CAPÍTULO

2

Funciones

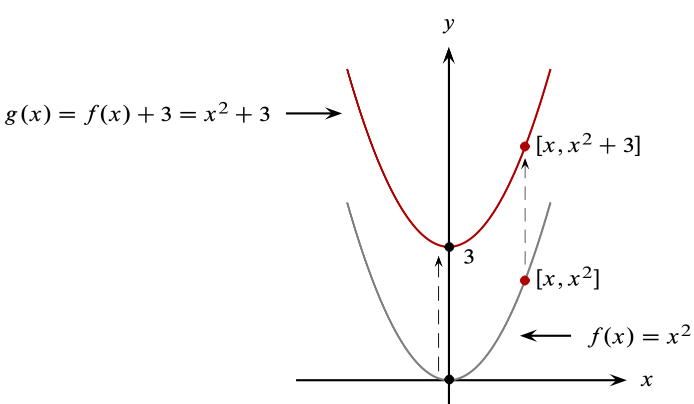
2.7 Transformaciones de funciones[1]

Se pretende ahora que, a partir del conocimiento de la gráfica de una función f, esencialmente mediante traslaciones, contracciones y reflexiones, se obtenga un bosquejo de la gráfica de una función g de la forma

$$g(x) = kf(ax - b) + c\,.$$

Ejemplo 2.7.1 *La gráfica de:* $g(x) = x^2 + 3$ *es la gráfica de* $f(x) = x^2$ *desplazada hacia arriba* 3 *unidades.*

▼



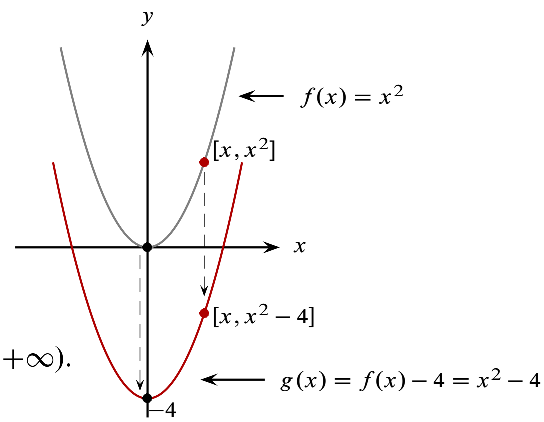
$D_g = D_f$, $R_f = [0, +\infty)$ & $R_g = [3, +\infty)$.

□

Ejemplo 2.7.2 *La gráfica de:* $g(x) = x^2 - 4$ *es la gráfica de* $f(x) = x^2$ *desplazada hacia abajo* 4 *unidades.*

[1] canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

▼



$D_g = D_f R_f = [0, +\infty)$ & $R_g = [-4, +\infty)$.

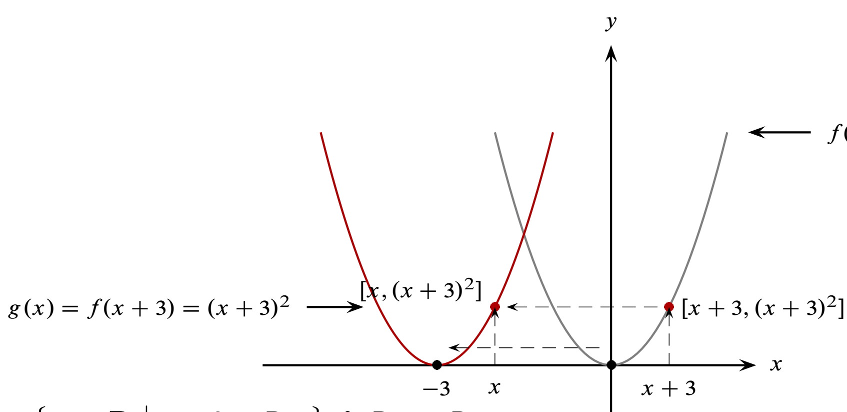
□

De los dos ejemplos anteriores vemos que:

- La gráfica de $g(x) = f(x) + c$ es la gráfica de f desplazada verticalmente c unidades.
  En este caso $D_g = D_f$ & $R_g = \{\, f(x) + c \mid f(x) \in R_f \,\}$.

Ejemplo 2.7.3 *La gráfica de $g(x) = (x + 3)^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ desplazada hacia la izquierda 3 unidades.*

▼

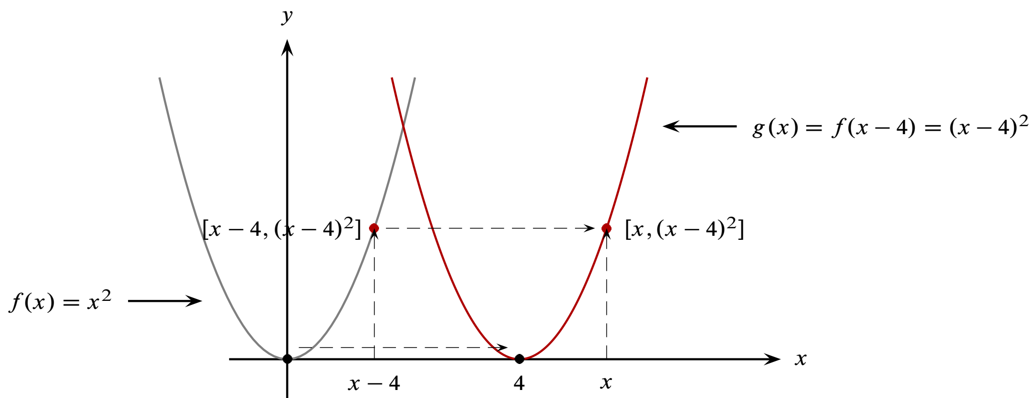


$D_g = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x + 3 \in D_f \,\}$ & $R_g = R_f$.

□

Ejemplo 2.7.4 *La gráfica de $g(x) = (x - 4)^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ desplazada hacia la derecha 4 unidades.*

▼



$$D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x-4 \in D_f \right\} \ \& \ R_g = R_f .$$

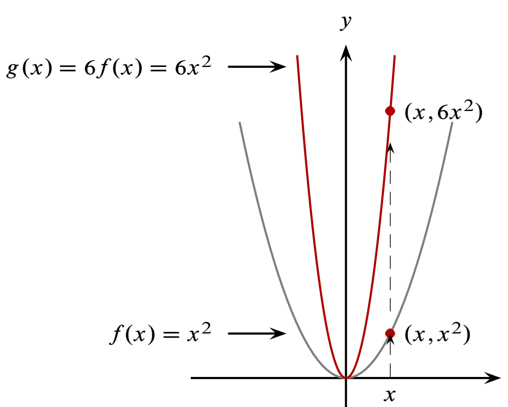
□

De los dos ejemplos anteriores vemos que:

- La gráfica de: $g(x) = f(x-c)$ es la gráfica de f desplazada horizontalmente c unidades.
  En este caso $D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x-c \in D_f \right\}$ & $R_g = R_f$.

Ejemplo 2.7.5 *La gráfica de $g(x) = 6x^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ alargada 6 veces en la dirección vertical.*

▼

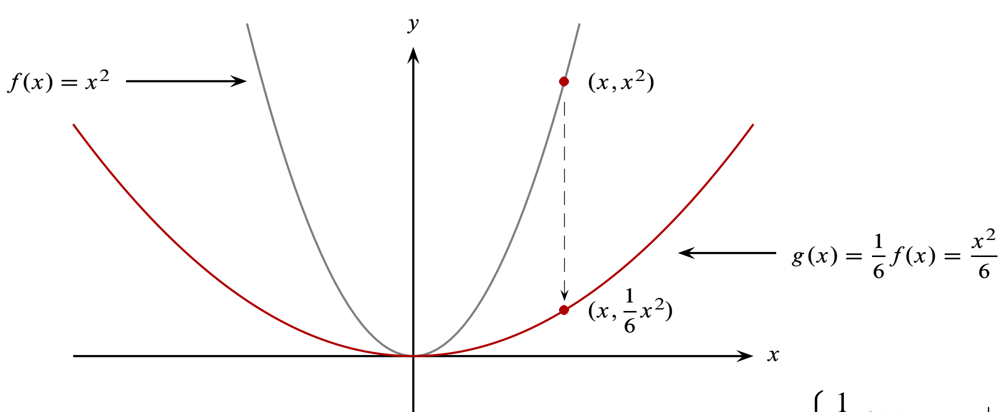


$$D_g = D_f \ \& \ R_g = \left\{ 6f(x) \,\middle|\, f(x) \in R_f \right\}.$$

□

Ejemplo 2.7.6 *La gráfica de $g(x) = \dfrac{1}{6}x^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ comprimida 6 veces en la dirección vertical.*

▼

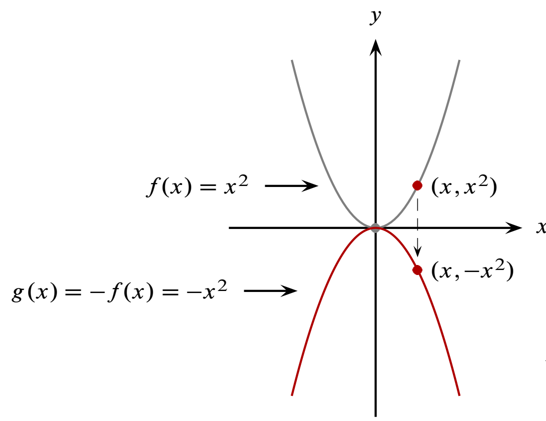


$$D_g = D_f \ \& \ R_g = \left\{ \frac{1}{6}f(x) \in \mathbb{R} \,\middle|\, f(x) \in R_f \right\}.$$

□

Ejemplo 2.7.7 *La gráfica de $g(x) = -x^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ reflejada respecto al eje x.*

▼



$$D_g = D_f \;\&\; R_g = \left\{ -f(x) \in \mathbb{R} \;\middle|\; f(x) \in R_f \right\}.$$

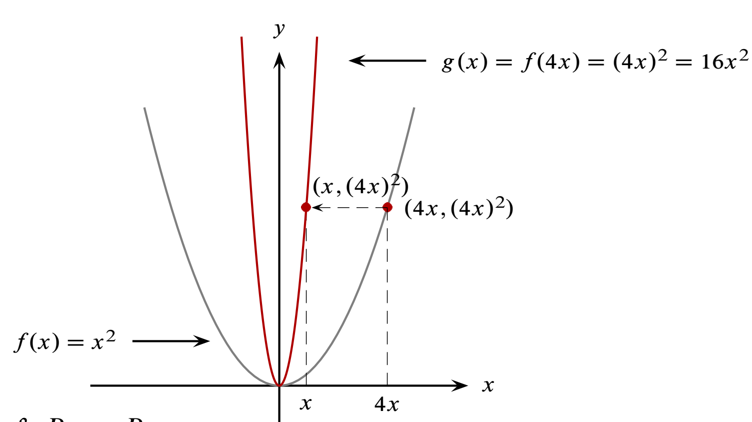
□

De los tres ejemplos anteriores vemos que:

- La gráfica de $g(x) = kf(x)$ es la gráfica de f:
  1. Alargada verticalmente si $k > 1$.
  2. Comprimida verticalmente si $0 < k < 1$.
  3. Si $k < 0$, consideramos a la gráfica de la función $|k|f(x) = -kf(x)$ y la reflejamos con respecto al eje de las x.
     $D_f = D_g$, $R_g = \left\{ kf(x) \in \mathbb{R} \;\middle|\; f(x) \in \mathbb{R} \right\}$.

Ejemplo 2.7.8 *La gráfica de $g(x) = (4x)^2$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ comprimida horizontalmente 4 veces.*

▼

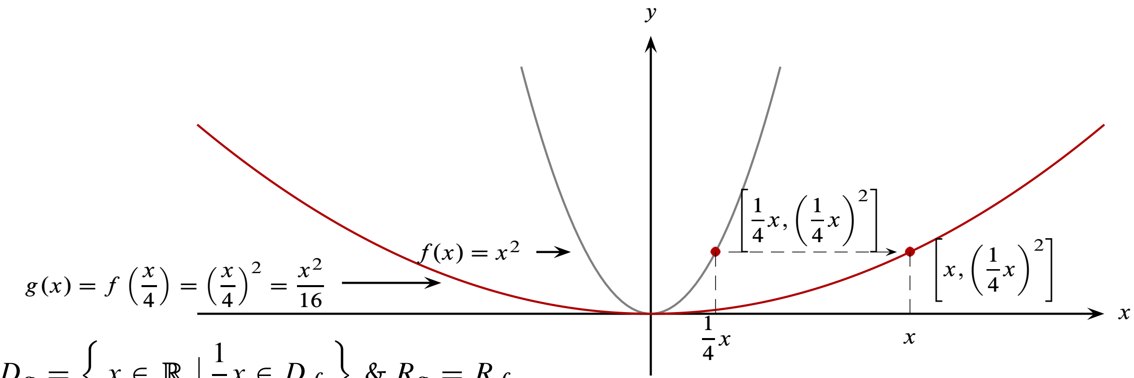


$$D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 4x \in D_f \right\} \;\&\; R_g = R_f.$$

□

Ejemplo 2.7.9 *La gráfica de* $g(x) = \left(\frac{1}{4}x\right)^2$ *es la gráfica de* $f(x) = x^2$ *alargada horizontalmente* 4 *veces.*

▼

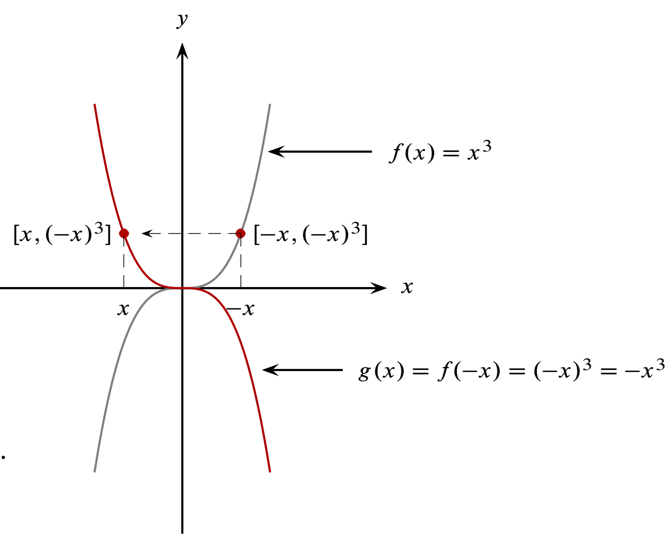


$D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{4}x \in D_f \right\}$ & $R_g = R_f$.

□

Ejemplo 2.7.10 *La gráfica de* $g(x) = (-x)^3$ *es la gráfica de* $f(x) = x^3$ *reflejada respecto al eje* y.

▼



$D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -x \in D_f \right\}$ & $R_g = R_f$.

□

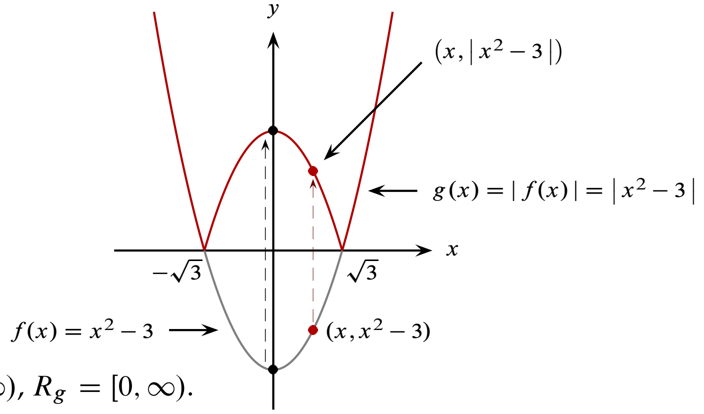
De los tres ejemplos anteriores vemos que:

- La gráfica de $g(x) = f(kx)$ es la gráfica de f:
  1. Comprimida horizontalmente si $k > 1$.
  2. Alargada horizontalmente si $0 < k < 1$.
  3. Si $k < 0$, consideramos a la gráfica de la función $f(|k|x) = f(-kx)$ y la reflejamos con respecto al eje de las y.
     $D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid kx \in D_f \right\}$, $R_g = R_f$.

Por otro lado, tenemos el siguiente resultado:

Ejemplo 2.7.11

Si $g(x) = \left| x^2 - 3 \right|$, *la gráfica de* g *es la gráfica de* $f(x) = x^2 - 3$ *cuando* $x^2 - 3 \geq 0$ *y la simétrica de* f *con respecto al eje de las* x *cuando* $x^2 - 3 < 0$.

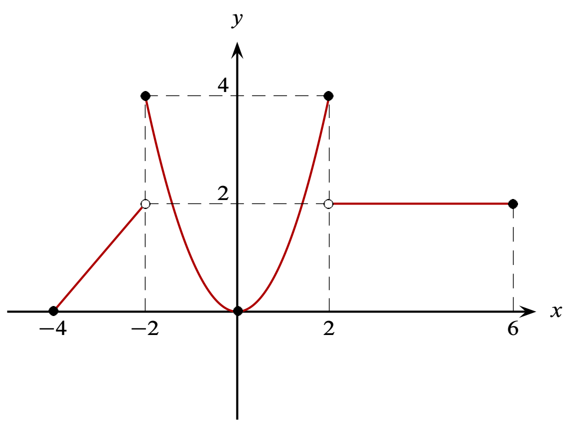


$D_g = D_f$, $R_f = [-3, \infty)$, $R_g = [0, \infty)$.

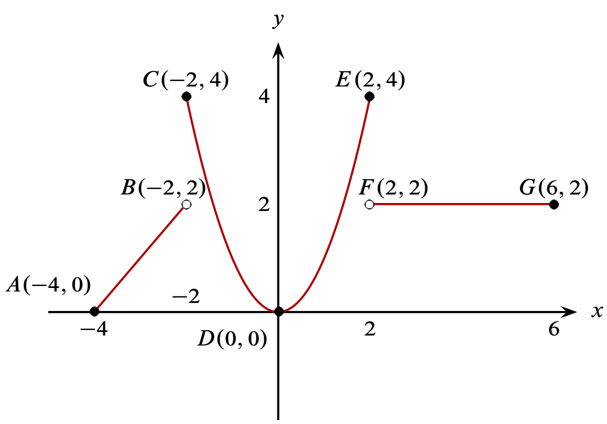
- Si $g(x) = |f(x)|$, la gráfica de $g(x)$ es la gráfica de f cuando $f(x) \geq 0$ y es la simétrica de f con respecto al eje de las x cuando $f(x) < 0$.

  $D_g = D_f$, $R_g = \left\{ |f(x)| \;\middle|\; f(x) \in \mathbb{R} \right\}$.

Ejemplo 2.7.12 *Considerando que la siguiente curva es la gráfica de la función* f, *bosquejar la gráfica de la función* $g(x) = f(2x) - 3$.



▼ Elegimos 7 puntos apropiados que determinan la gráfica de f cuyas imágenes determinarán la de g:



1. Primero se obtiene la curva $y = f(2x)$ comprimiendo horizontalmente la curva $y = f(x)$ por un factor de 2. La transformación de los puntos ocurre así:

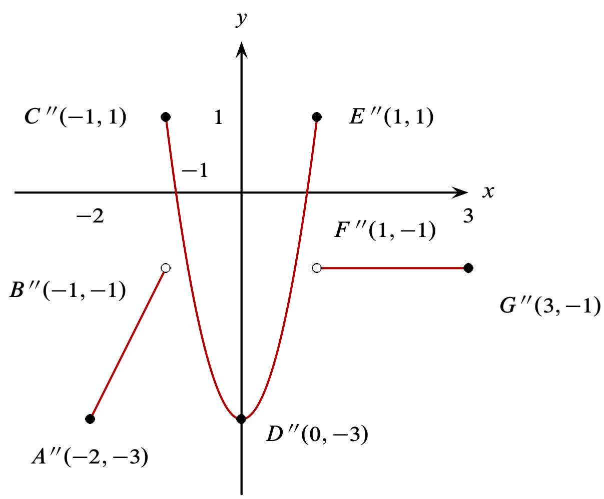
$$\begin{array}{l} A(-4,0),\ B(-2,2),\ C(-2,4),\ D(0,0),\ E(2,4),\ F(2,2)\ \&\ G(6,2);\\ A'(-2,0),\ B'(-1,2),\ C'(-1,4),\ D'(0,0),\ E'(1,4),\ F'(1,2)\ \&\ G'(3,2). \end{array}$$

2. Luego se obtiene la curva $y = f(2x) - 3$ desplazando verticalmente 3 unidades hacia abajo a la curva $y = f(2x)$.

   La transformación de los puntos ocurre así:

$$\begin{array}{l} A'(-2,0),\ B'(-1,2),\ C'(-1,4),\ D'(0,0),\ E'(1,4),\ F'(1,2)\ \&\ G'(3,2);\\ A''(-2,-3),\ B''(-1,-1),\ C''(-1,1),\ D''(0,-3),\ E''(1,1),\ F''(1,-1)\ \&\ G''(3,-1). \end{array}$$

3. La gráfica de $g(x) = f(2x) - 3$ es así:



También lo podríamos resolver directamente notando que $D_f = [-4, 6]$ y que por tanto el $D_g = [-2, 3]$. Usando los puntos elegidos anterioremente tenemos:

$A\,(-4,0)$: $g(-4) = f(-4) - 3 = 0 - 3 = -3 \Rightarrow A''\,(-2,-3) \in G_g$;

$B\,(-2,2)$: $g(-1^-) = f(-2^-) - 3 = 2 - 3 = -1 \Rightarrow B''\,(-1,-1) \notin G_g$;

$C\,(-2,4)$: $g(-1) = f(-2) - 3 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow C''\,(-1,1) \in G_g$;

$D\,(0,0)$: $g(0) = f(0) - 3 = 0 - 3 = -3 \Rightarrow D''\,(0,-3) \in G_g$;

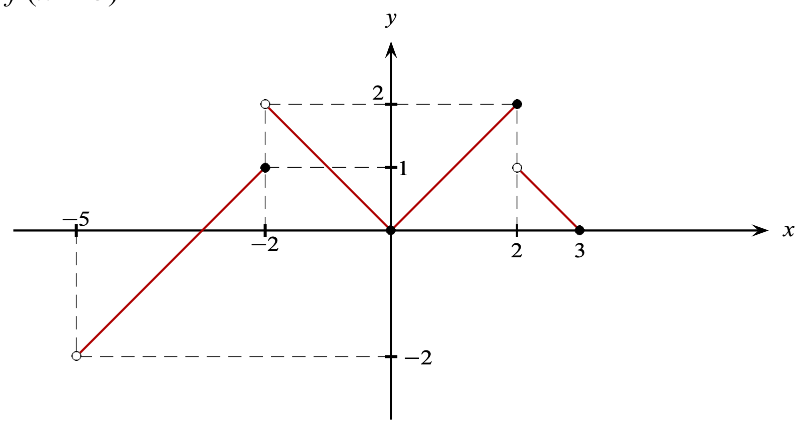
$E\,(2,4)$: $g(1) = f(2) - 3 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow E''\,(1,1) \in G_g$;

$F\,(2,2)$: $g(1^+) = f(2^+) - 3 = 2 - 3 = -1 \Rightarrow F''\,(1,-1) \notin G_g$;

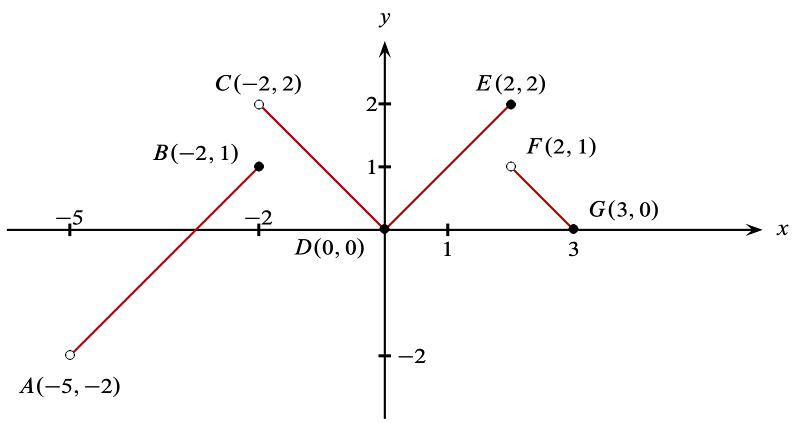
$G\,(6,2)$: $g(3) = f(6) - 3 = 2 - 3 = -1 \Rightarrow G''\,(3,-1) \in G_g$.

□

Ejemplo 2.7.13 *Considerando que la siguiente figura es la gráfica de una función f, bosquejar la gráfica de la función $g(x) = 1 - 2f(x-3)$.*



▼ Elegimos 7 puntos apropiados que determinan la gráfica de f cuyas imágenes determinarán la de g:



1. Primero se obtiene la curva $y = f(x-3)$ desplazando horizontalmente 3 unidades hacia la derecha a la curva $y = f(x)$. La transformación de los puntos ocurre así:

$$
\begin{array}{lllllll}
A(-5,-2), & B(-2,1), & C(-2,2), & D(0,0), & E(2,2), & F(2,1) & \& \, G(3,0)\,; \\
A'(-2,-2), & B'(1,1), & C'(1,2), & D'(3,0), & E'(5,2), & F'(5,1) & \& \, G'(6,0)\,.
\end{array}
$$

2. Luego se obtiene la curva $y = 2f(x-3)$ alargando verticalmente a la curva $y = f(x-3)$ por un factor de 2. La transformación de los puntos ocurre así:

$$
\begin{array}{lllllll}
A'(-2,-2), & B'(1,1), & C'(1,2), & D'(3,0), & E'(5,2), & F'(5,1) & \& \, G'(6,0)\,; \\
A''(-2,-4), & B''(1,2), & C''(1,4), & D''(3,0), & E''(5,4), & F''(5,2) & \& \, G''(6,0)\,.
\end{array}
$$

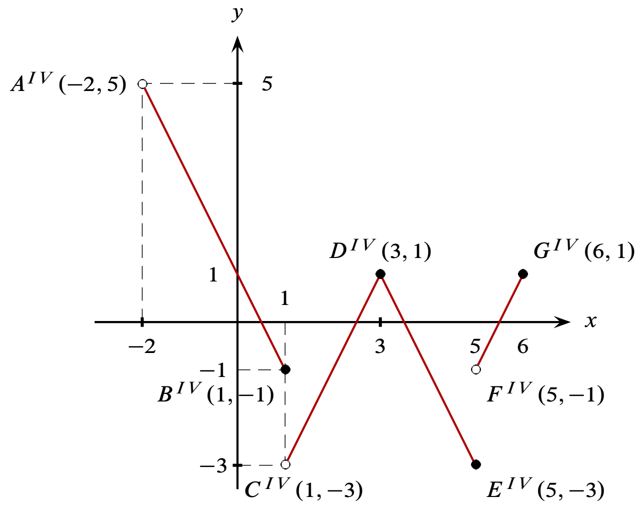
3. Después se obtiene la curva $y = -2f(x-3)$ poniendo un espejo en el eje x para reflejar a la curva $y = 2f(x-3)$. Esto se consigue multiplicando a las ordenadas por -1. La transformación de los puntos ocurre así:

$$
\begin{array}{lllllll}
A''(-2,-4), & B''(1,2), & C''(1,4), & D''(3,0), & E''(5,4), & F''(5,2) & \& \, G''(6,0)\,; \\
A'''(-2,4), & B'''(1,-2), & C'''(1,-4), & D'''(3,0), & E'''(5,-4), & F'''(5,-2) & \& \, G'''(6,0)\,.
\end{array}
$$

4. Finalmente se obtiene la curva $y = -2f(x-3)+1$ desplazando hacia arriba una unidad a la curva $y = -2f(x-3)$. La transformación de los puntos ocurre así:

$$A'''(-2,4),\ \ B'''(1,-2),\ \ C'''(1,-4),\ \ D'''(3,0),\ \ E'''(5,-4),\ \ F'''(5,-2)\ \ \&\ G'''(6,0)\,;$$
$$A^{IV}(-2,5),\ B^{IV}(1,-1),\ C^{IV}(1,-3),\ D^{IV}(3,1),\ E^{IV}(5,-3),\ F^{IV}(5,-1)\ \&\ G^{IV}(6,1)\,.$$

5. Por lo tanto, la gráfica de $g(x) = 1-2f(x-3)$ es



También lo podríamos resolver directamente notando que $D_f = [-5,3]$ y que por tanto el $D_g = [-2,6]$. Usando los puntos elegidos anterioremente tenemos:

$A\,(-5,-2)$: $g(-2) = 1-2f(-5) = 1-2(-2) = 1+4 = 5 \Rightarrow A^{iv}\,(-2,-5) \notin G_g$;

$B\,(-2,-1)$: $g(1) = 1-2f(-2) = 1-2(1) = 1-2 = -1 \Rightarrow B^{iv}\,(1,-1) \in G_g$;

$C\,(-2,2)$: $g(1^+) = 1-2f(-2^+) = 1-2(2) = 1-2 = -3 \Rightarrow C^{iv}\,(1,-3) \notin G_g$;

$D\,(0,0)$: $g(3) = 1-2f(0) = 1-2(0) = 1-0 = 0 \Rightarrow D^{iv}\,(3,1) \in G_g$;

$E\,(2,2)$: $g(5) = 1-2f(2) = 1-2(2) = 1-4 = -3 \Rightarrow E^{iv}\,(5,-3) \in G_g$;

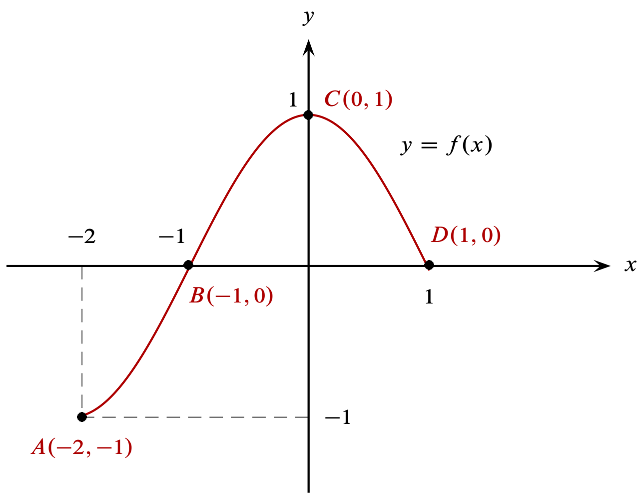
$F\,(2,1)$: $g(5^+) = 1-2f(2^+) = 1-2(1) = 1-2 = -1 \Rightarrow F^{iv}\,(5,-1) \notin G_g$;

$G\,(3,0)$: $g(6) = 1-2f(3) = 1-2(0) = 1-0 = 1 \Rightarrow G^{iv}\,(6,1) \in G_g$.

□

Ejercicios 2.7.1 *Soluciones en la página 15*

1. Considerando la siguiente figura como la gráfica de cierta función f,

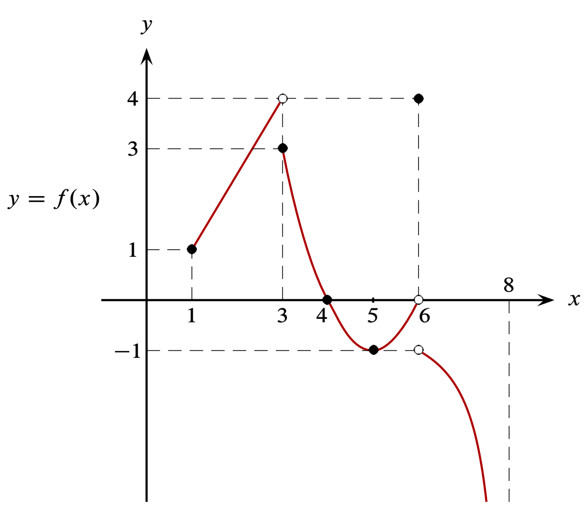


realizar un bosquejo de la gráfica de la función

$$g(x) = -2f(x-1) + 3.$$

Especificar la nueva posición de los puntos $A(-2,-1)$; $B(-1,0)$; $C(0,1)$ & $D(1,0)$.

2. Considerando que la figura siguiente es un bosquejo de la gráfica de cierta función f, obtenga el dominio, el rango, las raíces así como un bosquejo de la gráfica de la función $g(x) = -3f(x+5)+2$.



3. Considerando la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0\,; \\ x^2 - 2x - 3 & \text{si } x \geq 0\,. \end{cases}$$

a. Realizar un bosquejo de la gráfica de la función f.

b. Realizar un bosquejo de la gráfica de la función $g(x) = f(x-3) - 2$.

c. Obtener dominio, rango y raíces de la función g.

4. Dada

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x+1 & \text{si } x\le -1\,;\\ 2x-3 & \text{si } x>-1\,. \end{cases}$$

Obtenga la gráfica de $h(x)=f(x-3)-1$.

5. Dada la función

$$g(t)=\begin{cases} 4-t^2 & \text{si } -3\le t<1\,;\\ 3t & \text{si } 1<t<2\,. \end{cases}$$

   a. Bosquejar su gráfica y determinar dominio, rango y raíces.
   b. Obtener los intervalos en los que $g(t)\ge 0$ así como aquellos en donde $g(t)<0$.
   c. A partir de la gráfica obtenida, bosquejar la gráfica de $f(t)=2g(t+2)-3$.

6. Considere la función:

$$f(x)=\begin{cases} x+5 & \text{si } -8\le x<0\,;\\ \sqrt{x} & \text{si } 0\le x\le 6\,. \end{cases}$$

   a. Determinar dominio, raíces o puntos en donde la función vale cero, gráfica y rango de f.
   b. A partir de la gráfica de f, construir la gráfica de $h(x)=1-2f(x+3)$.

7. Considere la función f definida por

$$f(x)=\begin{cases} 1-2x & \text{si } x<0\,;\\ x^2 & \text{si } x\ge 1\,. \end{cases}$$

   a. Grafique la función f.
   b. Usando la gráfica de f, construir la gráfica de la función $h(x)=3-2f(2x+1)$ y obtener una expresión o fórmula para $h(x)$.

8. Sea

$$f(x)=\begin{cases} 3 & \text{si } -6\le x<-4\,;\\ x^2+2x-3 & \text{si } -4\le x\le 0\,;\\ 2x-3 & \text{si } \quad 0<x<4\,, \end{cases}$$

determine:

   a. Un esbozo gráfico de la función.
   b. Dominio, rango, raíces, paridad, intervalos de monotonía e intervalos donde $f(x)>0$ y donde $f(x)<0$.
   c. Un esbozo gráfico para la función $g(x)=-f(x-1)+2$.

9. Sea

$$g(x)=\begin{cases} 2x-4 & \text{si } -4<x\le -1\,;\\ -1 & \text{si } -1<x<3\,;\\ (x-4)^2 & \text{si } x\ge 3\,. \end{cases}$$

a. Obtenga dominio, raíces y un bosquejo de la gráfica de g, así como su rango.

b. Grafique la función $h(x) = g(x+3) - 2$, a partir de la gráfica de g.

10. Sea f la función dada por $f(t) = t^2$ con $0 \le t \le 1$.

    Sea g la función definida por

$$g(t) = \begin{cases} -f(-t) & \text{si } -1 \le t \le 0\,; \\ f(t) & \text{si } 0 \le t \le 1\,. \end{cases}$$

   a. Hallar el dominio y hacer un bosquejo de la gráfica de g indicando su rango o imagen.

   b. Si $h(t) = 2g(t-1) + 3$, hacer un bosquejo de la gráfica de esta nueva función e indicar su dominio y rango.

11. Sean

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3-x} & \text{si } x \le -1; \\ |\,3x - 4\,| & \text{si } x > -1. \end{cases}$$

$$g(x) = 3f(x+1) - 4,$$

    determinar las gráficas de ambas funciones, el dominio y el rango de la función g.

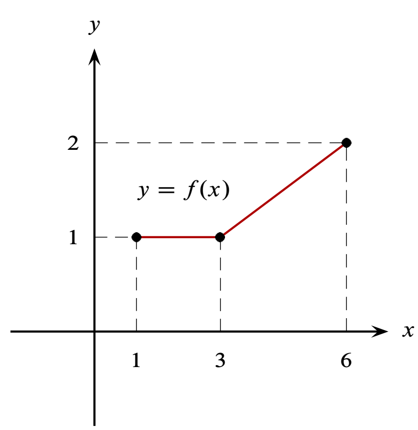
12. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } -3 < x \le -1\,; \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 < x \le 2\,; \\ -1 & \text{si } 2 < x \le 4\,. \end{cases}$$

   a. Obtener la gráfica, el rango y las raíces de f.

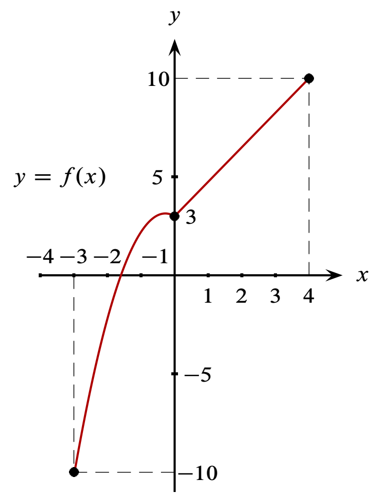
   b. A partir de la gráfica de f hacer un bosquejo de la gráfica de la función $g(x) = 2 - f(x-1)$.

13. a. Encuentre la regla de correspondencia para la función f representada por la siguiente gráfica:



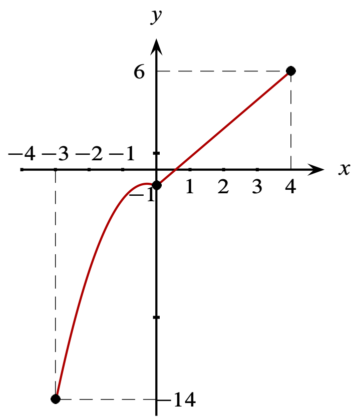
   b. Elabore la gráfica de la función dada por: $g(x) = 3f(2x-2) + 2$.

14. Dada la gráfica de una función f:

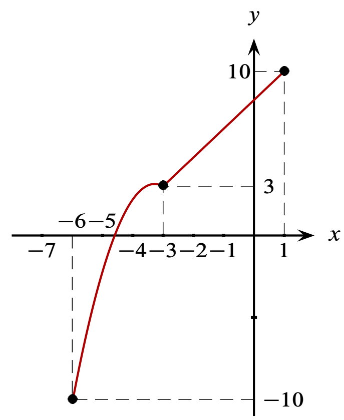


asocie cada una de las siguientes funciones $f(x+3)$, $-2f(x)$ & $f(x)-4$ con su gráfica correspondiente.

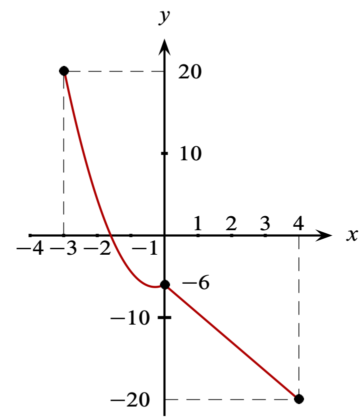
a.



b.



c.



15. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+3 & \text{si } x < -1\,; \\ 2x^2 & \text{si } -1 \le x \le 1\,; \\ 3x-1 & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

Grafique:

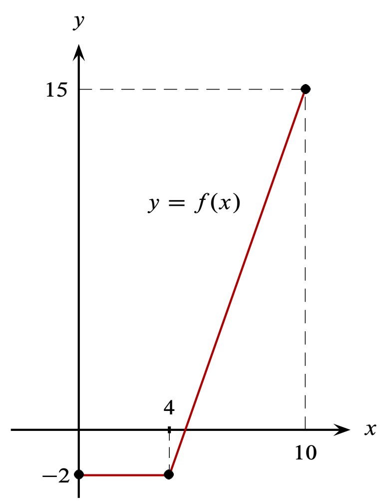
a. $f(x)$.
b. $g(x) = f(x-2)+5$.
c. $h(x) = |\,f(x)\,|$.

16. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } 0 \le x < 1\,; \\ x^2-2x+3 & \text{si } 1 \le x \le 3\,. \end{cases}$$

a. Determinar dominio, raíces, gráfica e imagen o rango de f.
b. A partir de su gráfica, construir la gráfica de $g(x) = |\,f(x)\,|$.
c. Graficar la función $h(x) = -f(x-1)+1$.

17. La siguiente es la gráfica de una función $f : [0, 10] \to \mathbb{R}$.



a. Determine su regla de correspondencia.

b. Considere la función g definida por

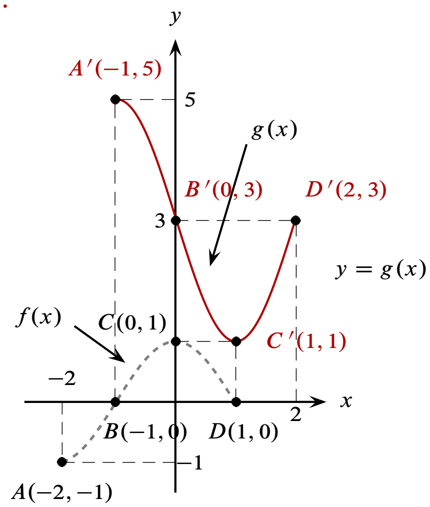
$$g(x) = \begin{cases} -f(-x) & \text{si } -10 \le x < 0\,; \\ f(x) & \text{si } 0 \le x \le 10\,. \end{cases}$$

Bosqueje la gráfica de g. Determine su dominio, rango y raíces.

c. Sea $h(x) = g(x+1) - 2$; a partir de la gráfica de g obtenga la de h.

Ejercicios 2.7.1 *Transformaciones de funciones, página 9*

1.



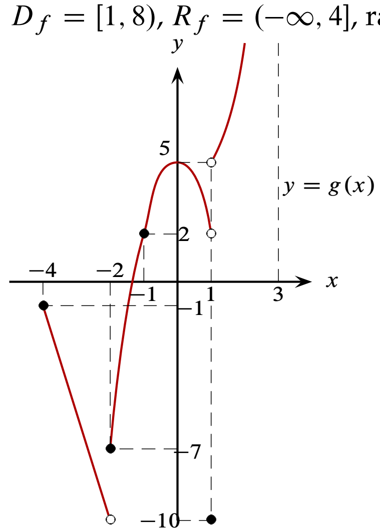
$A(-2, -1) \to A'(-1, 5)$;

$B(-1, 0) \to B'(0, 3)$;

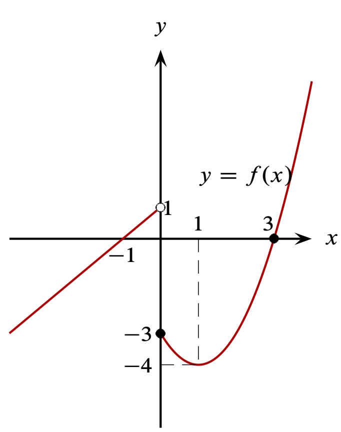
$C(0, 1) \to C'(1, 1)$;

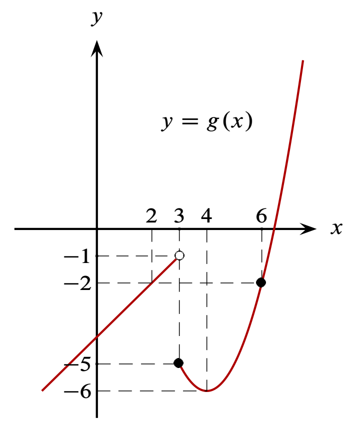
$D(1, 0) \to D'(2, 3)$.

2. $D_f = [1, 8)$, $R_f = (-\infty, 4]$, raíz $x = 4$;



3.



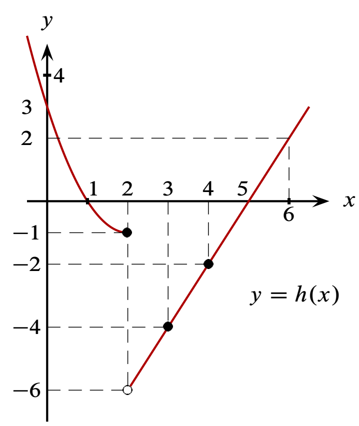


Dominio: $(-\infty, 3)$ y $[3, \infty)$;

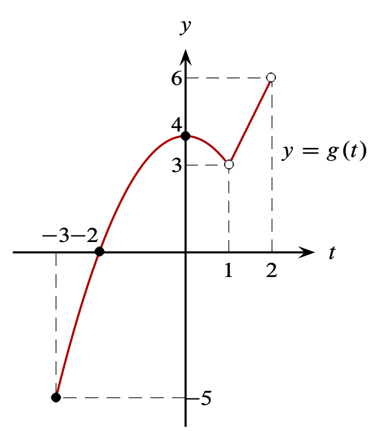
rango: $\mathbb{R}$;

raíces: $4 + \sqrt{6}$.

4.



5. a.



$D_g = [-3, 2) - \{1\} = [-3, 1) \bigcup (1, 2)$;

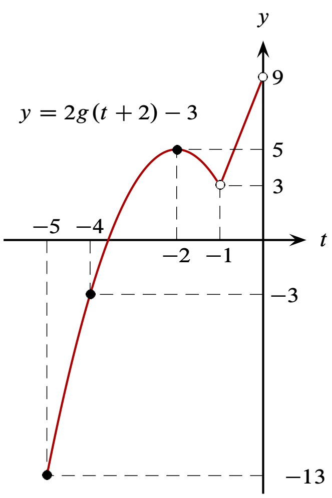
$R_g = [-5, 6)$;

raíces: $\{-2\}$;

b. $g(t) \geq 0$ si $t \in [-2, 2) - \{1\} = [-2, 1) \bigcup (1, 2)$;

$g(t) < 0$ si $t \in [-3, -2)$;

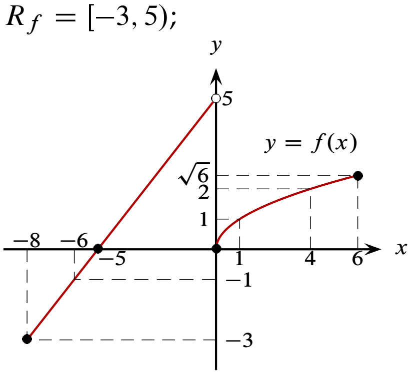
c.



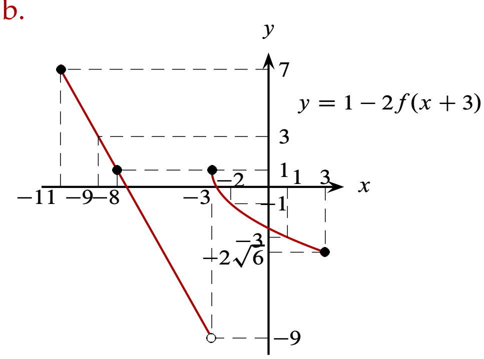
6. a. $D_f = [-8, 6]$;

raíces: -5 & 0;

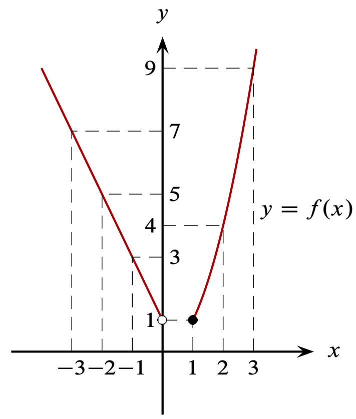
$R_f = [-3, 5)$;

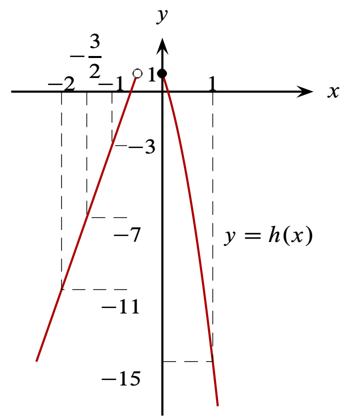


b.

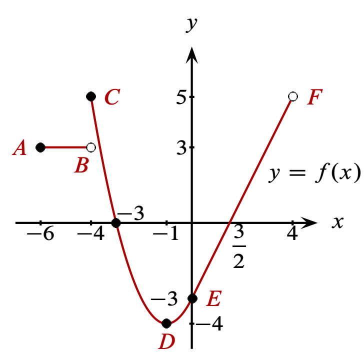


7.





8.



Dominio: $D_f = [-6, 4)$;

rango: $R_f = [-4, 5]$;

raíces: $x = -3, x = 1.5$;

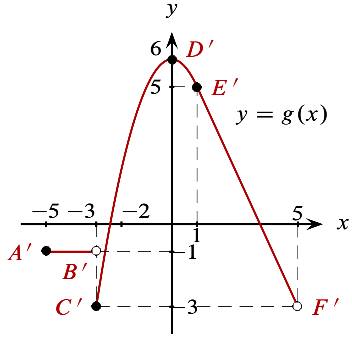
no es par ni impar;

$f(x)$ decrece si $x \in [-4, -1]$;

$f(x)$ crece si $x \in [-1, 4)$;

$f(x) > 0$ si $x \in (-6, -3) \bigcup (1.5, 4)$;

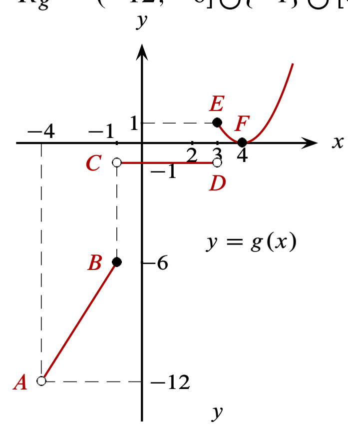
$f(x) < 0$ si $x \in (-3, 1.5)$;

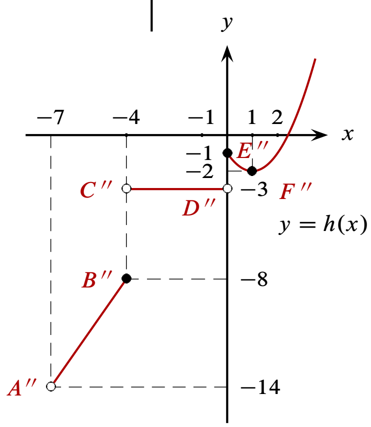


9.

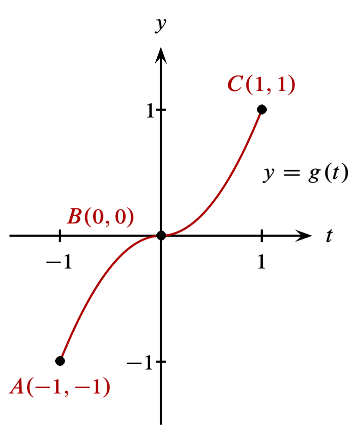
$D_g = (-4, +\infty)$;

$R_g = (-12, -6] \bigcup \{-1\} \bigcup [0, +\infty)$;

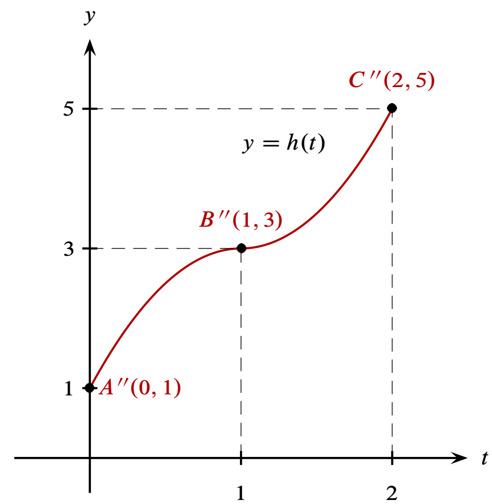




10.

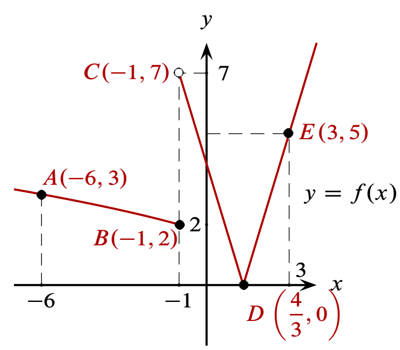


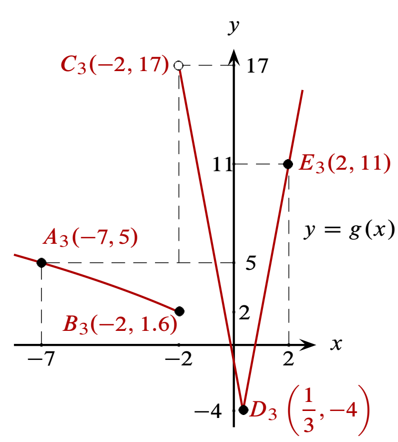
$R_g = [-1, 1]$;



$D_h = [0, 2]$, $R_h = [1, 5]$.

11.

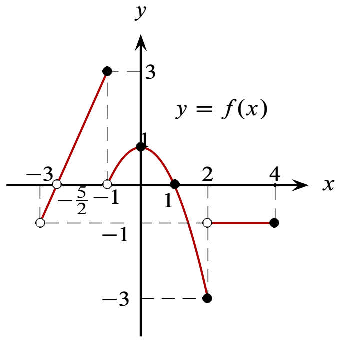




El dominio de g es $\mathbb{R}$;

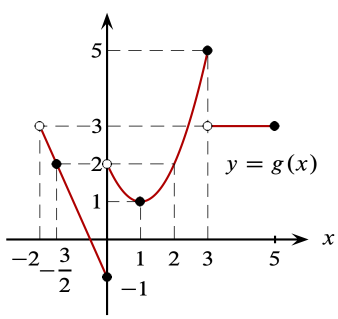
el rango de g es $(-4, +\infty)$.

12.

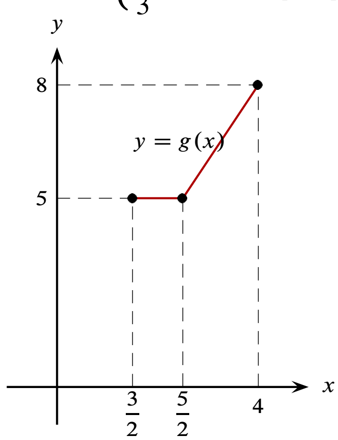


$R_f = [-3, 3]$;

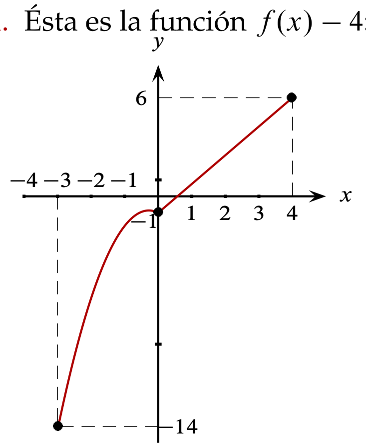
raíces: $x = -\dfrac{5}{2}$; $x = 1$;



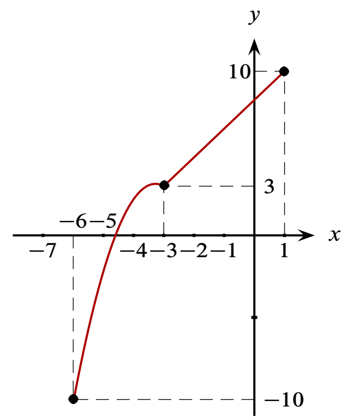
13. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [1, 3]\,; \\ & \text{(observe que } f(3) = 1); \\ \dfrac{1}{3}x & \text{si } x \in [3, 6]\ . \end{cases}$



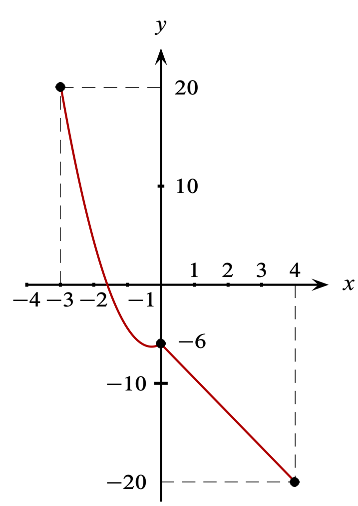
14. a. Ésta es la función $f(x) - 4$:



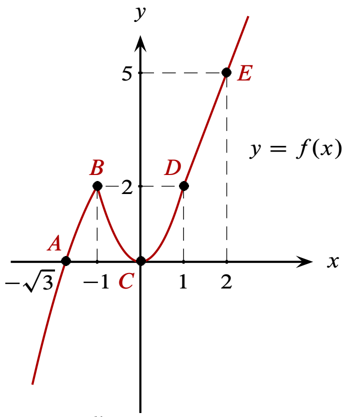
b. Ésta es la función $f(x + 3)$:

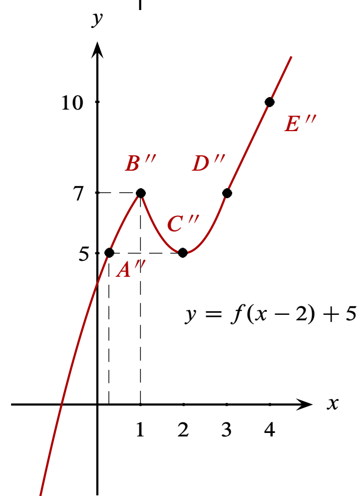


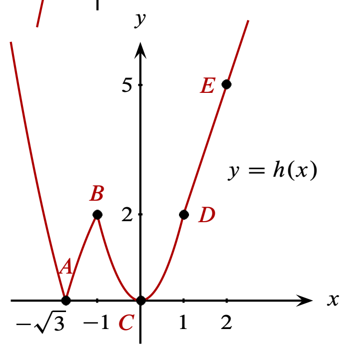
c. Ésta es la función $-2f(x)$:



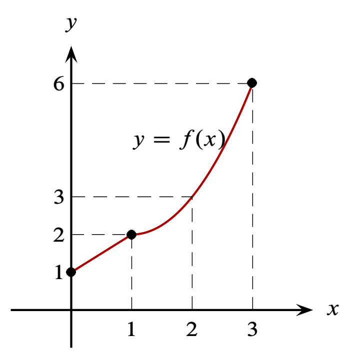
15.



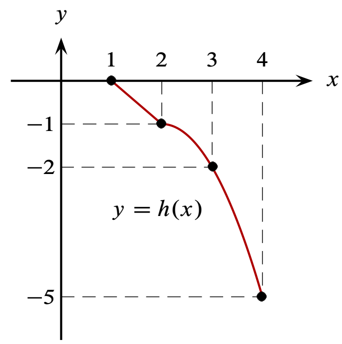




16. $D_f = [0, 3]$; raíces de $f = \varnothing$; $R_f = [1, 6]$.

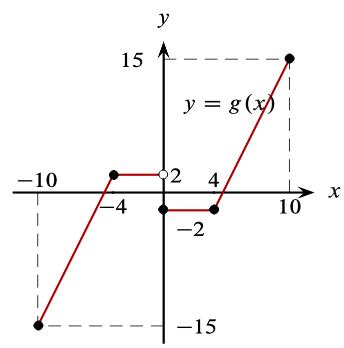


$f(x) = g(x)$;



17. a. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } 0 \le x < 4; \\ \dfrac{17}{6}x - \dfrac{40}{3} & \text{si } 4 \le x \le 10. \end{cases}$

b.



$D_g = [-10, 10]$;

$R_g = [-15, 15]$;

raíces: $x = \pm\dfrac{80}{17}$.

c.