CAPÍTULO

9

Gráfica de una función

[1]

9.1 Bosquejo de la gráfica de una función

Para gráficar una función es necesario:

1. Hallar su dominio y sus raíces.

2. Decidir si es par o impar, o bien ninguna de las dos cosas.

3. Determinar sus intervalos de continuidad.

4. Determinar sus discontinuidades y clasificarlas

5. Hallar sus asíntotas horizontales y verticales.

6. Calcular su derivada y averiguar dónde existe. Hallar sus puntos críticos. Averiguar si tiene tangentes verticales.

7. Resolver las desigualdades $f'(x) > 0$ & $f'(x) < 0$. Determinar sus intervalos de monotonía.

8. Hallar sus máximos y mínimos locales.

9. Hallar su segunda derivada y sus raíces. Resolver las desigualdades $f''(x) > 0$ & $f''(x) < 0$, discernir dónde es cóncava y dónde es convexa la función. Hallar sus puntos de inflexión. Evaluar la función y la primera derivada en los puntos de inflexión.

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

10. Si es preciso: tabular algunos puntos y algunas pendientes adicionales.

Ejemplo 9.1.1 *Bosquejar la gráfica de la función* $f(x) = 3x^5 - 5x^3$.

▼

1. Dominio: por ser f una función polinomial su dominio es $D_f = \mathbb{R}$.

   Raíces:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 3x^5 - 5x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(3x^2 - 5) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3 = 0 \\ \text{o bien} \\ 3x^2 - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{o bien} \\ x^2 = \dfrac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{o bien} \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ o bien} \\ x = \sqrt{\dfrac{5}{3}} \text{ o bien} \\ x = -\sqrt{\dfrac{5}{3}}\,. \end{cases}$$

   Entonces f tiene 3 raíces: $r_1 = -\sqrt{\dfrac{5}{3}}$, $r_2 = 0$ & $r_3 = \sqrt{\dfrac{5}{3}} \approx 1.29$.

2. Paridad:

$$f(-x) = 3(-x)^5 - 5(-x)^3 = 3(-x^5) - 5(-x^3) = -3x^5 + 5x^3 = -(3x^5 - 5x^3) = -f(x)\,.$$

   La función f es impar. Por lo cual su gráfica resultará simétrica con respecto al origen.

3. Intervalos de continuidad:

   Por ser f una función polinomial es continua en todo $\mathbb{R}$. Por lo mismo no tiene discontinuidades.

4. Asíntotas verticales:

   Por ser continua en todo $\mathbb{R}$, la función f no tiene asíntotas verticales.

5. Asíntotas horizontales: no tiene, pues

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (3x^5 - 5x^3) = \lim_{x \to +\infty} \left[x^5 \left(3 - \frac{5}{x^2} \right) \right] = +\infty\,.$$

   Además (por ser impar)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty\,.$$

   Comentario: el comportamiento de estos límites se conoce como ramas parábolicas de la función.

6. Derivabilidad:

   Por ser f una función polinomial, es derivable en todo $\mathbb{R}$. De hecho

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 \text{ existe para cada } x \in \mathbb{R} \;\; (f' \text{ es par})\,.$$

7. Monotonía: por el ejemplo 8.1.4 sabemos que

   - La función f es creciente en los intervalos $(-\infty, -1]$ y $[1, +\infty)$.
   - La función f es decreciente en el intervalo $[-1, 1]$.

8. Puntos críticos: por el ejemplo 8.2.4 sabemos que

   - En $x = 0$ existe un punto crítico que no es ni máximo ni mínimo local.
   - La función f tiene un máximo local estricto en el punto $P(-1, 2)$.
   - La función f tiene un mínimo local estricto en el punto $Q(1, -2)$.

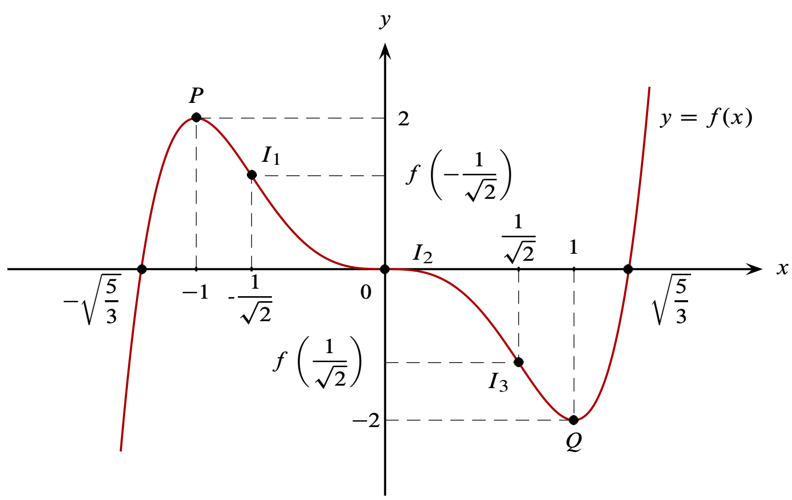
9. Concavidades: por el ejemplo 8.3.3 sabemos que

   - La función f es cóncava hacia arriba en los intervalos $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right) \approx (0.7071, +\infty)$.
   - La función f es cóncava hacia abajo en los intervalos $\left(-\infty, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
   - La función f tiene 3 puntos de inflexión, que son

   $$I_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1.2374\right),\ I_2(0,0)\ \&\ I_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1.2374\right).$$

   Corroboramos que siendo $I_2(0, 0)$ un punto crítico y al mismo tiempo un punto de inflexión no es ni un máximo local ni un mínimo local.

10. Bosquejo de la gráfica de $f(x)$:



□

Ejemplo 9.1.2 *Bosquejar la gráfica de la función* $g(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 4}$.

▼

1. Dominio: por ser g una función racional su dominio es

$$D_g = \mathbb{R} - \left\{ x \,\middle|\, x^2 + 4 = 0 \right\} = \mathbb{R} - \varnothing = \mathbb{R} \text{ ya que } x^2 + 4 > 0 \text{ para cada } x \in \mathbb{R}\,.$$

   Raíces:

$$g(x) = \frac{4x}{x^2+4} = 0 \;\Leftrightarrow\; 4x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0\,.$$

2. Paridad:

$$g(-x) = \frac{4(-x)}{(-x)^2+4} = \frac{-4x}{x^2+4} = -\left(\frac{4x}{x^2+4}\right) = -g(x)\,.$$

   Puesto que $g(x) = -g(-x)$, entonces g es una función impar.

3. Intervalos de continuidad:

   Por ser g una función racional es continua en todo su dominio $D_g = \mathbb{R}$.

4. Asíntotas verticales: no tiene debido a que g no tiene discontinuidades.

5. Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{x^2+4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(\dfrac{4}{x}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\dfrac{4}{x}}{1+\dfrac{4}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0\,.$$

   Entonces g tiene una asíntota horizontal que es la recta $y = 0$ (el eje x).

6. Derivabilidad:

$$g'(x) = \frac{4(4-x^2)}{(x^2+4)^2} \text{ para cada } x \in \mathbb{R}\,, (g' \text{ es par})\,.$$

7. Intervalos de monotonía: por el ejemplo 8.1.2 sabemos que

   - La función g es creciente en el intervalo $(-2, 2)$.
   - La función g es decreciente en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(2, +\infty)$.

8. Puntos críticos: por el ejemplo 8.2.3 sabemos que

   - La función g tiene un mínimo local estricto en el punto $P(-2, -1)$.
   - La función g tiene un máximo local estricto en el punto $Q(2, 1)$.

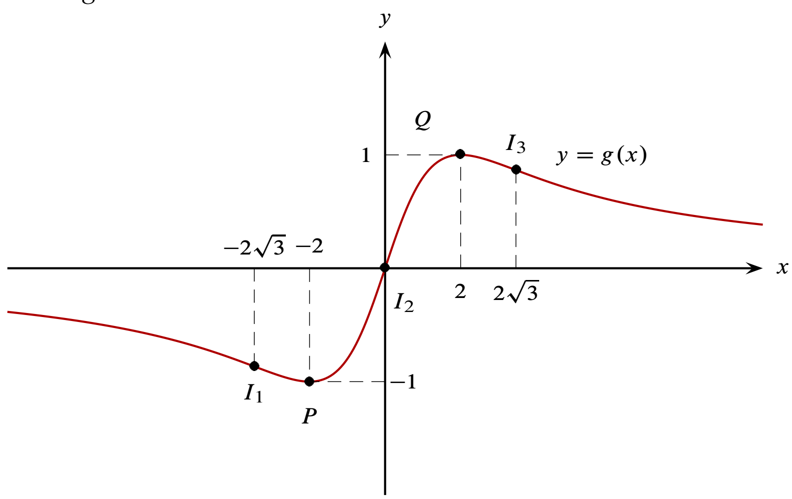
   Por ser $y = 0$ asíntota horizontal y en ausencia de otros puntos críticos, tales valores extremos son globales. Por lo tanto el punto P es un mínimo absoluto y el punto Q es un máximo absoluto.

9. Intervalos de concavidad: por el ejemplo 8.3.2 sabemos que

   - La función g es cóncava hacia arriba en los intervalos $\left(-2\sqrt{3}, 0\right)$ y $\left(2\sqrt{3}, +\infty\right)$.

- La función g es cóncava hacia abajo en los intervalos $\left(-\infty, -2\sqrt{3}\right)$ y $\left(0, 2\sqrt{3}\right)$.
- La función g tiene puntos de inflexión en $I_1\left(-2\sqrt{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $I_2(0,0)$ e $I_3\left(2\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx (3.46, 0.87)$.

10. Bosquejo de la gráfica de g:



□

Ejemplo 9.1.3 *Para la función* $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{(x+1)^2}$, *obtener: dominio, raíces y paridad, intervalos de continuidad, asíntotas horizontales y verticales , intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos críticos y su clasificación, intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo, puntos de inflexión. Con estos elementos haga un bosquejo de la gráfica de la función.*

▼

1. El dominio de f:

$$
\begin{aligned}
D_f &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; f(x) \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{(x-2)^2}{(x+1)^2} \in \mathbb{R} \right\} = \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; (x+1)^2 \neq 0 \right\} = \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x+1 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \neq -1 \right\} = \mathbb{R} - \{-1\}\,.
\end{aligned}
$$

2. Las raíces de f y paridad:

$$
f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{(x-2)^2}{(x+1)^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; (x-2)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 2\,.
$$

La función f no es par ni impar, ya que por ejemplo:

$f(2) = 0$ & $f(-2) = 16 \;\Rightarrow\; f(-2) \neq f(2)$ & $f(-2) \neq -f(2)$.

3. Intervalos de continuidad:

Por ser f una función racional, es continua en todo su dominio $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$; es decir, f es continua en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(-1, +\infty)$.

4. Asíntotas horizontales:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-2)^2}{(x+1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-4x+4}{x^2+2x+1} = \\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1.\end{aligned}$$

Entonces la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal.

5. Asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}\frac{(x-2)^2}{(x+1)^2} = \lim_{x\to -1}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 .$$

Ya que $\lim\limits_{x\to -1}(x-2) = -1-2 = -3$ & $\lim\limits_{x\to -1}(x+1) = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-2}{x+1} = +\infty$ o bien $-\infty$; por lo cual $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2 = +\infty$, no importando si $x \to -1^-$ o bien $x \to -1^+$.

Por lo anterior, la función tiene una discontinuidad esencial infinita en $x = -1$. Por lo tanto, la recta $x = -1$ es la única asíntota vertical de f.

6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 = 2\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2-1}\frac{d}{dx}\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = \\ &= 2\left(\frac{x-2}{x+1}\right)\frac{(x+1)1-(x-2)1}{(x+1)^2} = 2\left(\frac{x-2}{x+1}\right)\frac{x+1-x+2}{(x+1)^2} = \\ &= 2\left(\frac{x-2}{x+1}\right)\frac{3}{(x+1)^2} = \frac{6(x-2)}{(x+1)^3}.\end{aligned}$$

Debemos ver dónde $\dfrac{6(x-2)}{(x+1)^3} > 0$ y dónde $\dfrac{6(x-2)}{(x+1)^3} < 0$.

Ya que $\dfrac{6(x-2)}{(x+1)^3}$ no está definido cuando $x + 1 = 0$, excluimos el número $x = -1$.

Ya que $\dfrac{6(x-2)}{(x+1)^3} = 0$ cuando $x - 2 = 0$, excluimos también el número $x = 2$.

Los números excluidos generan los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$ y $(2, +\infty)$.

Para saber el signo de f' en cada uno de los intervalos, se elige un valor de prueba y se evalúa

$f'(x)$ en dicho valor. Observe la siguiente tabla:

Intervalo	*Valor de prueba*	$f'(x)$	f *es estrictamente*
$-\infty < x < -1$	$x = -2$	$24 > 0$	creciente
$-1 < x < 2$	$x = 0$	$-12 < 0$	decreciente
$2 < x < +\infty$	$x = 3$	$\dfrac{3}{32} > 0$	creciente

Por lo tanto f es estrictamente creciente en los intervalos $(-\infty, -1)$, y $(2, +\infty)$ y es estrictamente decreciente en el intervalo $(-1, 2)$.

7. Puntos críticos y su clasificación:

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{6(x-2)}{(x+1)^3} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 2;$$

entonces f tiene un punto crítico en $x = 2$.

Ya que para $-1 < x < 2$, la función f es decreciente y para $x > 2$ es creciente; entonces (por el criterio de la primera derivada) f tiene en $x = 2$ un mínimo local estricto. Las coordenadas de este punto crítico son $(2, f(2)) = (2, 0)$.

8. Concavidad:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}\,\frac{6(x-2)}{(x+1)^3} = 6\frac{(x+1)^3 1 - (x-2)3(x+1)^2 1}{[(x+1)^3]^2} = \\ &= 6\frac{(x+1)^3 - 3(x+1)^2(x-2)}{(x+1)^6} = 6\frac{(x+1)^2[(x+1) - 3(x-2)]}{(x+1)^6} = \\ &= \frac{6(x+1-3x+6)}{(x+1)^4} = \frac{6(-2x+7)}{(x+1)^4} \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; f''(x) &= \frac{6(7-2x)}{(x+1)^4}; \end{aligned}$$

Debemos ver dónde $\dfrac{6(7-2x)}{(x+1)^4} > 0$ y dónde $\dfrac{6(7-2x)}{(x+1)^4} < 0$.

Observando que para $x \neq -1$ el denominador $(x+1)^4$ siempre es positivo (por el exponente par), podemos afirmar que el signo de $f''(x)$ depende exclusivamente del signo del factor $(7 - 2x)$.

$$7 - 2x > 0 \;\Leftrightarrow 7 > 2x \;\Leftrightarrow\; x < \frac{7}{2};$$
$$7 - 2x < 0 \;\Leftrightarrow 7 < 2x \;\Leftrightarrow\; x > \frac{7}{2}.$$

Entonces,

$$\frac{6(7-2x)}{(x+1)^4} > 0 \text{ para } x < \frac{7}{2} \;\&\; x \neq -1.$$
$$\frac{6(7-2x)}{(x+1)^4} < 0 \text{ para } x > \frac{7}{2}.$$

Por lo tanto:

La función f es cóncava hacia arriba en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $\left(-1, \frac{7}{2}\right)$.

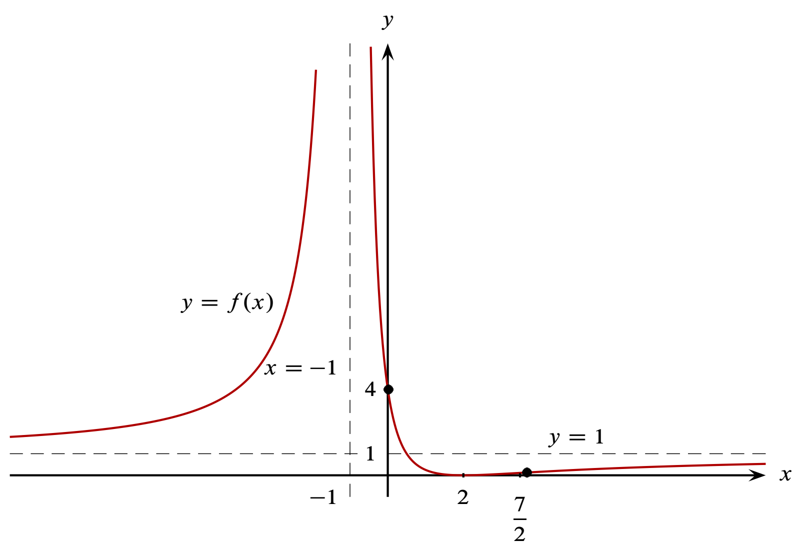
La función f es cóncava hacia abajo en el intervalo $\left(\frac{7}{2}, +\infty\right)$.

9. Puntos de inflexión:

Debido a que en $x = \frac{7}{2}$ existe un cambio de concavidad y a que la función f es continua ahí, podemos afirmar que f tiene en $x = \frac{7}{2}$ un punto de inflexión. Las coordenadas de este punto de inflexión son $\left(\frac{7}{2}, f\left(\frac{7}{2}\right)\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{9}\right)$.

10. Bosquejo de la gráfica:

Con los elementos obtenidos, un bosquejo de la gráfica de $f(x)$ es el siguiente



En $x = 2$ el mínimo local resulta ser mínimo absoluto.

□

Ejemplo 9.1.4 *Dada la función definida por* $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x^2}$, *determinar: dominio, raíces y paridad; intervalos de continuidad y tipo de discontinuidades; asíntotas verticales y horizontales; intervalos de crecimiento y de decrecimiento; máximos y mínimos locales; intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo, así como los puntos de inflexión.*
A partir del análisis anterior, hacer un esbozo de la gráfica de f.

▼ Se tiene:

1. Dominio:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 1 - x^2 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 \neq 1 \right\} = \mathbb{R} - \{-1, 1\} \,.$$

2. Raíces:

$$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x^2}{1-x^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0\,.$$

3. Paridad:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{1-(-x)^2} = \frac{x^2}{1-x^2} = f(x)\,.$$

La función f es par por lo cual su gráfica es simétrica respecto al eje y.

4. Intervalos de continuidad y tipo de discontinuidades:

Por ser f una función racional, es continua en todo su dominio.

Es decir, f es continua en los intervalos $(-\infty, -1)\,, (-1, 1)$ y $(1, +\infty)$. Esto implica que f tiene discontinuidades en $x = -1$ y en $x = 1$.

Veamos ahora $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ & $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$.

Cuando $x \to 1$ ocurre que: $x^2 \to 1$; $1 - x^2 \to 0$ & $\dfrac{x^2}{1-x^2} \to -\infty$ o bien $+\infty$.

Cuando $x \to -1$ ocurre que: $x^2 \to 1$; $1 - x^2 \to 0$ & $\dfrac{x^2}{1-x^2} \to -\infty$ o bien $+\infty$.

Entonces dado que $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$ o bien $+\infty$ & $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$ o bien $+\infty$ las discontinuidades son esenciales e infinitas.

5. Asíntotas verticales:

Precisamos los límites infinitos anteriores determinando los límites laterales.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{1-x^2}\,;$$

$$0 < x < 1 \;\Rightarrow\; 0 < x^2 < 1 \;\Rightarrow\; 1 - x^2 > 0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{1-x^2} > 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{1-x^2} = +\infty;$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{1-x^2}\,;$$

$$x > 1 \;\Rightarrow\; x^2 > 1 \;\Rightarrow\; 1 - x^2 < 0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{1-x^2} < 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{1-x^2} = -\infty.$$

Luego, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

Por ser f una función par, su gráfica es simétrica respecto al eje y. Utilizando este hecho se puede afirmar que $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ y además que la recta $x = -1$ es también una asíntota vertical.

6. Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2\left(\frac{1}{x^2}-1\right)} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}-1} = \frac{1}{0-1} = -1 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to+\infty} f(x) = -1\,.$$

De nuevo, por simetría con respecto al eje y, se tiene que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$.

Por lo tanto f tiene una sola asíntota horizontal que es la recta $y = -1$.

7. Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) = \frac{(1-x^2)2x - x^2(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x-2x^3+2x^3}{(1-x^2)^2}\,;$$
$$f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}\,.$$

Notando que siendo $x \neq \pm 1$ y que $(1-x^2)^2 > 0$, podemos asegurar que $f'(x) > 0$ para $x > 0$ y que $f'(x) < 0$ para $x < 0$. Entonces, f es estrictamente creciente en los intervalos $(0,1)$ y $(1,+\infty)$, y es estrictamente decreciente en los intervalos $(-\infty,-1)$ y $(-1,0)$.

8. Máximos y mínimos locales:

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2x}{(1-x^2)^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0\,;$$

entonces en $x = 0$ se tiene un punto crítico.

Debido a que f es decreciente para $x < 0$ y creciente para $x > 0$, por el criterio de la primera derivada se puede asegurar que f tiene en $x = 0$ un mínimo local estricto.

Ya que $f(0) = \dfrac{0^2}{1-0^2} = \dfrac{0}{1} = 0$, las coordenadas del punto mínimo local son $[0, f(0)] = (0,0)$.

9. Intervalos de concavidad:

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{2x}{(1-x^2)^2}\right] =$$
$$= \frac{(1-x^2)^2 2 - 2x(2)(1-x^2)(-2x)}{[(1-x^2)^2]^2} = \frac{2(1-x^2)^2 + 8x^2(1-x^2)}{(1-x^2)^4} =$$
$$= \frac{2(1-x^2)[(1-x^2)+4x^2]}{(1-x^2)^4} = \frac{2(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}\,.$$

Notando que $2(3x^2+1) > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$, podemos asegurar que el signo de $f''(x)$ es el de $(1-x^2)^3$, que es el mismo de $1-x^2$.

$$f''(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; 1-x^2 > 0 \;\Leftrightarrow\; 1 > x^2 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; |\,x\,| < 1 \;\Leftrightarrow\; -1 < x < 1\,.$$

Entonces, $f''(x) > 0$ en el intervalo $(-1, 1)$.

$$f''(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; 1 - x^2 < 0 \;\Leftrightarrow\; 1 < x^2 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; |\,x\,| > 1 \;\Leftrightarrow\; x < -1 \text{ o bien } x > 1\,.$$

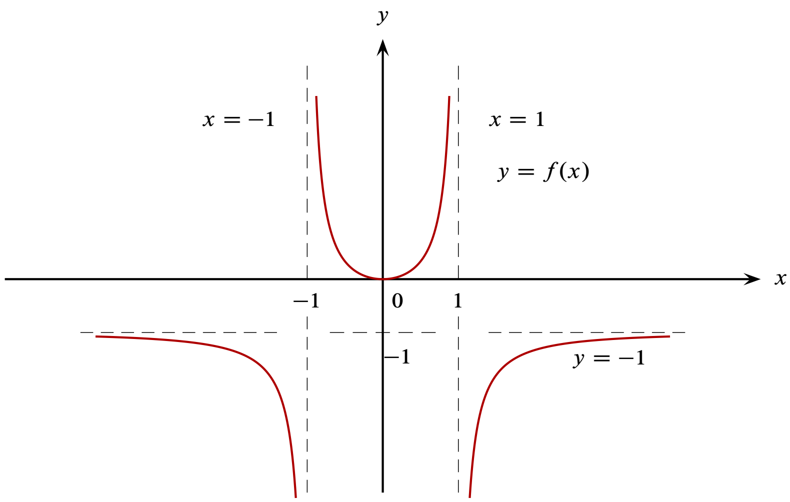
Luego, $f''(x) < 0$ en $(-\infty, -1) \bigcup (1, +\infty)$.

Por lo tanto, f es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-1, 1)$ y cóncava hacia abajo en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$.

10. Puntos de inflexión:

    Existen cambios de concavidad en $x = -1$ y en $x = 1$. Pero debido a que f no está definida en dichos puntos, f no tiene puntos de inflexión. Nótese que $f''(x)$ no tiene raíces.

11. Un bosquejo de la gráfica de f es el siguiente:



$R_f = (-\infty, -1) \bigcup [0, +\infty)$. □

Ejemplo 9.1.5 *Dada la función definida por $f(x) = (4 - x)x^{1/3}$, obtener: dominio, raíces, paridad, intervalos de continuidad, discontinuidades y su clasificación, asíntotas verticales y horizontales, intervalos de crecimiento y de decrecimiento; puntos críticos y su clasificación; intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo; puntos de inflexión y un bosquejo de la gráfica.*

▼

1. Dominio: $D_f = \mathbb{R}$.

2. Raíces:
$$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; (4 - x)x^{\frac{1}{3}} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \,\&\, x = 4\,.$$

3. Paridad: f no es par ni impar pues $f(x) \neq \pm f(-x) = \pm(4 + x)x^{\frac{1}{3}}$.

4. Intervalos de continuidad: por ser producto de funciones continuas en $\mathbb{R}$, f es continua en $\mathbb{R}$ por lo que no tiene discontinuidades ni asíntotas verticales.

5. Asíntotas horizontales: tampoco tiene asíntotas horizontales pues

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty\,.$$

6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

   Derivamos

$$f(x) = (4-x)x^{1/3} = 4x^{1/3} - x^{4/3}\,;$$
$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{-2/3} - \frac{4}{3}x^{1/3} = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{x^{2/3}} - x^{1/3}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{1-x}{x^{2/3}}\right).$$

   Primero resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$, para encontrar sus raíces

$$f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{4}{3}\left(\frac{1-x}{x^{2/3}}\right) = 0 \ \Leftrightarrow\ 1-x = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 1.$$

   Luego excluimos $x = 0$ ya que $f'(0)$ no existe y así obtenemos los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$.

   En el siguiente cuadro se puede apreciar el signo de $f'(x)$ para un valor de prueba dentro de un intervalo. Con esto obtenemos el signo de la primera derivada dentro de dicho intervalo y por lo tanto el tipo de monotonía ahí.

Intervalo	*Valor de prueba*	$f'(x)$	*f es estrictamente*
$-\infty < x < 0$	$x = -1$	$\frac{8}{3} > 0$	creciente
$0 < x < 1$	$x = \frac{1}{8}$	$\frac{14}{3} > 0$	creciente
$1 < x < +\infty$	$x = 8$	$-\frac{7}{3} < 0$	decreciente

   Entonces, la función f es estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ y estrictamente decreciente en el intervalo $(1, +\infty)$.

   Esto es claro ya que el signo de $f'(x)$ es el de $(1-x)$ pues $\frac{4}{3}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} > 0$ siempre.

7. Puntos críticos y su clasificación:

   Por el inciso anterior se sabe que: $f'(x) = 0$ en $x = 1$; que la función f es creciente en el intervalo $(0, 1)$ y que es decreciente en el intervalo $(1, +\infty)$.

   Entonces, por el criterio de la primera derivada, la función f tiene en $x = 1$ un máximo local estricto. Las coordenadas de dicho punto son $[1, f(1)] = (1, 3)$.

8. Intervalos de concavidad:

$$f''(x) = \frac{4}{3}\frac{d}{dx}\left(x^{-2/3} - x^{1/3}\right) = \frac{4}{3}\left(-\frac{2}{3}x^{-5/3} - \frac{1}{3}x^{-2/3}\right) =$$
$$= -\frac{4}{9}\left(\frac{2}{x^{5/3}} + \frac{1}{x^{2/3}}\right) = -\frac{4}{9}\left(\frac{2+x}{x^{5/3}}\right).$$

Primero resolvemos la igualdad $f''(x) = 0$ para determinar sus raíces

$$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; -\frac{4}{9}\left(\frac{x+2}{x^{5/3}}\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; x+2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -2.$$

Luego excluimos $x = 0$ ya que $f''(0)$ no existe y así obtenemos los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$ y $(0, +\infty)$.

Intervalo	*Valor de prueba*	$f''(x)$	*f es cóncava hacia*
$-\infty < x < -2$	$x = -8$	$-\frac{1}{12} < 0$	abajo
$-2 < x < 0$	$x = -1$	$\frac{4}{9} > 0$	arriba
$0 < x < +\infty$	$x = 8$	$-\frac{5}{36} < 0$	abajo

Entonces, la función f es cóncava hacia abajo en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(0, +\infty)$ y es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-2, 0)$.

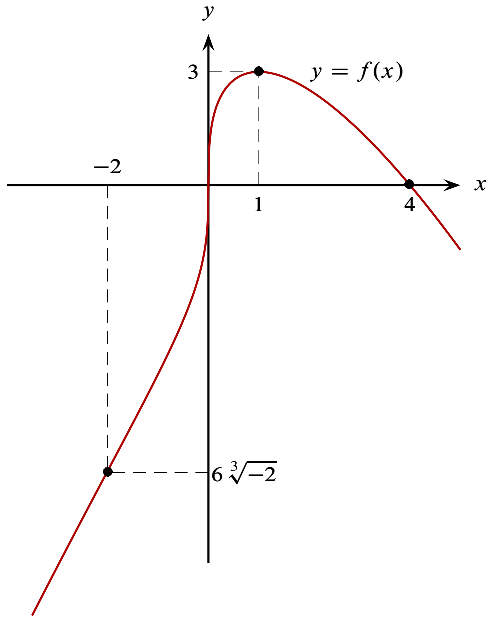
9. Puntos de inflexión:

La función f tiene cambios de concavidad en $x = -2$ y en $x = 0$; además es continua en dichos puntos. Por esto tiene puntos de inflexión en $x = -2$ y en $x = 0$. Las coordenadas de dichos puntos de inflexión son $[-2, f(-2)] = (-2, 6\sqrt[3]{-2}\,) \approx (-2, -7.56)$ y $[0, f(0)] = (0, 0)$.

Es importante notar que en $x = 0$ la función f es continua, no es derivable y tiene un punto de inflexión. De hecho tiene tangente vertical, pues:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{(4-h)h^{\frac{1}{3}}}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{4-h}{h^{\frac{2}{3}}} = \text{``}\left(\frac{4}{0^+}\right)\text{''} = +\infty\,.$$

10. Un bosquejo de la gráfica es el siguiente:



El máximo local resulta ser el máximo absoluto y $R_f = (-\infty, 3]$.

□

Ejercicios 9.1.1 *Soluciones en la página* **??**

Gráfica de una función polinomial.

1. Sea la función $f(x) = 1 - (x-3)^3$.

   Encuentre los extremos relativos y absolutos (si tiene), los intervalos donde sea creciente y donde sea decreciente, también calcule dónde es cóncava hacia arriba y dónde es cóncava hacia abajo. Finalmente haga la gráfica.

2. Dada la función $f(x) = x^4 - 2x^3$, determinar:

   a. Puntos críticos y clasificación.
   b. Intervalos donde crece o bien decrece.
   c. Puntos de inflexión.
   d. Los intervalos de concavidad.
   e. Gráfica de f.

3. Para la función $h(x) = x^4 - 8x^2 + 18$, encuentre:

   a. Los intervalos en los cuales h es creciente o bien decreciente.
   b. Los valores máximos y mínimos locales de h.
   c. Los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo. Los puntos de inflexión.
   d. Bosqueje la gráfica de esa función.

4. Sea la función $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x + 1$.

   a. Encontrar los intervalos de monotonía de la función. Es decir, aquellos intervalos donde la función es creciente y aquellos donde es decreciente.

b. Encontrar los intervalos de concavidad de la función. Es decir, aquellos intervalos donde la función es cóncava hacia abajo y aquellos donde es cóncava hacia arriba.

c. Hacer un bosquejo de la gráfica de la función.

5. Para la función $f(x) = (x^2 - 4)^3$, determine:

   a. Los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento. Los extremos relativos.

   b. Los intervalos de concavidad hacia arriba y los de concavidad hacia abajo. Los puntos de inflexión.

   c. La gráfica.

6. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^4}{2} - x^2 + 3$.

   a. Determinar dominio, intervalos de continuidad y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. (No determine las raíces de f.)

   b. Determine los puntos críticos y los intervalos de monotonía.

   c. Clasifique los puntos críticos (extremos) y determine los intervalos de concavidad.

   d. Obtenga los puntos de inflexión, la gráfica de f y el número de raíces de f. (No intente calcular las raíces de f.)

Ejercicios 9.1.2 *Soluciones en la página* **??**

Gráfica de una función racional.

1. Para la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{1 - x^2}$, determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los puntos críticos y su clasificación, así como los intervalos de concavidad hacia abajo y hacia arriba. Finalmente, con estos elementos haga un bosquejo de la gráfica de la función.

2. Para la función $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2}$, determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los puntos críticos y su clasificación, así como los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo. Finalmente, con estos elementos haga un bosquejo de la gráfica de la función.

3. Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{(x-1)^2}$. Proporcione:

   a. El dominio de la función : D_f.

   b. Las raíces de la función.

   c. Los intervalos de monotonía.

   d. Los intervalos de concavidad.

   e. La gráfica de la función.

4. Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$. Proporcione:

a. El dominio de la función.
b. Los intervalos de monotonía.
c. Los intervalos de concavidad.
d. Los puntos de inflexión.
e. La gráfica de la función.

5. Considere la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^3}$. Halle el dominio y las raíces de la función. Las asíntotas verticales y las horizontales. Los puntos críticos. Los intervalos de concavidad. Haga un bosquejo de esa función.

6. Sea la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$. Diga en qué intervalos es cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo, determine los puntos de inflexión y grafique.

7. Dada la siguiente función: $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x - 2}$, determine los intervalos de monotonía de $f(x)$, los puntos extremos y grafique esa función.

8. Graficar la función $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$, determinando:

   a. Dominio, raíces y simetría.
   b. Asíntotas.
   c. Intervalos de monotonía.
   d. Intervalos de concavidad.
   e. Puntos críticos y su clasificación. Puntos de inflexión.

9. Sea la función $f(x) = -\dfrac{x^2}{(x - 5)^2}$.

   a. Encuentre los puntos críticos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
   b. Encuentre los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad.
   c. Encuentre las asíntotas verticales y horizontales.
   d. Haga un bosquejo de la gráfica.

10. Para la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$, determine:

   a. Dominio, raíces y paridad.
   b. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
   c. Intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo y puntos de inflexión.
   d. Intervalos de continuidad y la clasificación de discontinuidades.
   e. Ecuaciones de las asíntotas verticales y de las asíntotas horizontales.
   f. Máximos y mínimos relativos y absolutos.
   g. Esbozo gráfico y rango.

11. Para la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 4}$, determine:
    a. El dominio y las raíces de la función.
    b. Los intervalos en los cuales f es creciente o bien decreciente.
    c. Los valores máximos y mínimos locales de f.
    d. Los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo.
    e. Las asíntotas verticales y horizontales.
    f. La gráfica de esa función.
12. Considere la función $f(x) = \dfrac{2x}{(2x-4)^2}$ y determine:
    a. El dominio, raíces e intervalos de continuidad.
    b. Asíntotas verticales y horizontales.
    c. Los intervalos de monotonía, los puntos máximos y mínimos (absolutos y relativos).
    d. Los intervalos de concavidad y puntos de inflexión.
    e. Bosquejo gráfico y rango.
13. Para la función $f(x) = \dfrac{x^3 + 2}{x}$, determine:
    a. Dominio, raíces, paridad.
    b. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
    c. Intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo; puntos de inflexión.
    d. Intervalos de continuidad y la clasificación de discontinuidades.
    e. Ecuaciones de las asíntotas verticales y de las asíntotas horizontales.
    f. Máximos y mínimos relativos y absolutos.
    g. Esbozo gráfico y rango.
14. Para la función $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$, determine:
    a. Dominio, raíces, paridad.
    b. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
    c. Intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo; puntos de inflexión.
    d. Intervalos de continuidad y la clasificación de discontinuidades.
    e. Ecuaciones de las asíntotas verticales y de las asíntotas horizontales.
    f. Máximos y mínimos relativos y absolutos.
    g. Esbozo gráfico y rango.

Ejercicios 9.1.3 *Soluciones en la página* **??**

Gráfica de una función con radicales.

1. Sea $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x+3)^{\frac{2}{3}}$, determinar D_f; intervalos de monotonía y de concavidad; máximos y mínimos locales, y puntos de inflexión. Usando esta información, dibujar un esbozo de la gráfica de la función $f(x)$.

2. Sea $f(x) = \sqrt[5]{x^2} - \sqrt[3]{x^5}$, determinar los intervalos de monotonía y de concavidad de f; máximos y mínimos locales, y puntos de inflexión.

   Usando esta información, esbozar la gráfica de f.

3. Considere la función $f(x) = 4x - \sqrt{2x-1}$. Determinar:

   a. Dominio, raíces, intervalos de continuidad.
   b. Intervalos de monotonía y puntos extremos.
   c. Intervalos de concavidad.
   d. Bosquejo gráfico. Proporcione el rango.

4. Grafique la función $f(x) = x^{\frac{1}{5}}(x+3)$ señalando claramente:

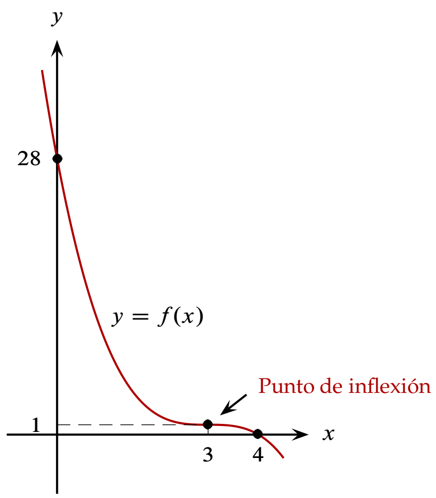
   a. Dominio y raíces.
   b. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
   c. Máximos y mínimos relativos.
   d. Intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo.
   e. Puntos de inflexión.
   f. Máximos y mínimos absolutos (si los hubiese).
   g. Gráfica de la función.

Ejercicios 9.1.1 *Gráfica de una función polinomial, página* **??**

1. Decreciente en $\mathbb{R}$ y no tiene valores extremos;

   cóncava hacia arriba en $(-\infty, 3)$;

   cóncava hacia abajo en $(3, +\infty)$.



2. a. Puntos críticos: $x = 0$ & $x = \dfrac{3}{2}$;

      $x = \dfrac{3}{2}$ es un mínimo;

   b. decreciente en $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right)$;

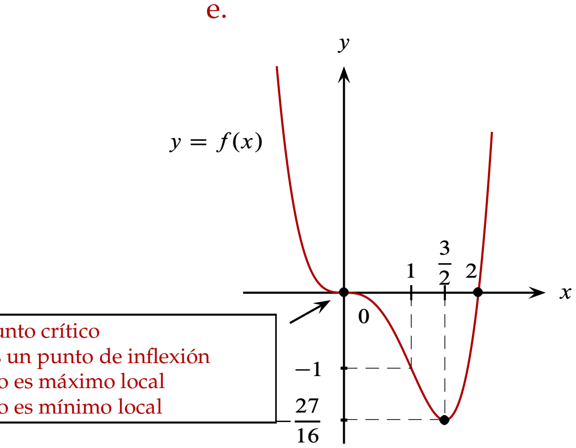
      creciente en $\left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$;

   c. $I_1(0, 0)$ e $I_2(1, -1)$;

   d. cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0)$ y en $(1, +\infty)$;

      cóncava hacia abajo en $(0, 1)$.

   e.



3. a. Crece en $(-2, 0)$ y en $(2, +\infty)$;

      decrece en $(-\infty, -2)$ y en $(0, 2)$;

   b. en $x = -2$ y en $x = 2$ hay mínimos locales;

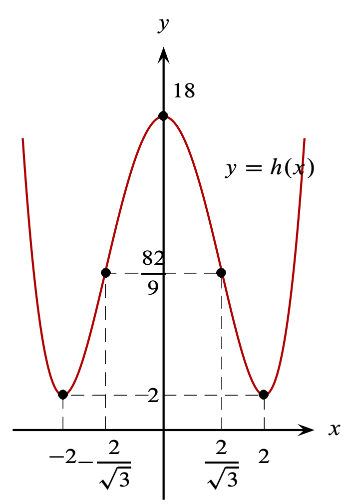
      en $x = 0$ hay un máximo;

   c. cóncava hacia arriba en $\left(-\infty, -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ y en $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$;

      cóncava hacia abajo en $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$;

      en $x = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ y en $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ hay puntos de inflexión.

   d.



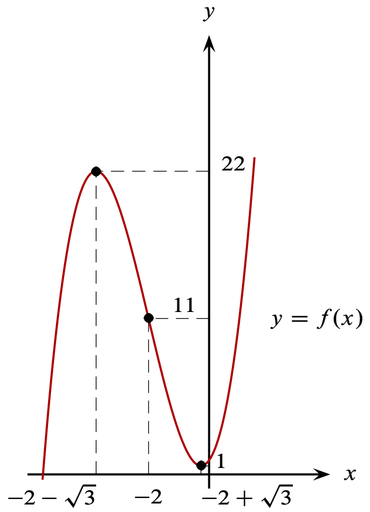
4. a. Crece en $\left(-\infty, -2 - \sqrt{3}\right)$ y en $\left(-2 + \sqrt{3}, +\infty\right)$;

      decrece en $\left(-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}\right)$;

   b. cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2)$;

      cóncava hacia arriba en $(-2, +\infty)$;

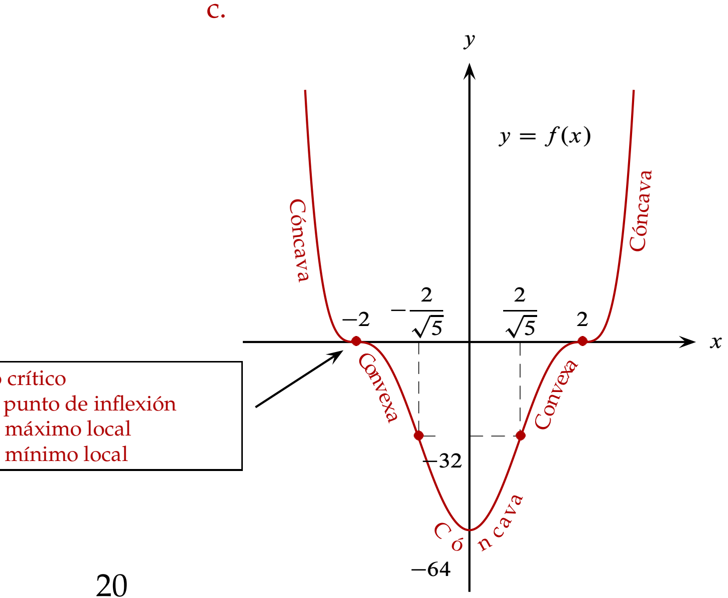
c.



5. a. Creciente en $[0, +\infty)$;
decreciente en $(-\infty, 0]$;
el único extremo relativo es $(0, -64)$, que es un mínimo;

b. cóncava hacia abajo en $\left(-2, -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ y en $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, 2\right)$;
cóncava hacia arriba en $(-\infty, -2)$, $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ y en $(2, +\infty)$;
los puntos $(\pm 2, 0)$ y $\left(\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{-16^3}{125}\right)$ son de inflexión.

c.

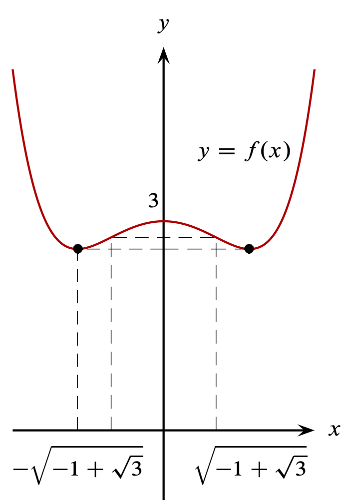


6. a. $D_f = \mathbb{R}$ donde f es continua;
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$;

b. $x \approx \pm 0.8555996$ & $x = 0$ son los puntos críticos;
creciente en $\left(-\sqrt{-1+\sqrt{3}}, 0\right)$ y en $\left(\sqrt{-1+\sqrt{3}}, +\infty\right)$;
decreciente en $\left(-\infty, -\sqrt{-1+\sqrt{3}}\right)$ y en $\left(0, \sqrt{-1+\sqrt{3}}\right)$;

c. en $x \approx \pm 0.8555996$ hay un mínimo relativo;
en $x = 0$ hay un máximo relativo;
$f(x)$ es cóncava en
$$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}, +\infty\right);$$
$f(x)$ es convexa en
$$\left(-\sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}, \sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}\right);$$

d.



puntos de inflexión: $(\pm 0.521325, 2.7684981)$;
no tiene raíces.

Ejercicios 9.1.2 *Gráfica de una función racional, página* **??**

1. En $x = 0$ hay punto crítico;

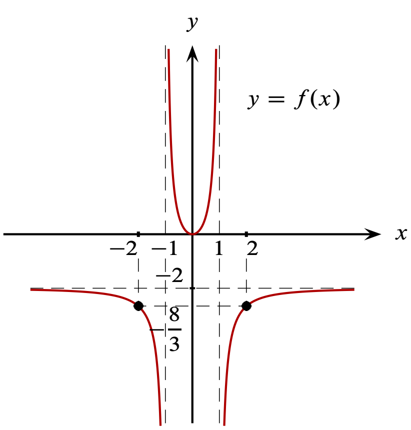
   crece en $(0, 1)$ y en $(1, +\infty)$;

   decrece en $(-\infty, -1)$ y en $(-1, 0)$;

   $f(0) = 0$ es un mínimo relativo;

   cóncava hacia abajo en $(-\infty, -1) \bigcup (1, +\infty)$;

   cóncava hacia arriba en $(-1, 1)$;



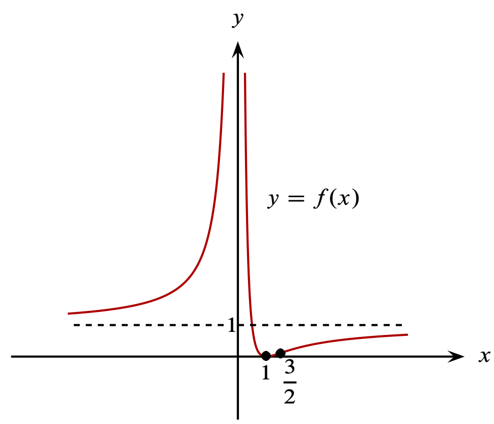
2. Los puntos críticos están en $x = 0$ y en $x = 1$;

   crece en $(-\infty, 0)$ y en $(1, +\infty)$;

   decrece en $(0, 1)$;

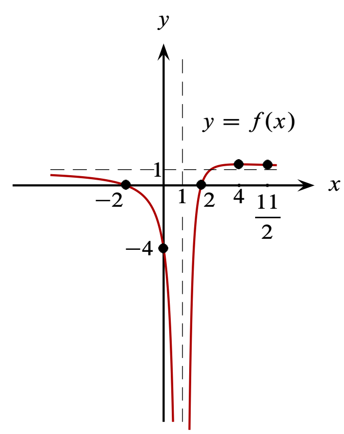
   $f(x)$ es cóncava en $(-\infty, 0) \cup \left(0, \dfrac{3}{2}\right)$;

   $f(x)$ es convexa en $\left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$.



3. a. $D_f = R - \{1\}$;
   b. las raíces: $\{-2, 2\}$;
   c. decreciente en: $(-\infty, 1]$ y en $(4, +\infty)$;
      creciente en: $(1, 4)$;
   d. cóncava hacia abajo en: $(-\infty, 1) \bigcup \left(1, \dfrac{11}{2}\right)$;

      cóncava hacia arriba en: $\left(\dfrac{11}{2}, +\infty\right)$.
   e.

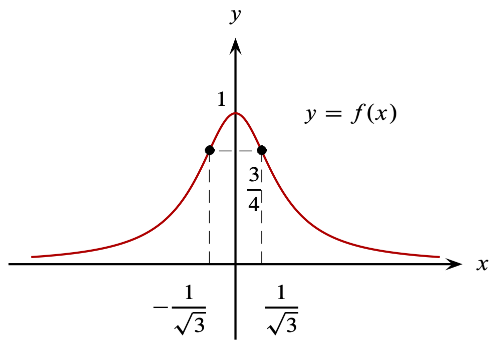


4. a. $D_f = R$;
   b. creciente en: $(-\infty, 0)$;
      decreciente en: $(0, +\infty)$;

c. cóncava hacia arriba en:
$$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \bigcup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right);$$
cóncava hacia abajo en:
$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right);$$

d. $I_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$ e $I_2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$.

e.



5. Puntos críticos: $x = 3$ & $x = -3$;

crreciente en $(-3, 0)$ y en $(0, 3)$;

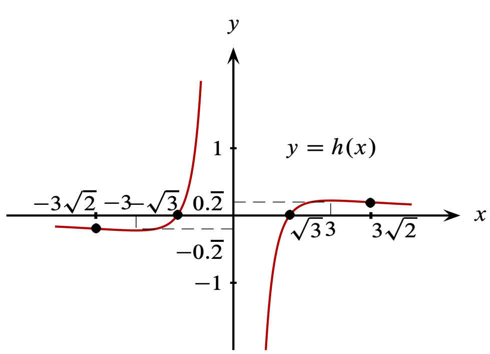
decreciente en $(-\infty, -3)$ y en $(3, +\infty)$;

en $x = -3$ hay un mínimo y en $x = 3$ hay un máximo;

$h(x)$ es cóncava hacia arriba en $\left(-3\sqrt{2}, 0\right) \bigcup \left(3\sqrt{2}, +\infty\right)$;

$h(x)$ es cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, -3\sqrt{2}\right) \bigcup \left(0, 3\sqrt{2}\right)$;

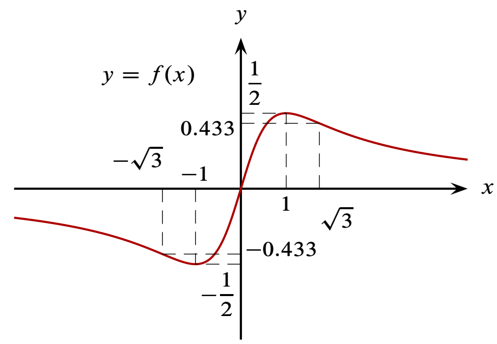
los puntos $\left(-3\sqrt{2}, \frac{-5}{18 \times \sqrt{2}}\right)$ y $\left(3\sqrt{2}, \frac{5}{18 \times \sqrt{2}}\right)$ son de inflexión.



6. Hay puntos de inflexión en $x = 0$ & $x = \pm\sqrt{3}$;

convexa en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$ y en $\left(0, \sqrt{3}\right)$;

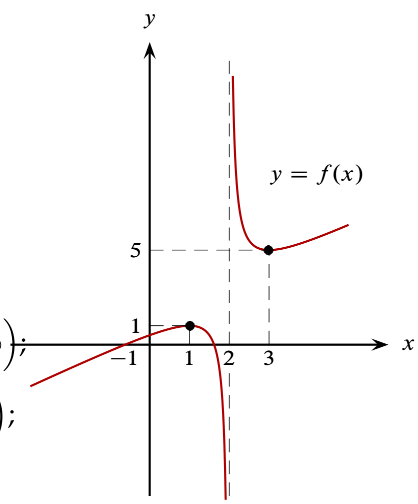
cóncava en $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$ y en $\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$.



7. $f(x)$ es creciente en: $(-\infty, 1)$ y en $(3, +\infty)$;

decreciente en: $(1, 2)$ y en $(2, 3)$;

hay puntos críticos en $x = 1$ y en $x = 3$.



8.
a. $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$;

tiene una raíz en $x = 0$. Es impar;

b. $x = -1$ & $x = 1$ son asíntotas verticales;

$y = 0$ es asíntota horizontal;

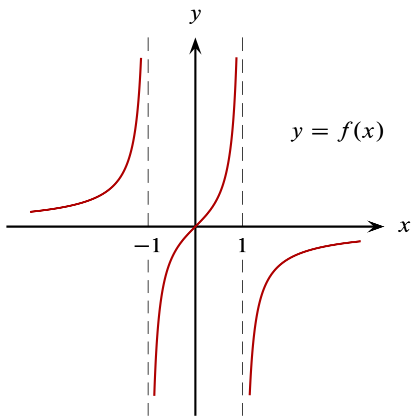
c. creciente en $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y en $(1, +\infty)$;

d. cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1) \bigcup (0, 1)$;

cóncava hacia abajo en $(-1, 0) \bigcup (1, +\infty)$;

e. no tiene puntos críticos;

$(0,0)$ es un punto de inflexión.

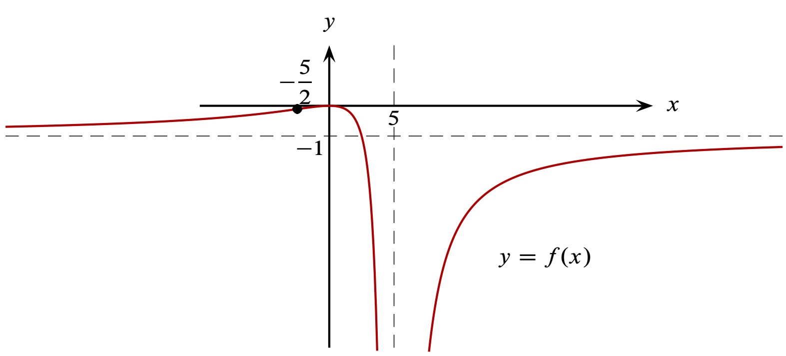


9. a. Punto crítico: $x = 0$;
   creciente en $(-\infty, 0)$ y en $(5, +\infty)$;
   decreciente en $(0, 5)$;

   b. cóncava hacia arriba en $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right)$;
   cóncava hacia abajo en $\left(-\frac{5}{2}, 5\right)$ y en $(5, +\infty)$;
   en $x = -\frac{5}{2}$ hay un punto de inflexión;

   c. $x = 5$ es asíntota vertical;
   $y = -1$ es asíntota horizontal.

   d.



10. a. $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$; raíz: $x = -1$; no es par ni impar;

   b. creciente en $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$;
   decreciente en $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ y en $(0, +\infty)$;

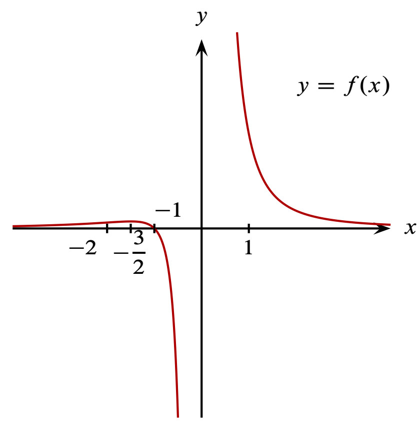
   c. cóncava hacia arriba en $(-\infty, -2)$ y en $(0, +\infty)$;
   cóncava hacia abajo en $(-2, 0)$;
   punto de inflexión en $x = -2$;

   d. f es continua en $(-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty)$;
   f tiene una discontinuidad esencial infinita en $x = 0$;

   e. $x = 0$ es asíntota vertical;
   $y = 0$ es asíntota horizontal;

   f. en $x = -\frac{3}{2}$ hay un punto máximo local estricto;
   f no tiene máximo ni mínimo absoluto;

   g. el rango de f es $\mathbb{R}$.



11. a. $D_f = \mathbb{R} - \{-2, +2\}$; raíz $x = 0$;

   b. creciente en $(-\infty, -2)$ y en $(-2, 0)$;
   decreciente en $(0, 2)$ y en $(2, +\infty)$;

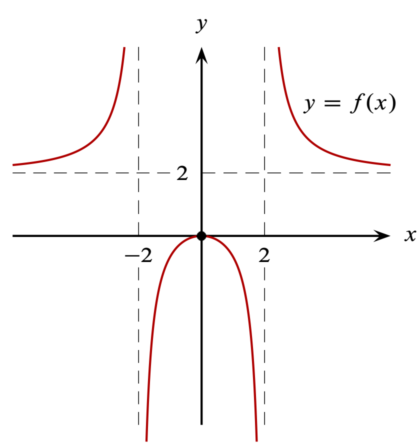
   c. en $x = 0$ hay un máximo local;

   d. cóncava hacia arriba en $(-\infty, -2)$ y en $(2, +\infty)$;

   e. cóncava hacia abajo en $(-2, 2)$;

   f. asíntotas verticales: $x = 2$ & $x = -2$;
   asíntota hotizontal: $y = 2$.

   g.



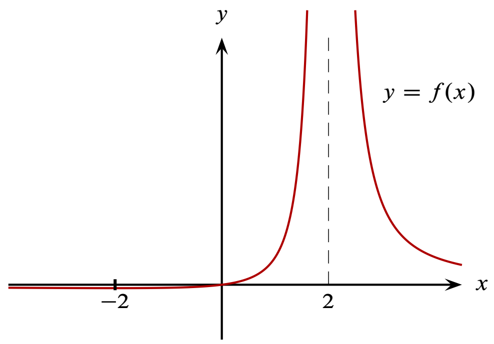
12. a. $D_f = \mathbb{R} - \{\,2\,\}$;
   raíz: $x = 0$;
   $f(x)$ es continua en su dominio;

b. $y = 0$ es asíntota horizontal;
$x = 2$ es asíntota vertical;

c. creciente en $(-2, 2)$;
decreciente en $(-\infty, -2)$ y en $(2, +\infty)$;
f no tiene máximo relativo ni absoluto;
en $x = -2$ hay un mínimo local que es absoluto;

d. cóncava hacia abajo en $(-\infty, -4)$;
cóncava hacia arriba en $(-4, 2)$ y en $(2, +\infty)$;
en $x = -4$ hay un punto de inflexión;

e.



$R_f = \left[-\frac{1}{16}, +\infty\right)$.

13. a. Dominio: $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$;
raíz: $x = -\sqrt[3]{2}$;
no es ni par ni impar;

b. decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $x \in (0, 1)$;
creciente en $(1, +\infty)$;

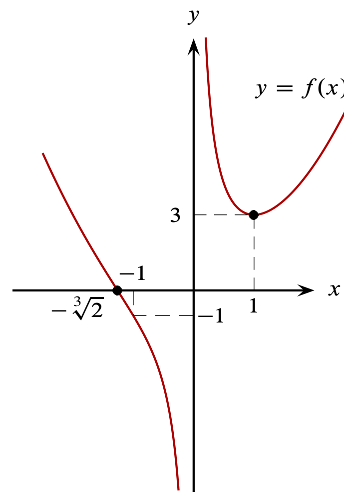
c. cócava hacia arriba en $\left(-\infty, -\sqrt[3]{2}\right) \bigcup (0, +\infty)$;
cócava hacia abajo en $\left(-\sqrt[3]{2}, 0\right)$;
$x = -\sqrt[3]{2}$ punto de inflexión;

d. la función es continua en todo su dominio;
en $x = 0$ tiene una discontinuidad esencial;

e. $x = 0$ es una asíntota vertical;
no tiene asíntotas horizontales;

f. $x = 1$ es un mínimo local;
no existen máximos ni mínimos absolutos.

g.



El rango: $R_f = \mathbb{R}$.

14. a. Dominio: $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$;
raíz: $x = 0$;
no es par ni es impar;

b. decreciente en $(-\infty, -1)$ y en $(1, +\infty)$;
creciente en $(-1, 1)$;

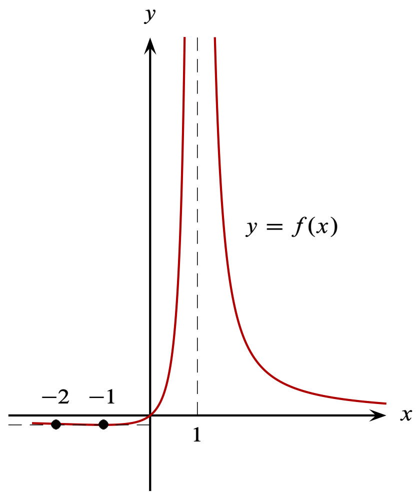
c. cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2)$;
cóncava hacia arriba en $(-2, +\infty)$;
en $x = -2$ hay un punto de inflexión;

d. continua en su dominio $\mathbb{R} - \{1\}$;
en $x = 1$ hay una discontinuidad esencial infinita;

e. $y = 0$ es asíntota horizontal de $f(x)$;
$x = 1$ es asíntota vertical de $f(x)$;

f. en $x = -1$ hay un mínimo local que es un mínimo absoluto;
no tiene máximo absoluto;

g.



rango: $R_f = \left[-\dfrac{1}{4}, +\infty\right)$.

Ejercicios 9.1.3 *Gráfica de una función con radicales, página* **??**

1. $D_f = \mathbb{R}$;

   crece en $(-\infty, -3)$, en $(-1, 0)$ y en $(0, +\infty)$;

   decrece en $(-3, -1)$;

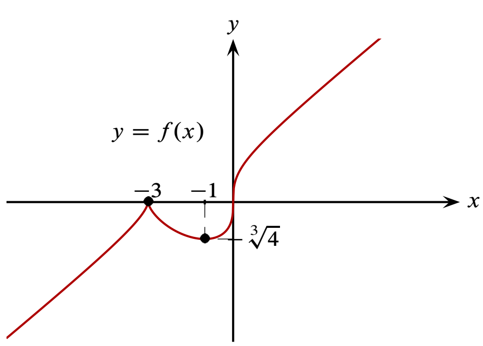
   cóncava hacia arriba en $(-\infty, -3) \bigcup (-3, 0)$;

   cóncava hacia abajo en $(0, +\infty)$;

   puntos críticos en $x = 0$, $x = -1$ y en $x = -3$;

   en $x = -1$ hay un mínimo. En $x = -3$ hay un máximo;

   hay punto de inflexión en $x = 0$.



2. Creciente en $(0, 0.32411)$;

   decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0.32411, +\infty)$;

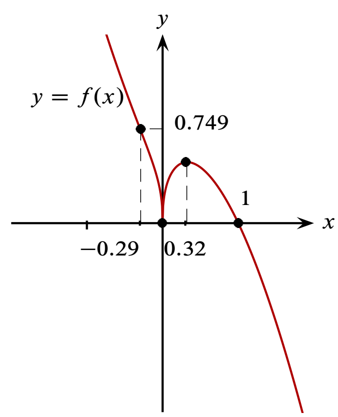
   cóncava hacia arriba en $(-\infty, -0.298242)$;

   cóncava hacia abajo en $(-0.298242, 0) \bigcup (0, +\infty)$;

   $(0, 0)$ es un mínimo local;

   $(0.484273, 0.1529285)$ es un máximo local;

   $(-0.298242, 0.7494817)$ es punto de inflexión.



3. a. $D_f = \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$; no tiene raíces;

   es continua en todo su dominio;

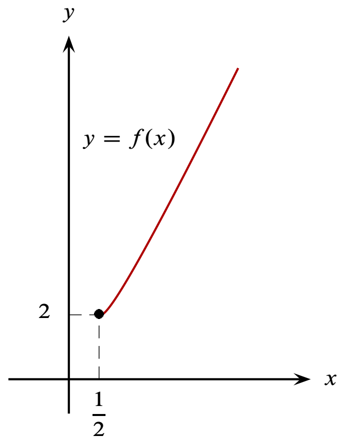
   b. creciente en $\left(\dfrac{17}{32}, +\infty\right)$;

   decreciente en $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{17}{32}\right)$;

   el punto crítico único: $\left(\dfrac{17}{32}, \dfrac{15}{8}\right)$ es un mínimo absoluto;

   c. la función es cóncava hacia arriba.

d.



$R_f = \left[\dfrac{15}{8}, +\infty\right).$

4. a. Dominio: $D_f = \mathbb{R}$;
raíces: $x = 0$ & $x = -3$;

b. decreciente en $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$;
creciente en $\left(-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$;

c. $x = -\dfrac{1}{2}$ es un mínimo local;

d. cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0) \bigcup (2, +\infty)$;
cóncava hacia abajo en $(0, 2)$;

e. $(0, 0)$ y $(2, 5\sqrt[5]{2}) \approx (2, 5.74)$ son puntos de inflexión;

f. en $x = -\dfrac{1}{2}$ tiene un mínimo absoluto;
$f(x)$ no tiene máximo absoluto.

g.