infty)$;

b. puntos críticos: $x = 0$ & $x = 1.2$;

c. mínimo local estricto: $x = 0$ & $x = 1.2$;

d. cóncava hacia arriba: en $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 3)$ y en $(3, +\infty)$;

e. no tiene puntos de inflexión.

6. a. La función es continua en

$$(-\infty, -2)\bigcup[-2, 2)\bigcup(2, 5)\bigcup(5, +\infty) ;$$

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$ no existe; $f(-2) = 3$;
$\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = 5$; $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ no existe; $f(2)$ no está definido;
$\lim\limits_{x\to5^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to5^+} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to5} f(x) = 2$; $f(5) = 4$;

b. en $x = -2$ se tiene una discontinuidad de salto;

en $x = 2$ se tiene una discontinuidad esencial infinita;

en $x = 5$ se tiene una discontinuidad removible;

si redefinimos $f(5) = 2$, la función se hace continua en este punto;

c. $f'(x) < 0$ en $(-\infty, -2)$, $(-1, 2)$ y en $(2, 4)$;

$f'(x) > 0$ en $(-2, -1)$ y en $(4, +\infty) - \{5\}$;

$f'(x) = 0$ en $x = -1$;

$f'(x)$ no existe en $x = -2$, $x = 2$, $x = 4$ ni en $x = 5$.

7. Creciente en $(-\infty, -2)\bigcup(-2, -1)\bigcup(2, +\infty)$;

decreciente en $(-1, 2)$;

en $x = -2$ hay tangente vertical;

en $x = -1$ hay tangente horizontal y un máximo local;

en $x = 2$ la tangente es horizontal y hay un mínimo local;

en $x = 3$ la tangente no existe. La gráfica tiene una discontinuidad de salto.