CAPÍTULO

2

Funciones

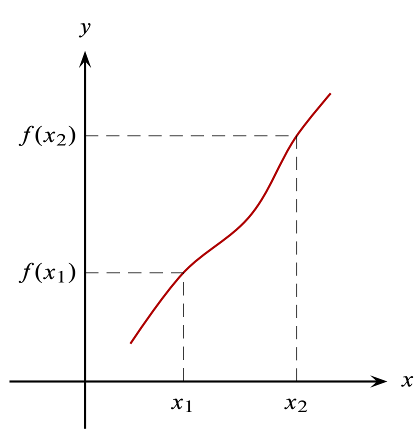
[1]

2.6 Tipos de funciones

Definimos ahora algunos tipos de funciones que tienen comportamientos muy particulares y que son importantes en el estudio del cálculo.

2.6.1 Funciones monótonas

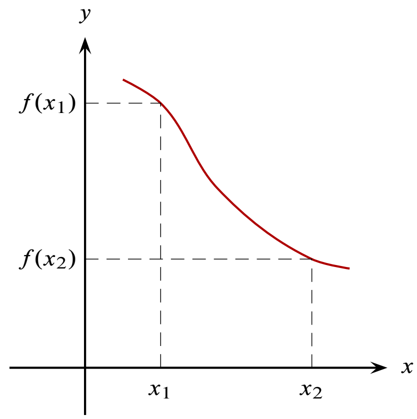
- Una función es monótona creciente si $x_1 < x_2 (\in D_f) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.



Al ir de izquierda a derecha, la gráfica de una función creciente va de abajo hacia arriba.

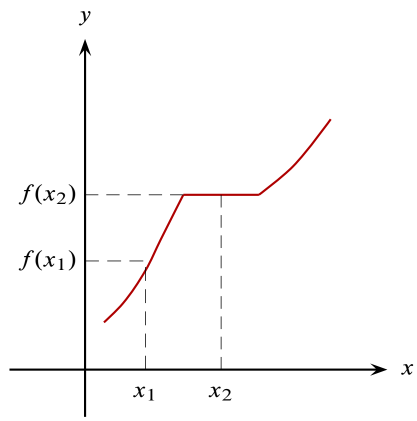
- Una función es monótona decreciente si $x_1 < x_2 (\in D_f) \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008



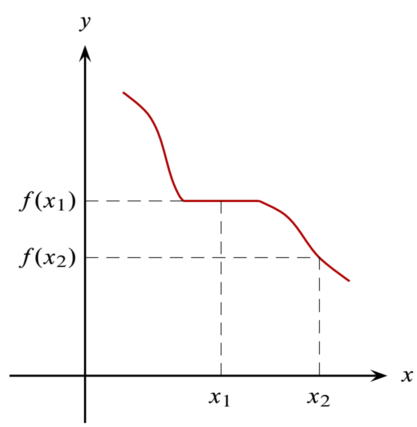
Al ir de izquierda a derecha, la gráfica de una función decreciente va de arriba hacia abajo.

- Si $x_1 < x_2 (\in D_f) \;\Rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2)$, la función es <u>monótona no decreciente</u>.



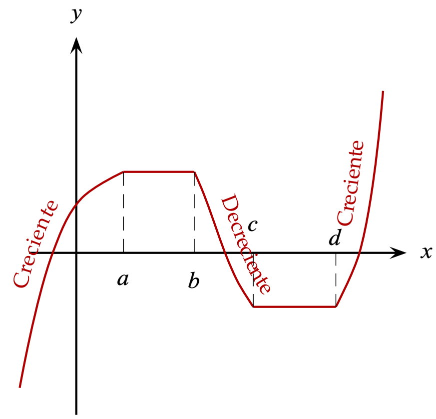
Al ir de izquierda a derecha, la gráfica de una función no decreciente no baja (donde es constante).

- Si $x_1 < x_2 (\in D_f) \;\Rightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2)$, la función es <u>monótona no creciente</u>.



Al ir de izquierda a derecha, la gráfica de una función no creciente no sube (donde es constante).

- Una función es monótona por partes si se puede partir su dominio de manera que en cada una de las partes la función sea monótona.



Vemos que la función anterior es:

1. Creciente en $(-\infty, a)$.
2. No decreciente en $(-\infty, b)$.
3. Constante en (a, b).
4. No creciente (a, c).
5. Decreciente en (b, c).
6. No creciente en (b, d).
7. Constante en (c, d).
8. No decreciente en $(c, +\infty)$.
9. Creciente en $(d, +\infty)$.

2.6.2 Funciones pares e impares

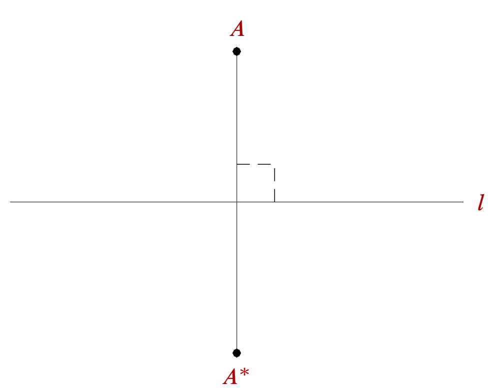
El dominio de una función f es simétrico con respecto al origen, cuando satisface:

$$x \in D_f \;\Rightarrow\; -x \in D_f \,.$$

Si suponemos que f cumple esta condición, entonces:

- f es par si $f(-x) = f(x)$.

  Recordemos que dos puntos son simétricos respecto a una recta si éta es la mediatriz del segmento que ellos determinan.



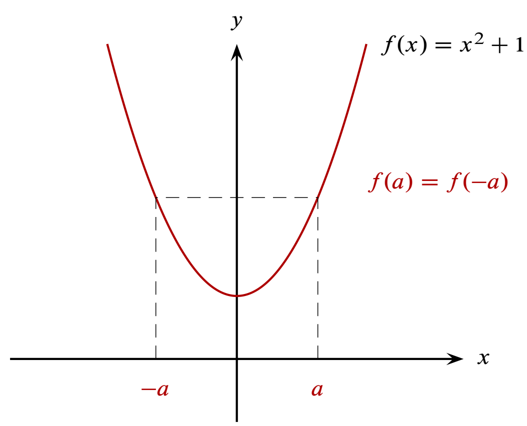
Los puntos A y A^* son simétricos con respecto al eje l. La recta l es la mediatriz del segmento $\overline{AA^*}$.

Que un conjunto de puntos sea simétrico con respecto a un punto (llamado centro de simetría) quiere decir que está constituido por parejas de puntos simétricos con respecto a tal centro de simetría.

La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y, es decir, está constituida por parejas de puntos simétricos con respecto al eje y pues si una función es par y un punto $(a, b) \in G_f$, entonces otro punto de la gráfica de f es $(-a, b)$.

Ejemplo 2.6.1 *$f(x) = x^2 + 1$ es par ya que $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$.*

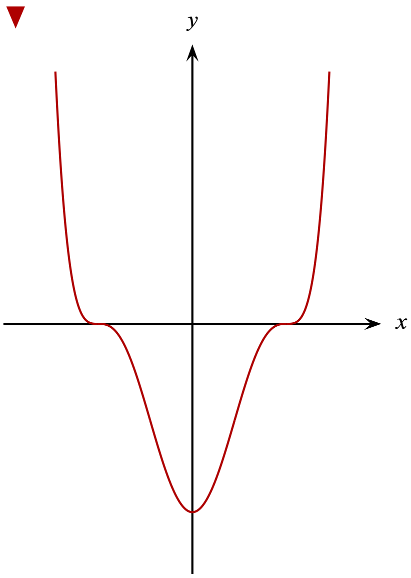
▼

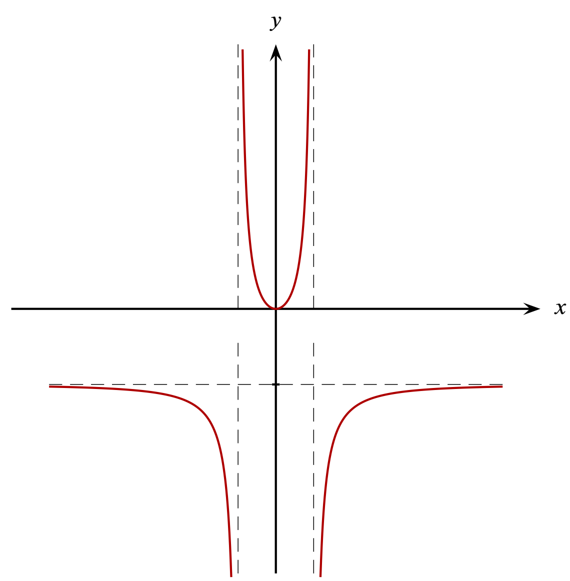


Si $x = 2$, entonces $f(2) = f(-2) = 5$. □

Ejemplo 2.6.2 *Las siguientes funciones son pares:*

▼





□

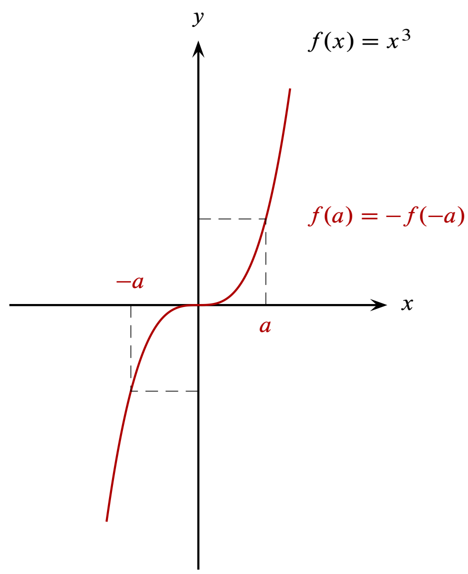
- f es impar si $f(-x) = -f(x)$.

  La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen $(0,0)$.

  Si una función es impar y un punto $(a,b) \in G_f$, entonces otro punto de la gráfica de f es $(-a,-b)$ que es el simétrico de (a,b) respecto al origen.

Ejemplo 2.6.3 *$f(x) = x^3$ es impar ya que $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.*

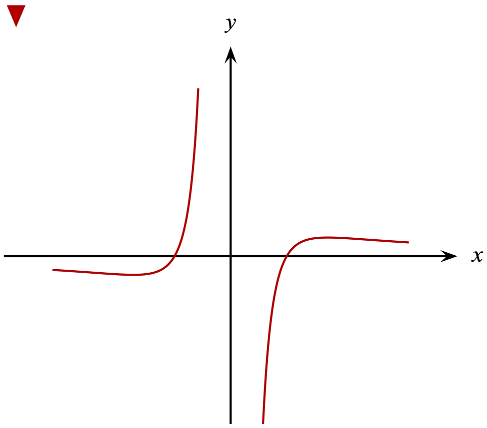
▼

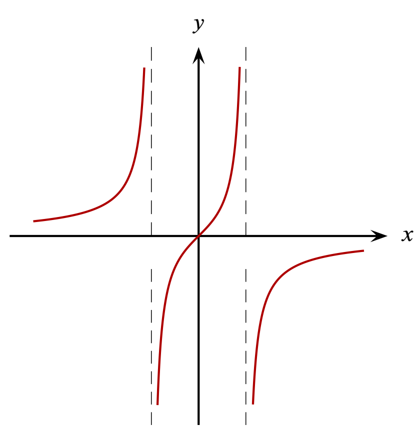


Si $x = -3$, entonces $f(-3) = (-3)^3 = -27 = -f(3)$. □

Ejemplo 2.6.4 *Las siguientes funciones son impares:*

▼





□

2.6.3 Función lineal

- Una función f es lineal si es de la forma $f(x) = mx + b$ con m & $b \in \mathbb{R}$.

  Su dominio son todos los reales.

  Su gráfica es una línea recta de pendiente m y ordenada en el origen b.

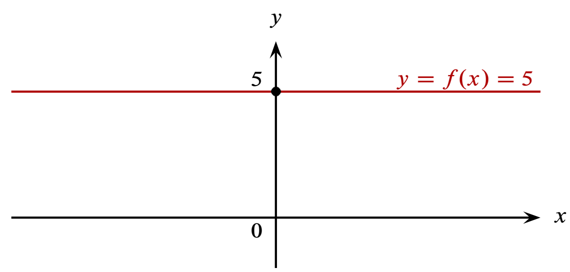
  Si $m \neq 0$, la única raíz de $f(x) = mx + b$ es $x = -\dfrac{b}{m}$ ya que

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow mx + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{m}.$$

1. Si $m = 0$, diremos que $f(x) = b$ es constante, su rango consta de un solo número: $\{b\}$. Su gráfica es una recta paralela al eje de las x que pasa por el punto $(0, b)$.

Ejemplo 2.6.5 *Si $f(x) = 5$, entonces $D_f = \mathbb{R}$ & $R_f = \{5\}$.*

▼ La gráfica de $y = f(x) = 5$ es la recta paralela al eje de las x que pasa por el punto $(0, 5)$ y no tiene raíces.



□

Ejemplo 2.6.6 *Si $f(x) = 0$, entonces $D_f = \mathbb{R}$ & $R_f = \{0\}$.*

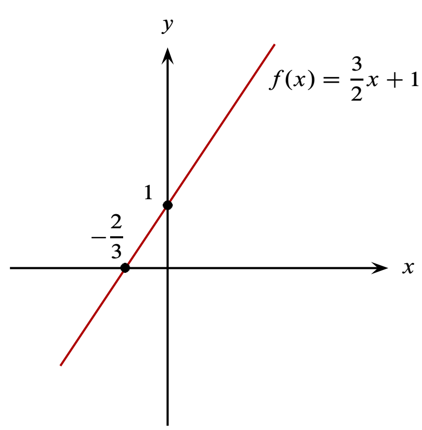
▼ Su gráfica es el eje de las x y ¡todos los reales son raíces de $f(x)$!

□

2. Si $m > 0$, $f(x) = mx + b$ es creciente .

Ejemplo 2.6.7 *Si $f(x) = \dfrac{3}{2}x + 1$, entonces $D_f = \mathbb{R}$ & $R_f = \mathbb{R}$.*

▼



$f(x)$ es creciente y su única raíz es cuando:

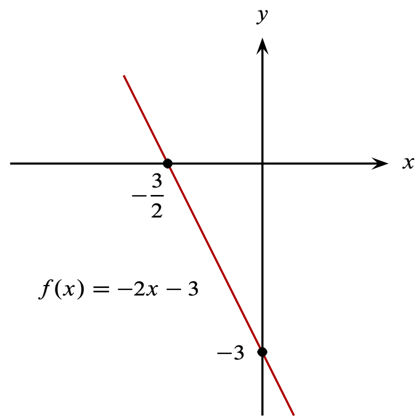
$$f(x) = \frac{3}{2}x + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{3}{2}x = -1 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{-1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}.$$

□

3. Si $m < 0$, $f(x) = mx + b$ es decreciente.

Ejemplo 2.6.8 *Si* $f(x) = -2x - 3$, *entonces* $D_f = \mathbb{R}$ & $R_f = \mathbb{R}$.

▼



La función f es decreciente y su única raíz es cuando:

$$f(x) = -2x - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; -2x = 3 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}.$$

□

2.6.4 Función cuadrática

- Una función f es cuadrática si es de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ con } a \neq 0, b \;\&\; c \in \mathbb{R}\,.$$

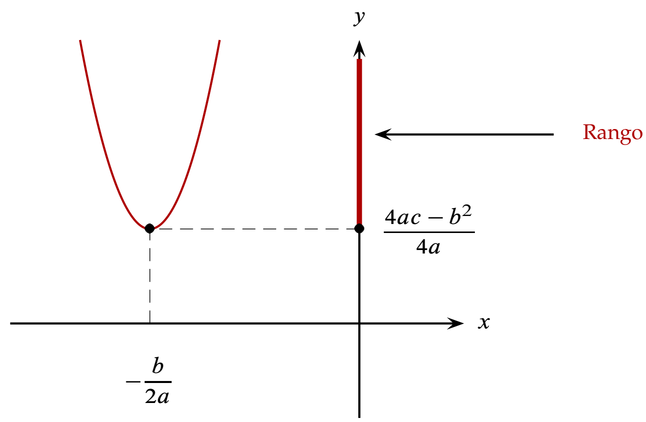
Su dominio son todos los reales.

Tiene dos raíces, una o ninguna dependiendo de si $b^2 - 4ac >, =$ o bien < 0 respectivamente.

Su gráfica es una parábola vertical que se abre hacia arriba o hacia abajo a partir de su vértice, dependiendo de si $a > 0$ o bien $a < 0$. Recordemos que:

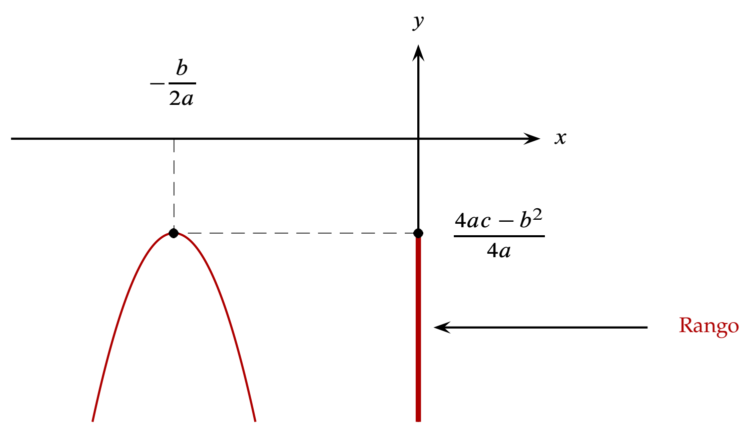
$$\begin{aligned} y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = \\ = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} = \\ = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}\,. \end{aligned}$$

- Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba y para $x = -\dfrac{b}{2a}$ se obtiene el menor valor para y que es: $y = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.



Su rango es $\left[\dfrac{4ac - b^2}{4a}, +\infty\right)$.

- Si $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo y para $x = -\dfrac{b}{2a}$ se obtiene el mayor valor para y que es: $y = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.



Su rango es $\left(-\infty, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right]$.

En ambos casos:

- Su vértice es el punto: $V\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$.
- Es monótona por partes.

Ejemplo 2.6.9 *Hallar el vértice, el eje, la intersección con el eje x (las raíces) y graficar la parábola*

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}\,.$$

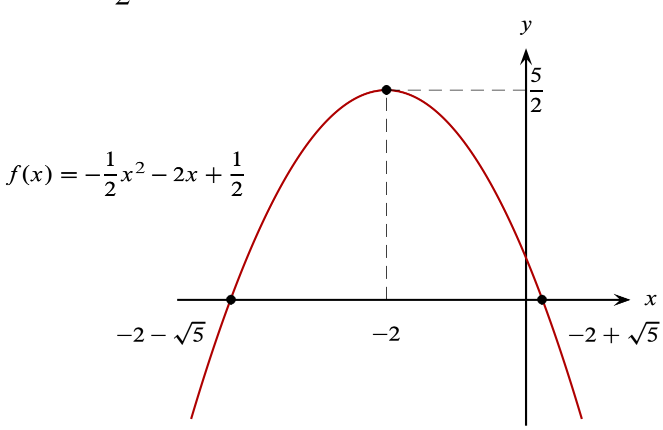
▼ Esta parábola se abre hacia abajo ya que $a = -\dfrac{1}{2} < 0$. Además,

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}\left(x^2 + 4x\right) + \frac{1}{2} = \\ &= -\frac{1}{2}\left(x^2 + 4x + 4\right) + \frac{1}{2} + 2 = \\ &= -\frac{1}{2}(x+2)^2 + \frac{5}{2}\,. \end{aligned}$$

Vértice: $V(-2, \dfrac{5}{2})$; eje: $x = -2$.
Las raíces se obtienen cuando $y = 0$:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0 \ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\ x^2 + 4x - 1 = 0 \text{ (multiplicando a la ecuación dada por } -2) \ \Leftrightarrow \\ &\qquad \Leftrightarrow\ x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = -2 \pm \sqrt{5} \approx \begin{cases} 0.24 \\ -4.24\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Gráfica de $y = -\dfrac{1}{2}x^2 - 2x + \dfrac{1}{2}$:



□

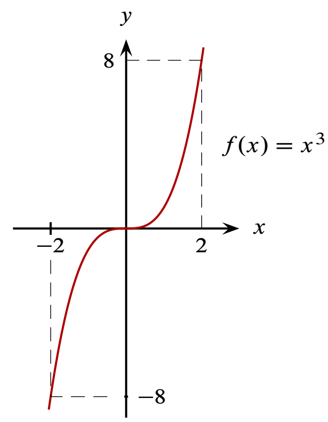
2.6.5 Funciones polinomiales

- Una función f que tiene la forma

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cd + d \text{ con } a \neq 0, b, c \text{ y } d \in \mathbb{R}\,, \text{ se llama función } \underline{\text{cúbica}}\,.$$

Ejemplo 2.6.10 *Sea la función $f(x) = x^3$, su gráfica es*

▼



Además: $D_f = R_f = \mathbb{R}$, es impar y creciente.

□

- Una función f es polinomial de grado n donde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ si es de la forma

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n\,,$$

con $\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n\} \subset \mathbb{R}$ que son llamados coeficientes.

Ejemplo 2.6.11 *Las funciones $f_4(x) = x^4$, $f_6(x) = x^6, \cdots, f_{2n}(x) = x^{2n}$ con $n \in \mathbb{N}$ son funciones polinomiales.*

▼ Su dominio son los números reales y su rango los reales no negativos, su única raíz es $x = 0$, son pares y no son monótonas pero restringidas a los reales no negativos son crecientes y a los no positivos son decrecientes.
Sus gráficas son semejantes a las de $f(x) = x^2$.

□

Ejemplo 2.6.12 *Las funciones $f_5(x) = x^5$, $f_7(x) = x^7, \cdots, f_{2n+1}(x) = x^{2n+1}$ con $n \in \mathbb{N}$ son funciones polinomiales.*

▼ Su dominio son los números reales y su rango también los reales, su única raíz es $x = 0$, son impares y crecientes.
Sus gráficas son semejantes a las de $f(x) = x^3$.

□

2.6.6 Funciones racionales y algebraicas

- Una función de la forma:

$$\Phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

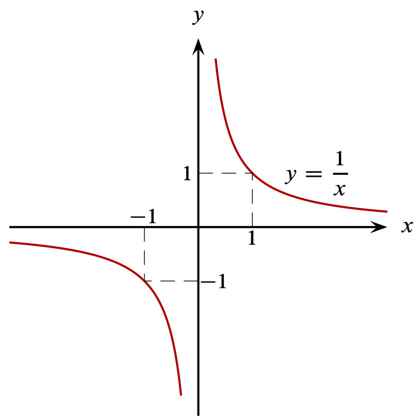
donde $f(x)$ & $g(x)$ son funciones polinomiales se llama función racional.

Su dominio son todos los números reales con excepción de las raíces del denominador $g(x)$, que a lo más son tantas como su grado.

Ejemplo 2.6.13 *Sea la función racional* $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$.

▼ $D_f = R_f = \mathbb{R} - \{0\}$. Es impar, no monótona, pero restringida a los reales negativos o a los positivos es decreciente.

Su gráfica es la hipérbola equilátera $xy = 1$.

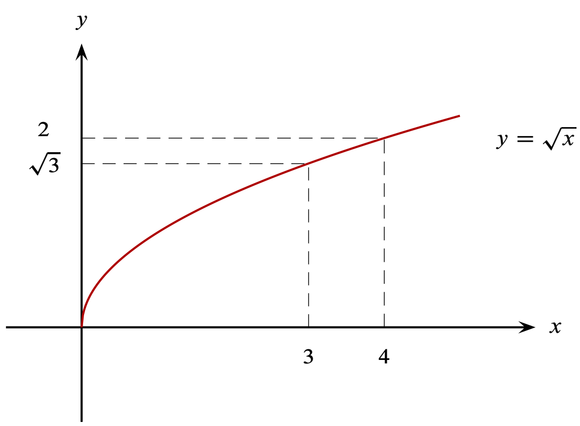


□

- Una función tal que en su regla de correspondencia sólo aparezca la variable independiente (x), números reales y los símbolos de sumar, restar, multiplicar, dividir, elevar a una potencia y extraer raíz se llama función algebraica.

Ejemplo 2.6.14 *Sea la función algebraica* $f(x) = \sqrt{x}$, *su gráfica es*

▼

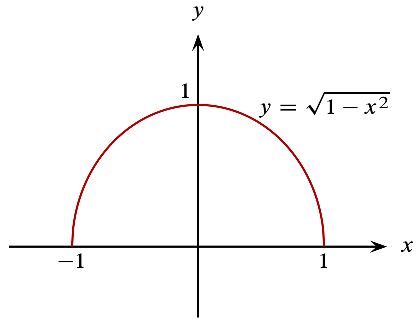


$D_f = R_f = \mathbb{R}^+ \bigcup \{0\}$. Su única raíz es $x = 0$, es creciente y su gráfica es la semiparábola superior $y^2 = x$.

□

Ejemplo 2.6.15 *Sea la función algebraica* $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, *su gráfica es*

▼



$D_f = [-1, 1]$, $R_f = [0, 1]$. Sus raíces son $x = 1$ & $x = -1$, es par, no es monótona, es monótona por partes, creciente en $[-1, 0]$ y decreciente en $[0, 1]$, y su gráfica es la semicircunferencia unitaria superior $y = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ con centro en el origen $(0, 0)$.

□

2.6.7 Función definida por partes

A veces la regla de correspondencia de la función no es una sóla fórmula, esto es, el dominio de la función está descompuesto en partes ajenas y en cada una de ellas la función está definida por una fórmula diferente.

Ejemplo 2.6.16 *Trazar la gráfica de la función $f(x) = |\,x\,|$, valor absoluto de x.*

▼ Recordando la definición se tiene

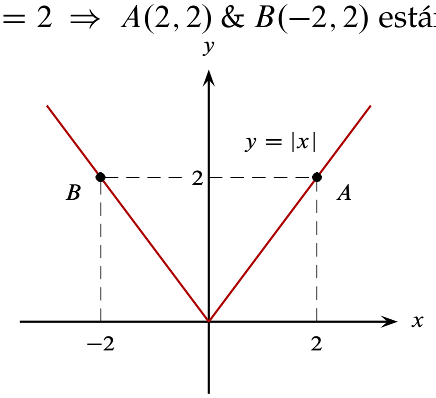
$$f(x) = |\,x\,| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0\,; \\ -x & \text{si } x < 0\,. \end{cases}$$

Por la definición de f sucede que:

1. Si $x \geq 0$, entonces $y = f(x) = |\,x\,| = x \Rightarrow y = x$, que es la recta que pasa por el origen con pendiente $m = 1$.
2. Si $x < 0$, entonces $y = f(x) = |\,x\,| = -x \Rightarrow y = -x$, que es la recta que pasa por el origen con pendiente $m = -1$.

$D_f = \mathbb{R}$ & $R_f = \mathbb{R}^+ \bigcup \{0\}$, es decir, los reales no negativos.

$$f(\pm 2) = |\pm 2| = 2 \Rightarrow A(2, 2) \text{ \& } B(-2, 2) \text{ están en la gráfica}$$

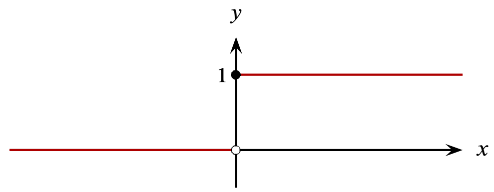


□

Ejemplo 2.6.17 *Trazar la gráfica de la función de Heaviside (1850-1925)*

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0\,; \\ 1 & \text{si } t \geq 0\,. \end{cases}$$

▼ La gráfica es:



□

Ejemplo 2.6.18 *Graficar la función* $E(x) = n \quad \text{si} \quad n \leq x < n + 1.$
Nótese que E es una función definida por partes.
Esta función se llama "la función cumpleaños" o bien "el mayor entero menor o igual que".

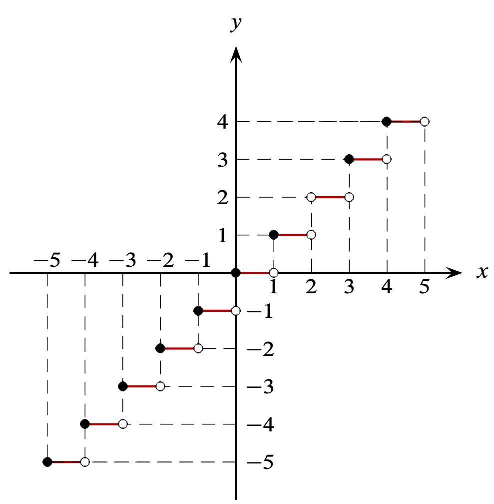
▼
$D_E = \mathbb{R}$ & $R_E = \mathbb{Z}$.
Ejemplos de $E(x)$ para algunos valores de x:

$$E(\pi) = 3;\ E(e) = 2;\ E(\sqrt{2}) = 1 \& E(-\sqrt{2}) = -2\,.$$

Algunos autores en lugar de $E(\pi)$, $E(e)$, $E(\sqrt{2})$, $E(-\sqrt{2})$ escriben:

$$E(x = \pi);\ E(x = e)\,;\, E(x = \sqrt{2})\ \&\ E(x = -\sqrt{2}),\ \text{respectivamente}\,.$$

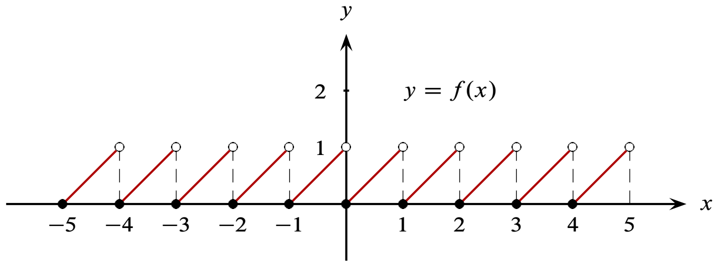
Veamos su gráfica:



□

Ejemplo 2.6.19 *Graficar la función* $f(x) = x - E(x)$.

▼ Si $x \in [n, n + 1)$ con $n \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; f(x) = x - n$.



$D_f = \mathbb{R}$ & $R_f = [0, 1)$.

□

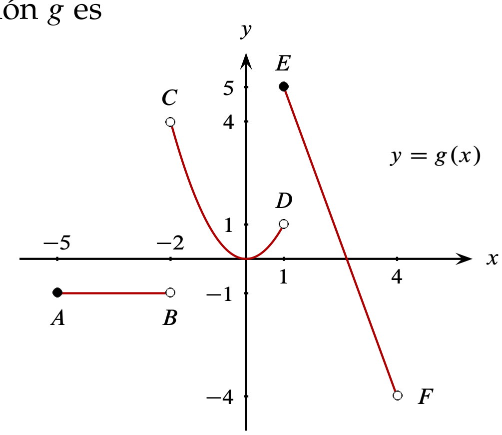
Ejemplo 2.6.20 *Trazar la gráfica de la función*

$$g(x) = \begin{cases} -1 & si \ -5 \le x < -2\,; \\ x^2 & si \ -2 < x < 1\,; \\ 8 - 3x & si \ 1 \le x < 4\,. \end{cases}$$

▼ Para obtener la gráfica de g notemos que:

1. Para $-5 \le x < -2$ se tiene que $g(x) = -1$. En este caso la gráfica de g es el segmento de la recta $y = -1$ que tiene por extremos a los puntos $A(-5, -1)$ y $B(-2, -1)$.
2. Para $-2 < x < 1$ se tiene que $g(x) = x^2$. En este caso la gráfica de g es la porción de la parábola $y = x^2$ que tiene vértice en $V(0, 0)$ y por extremos a los puntos $C(-2, 4)$ y $D(1, 1)$.
3. Para $1 \le x < 4$ se tiene que $g(x) = 8 - 3x$. En este caso la gráfica de g es el segmento de la recta $y = -3x + 8$ que tiene por extremos a los puntos $E(1, 5)$ y $F(4, -4)$.

Por lo tanto la gráfica de la función g es



Comprobamos en esta gráfica que el dominio de g es $D_g = [-5, 4) - \{-2\}$, el rango de g es $(-4, 5]$ y que los puntos $B(-2, -1)$, $C(-2, 4)$, $D(1, 1)$ y $F(4, -4)$ no pertenecen a la gráfica de la función a diferencia de $A(-5, -1)$ y de $E(1, 5)$, que sí están es la gráfica.

□

Ejemplo 2.6.21 *Trazar la gráfica de la función*

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & si \ -4 < x < -1\,; \\ |\,x\,| & si \ -1 < x < 2\,; \\ 4 - \dfrac{x}{2} & si \ 2 < x \le 6\,. \end{cases}$$

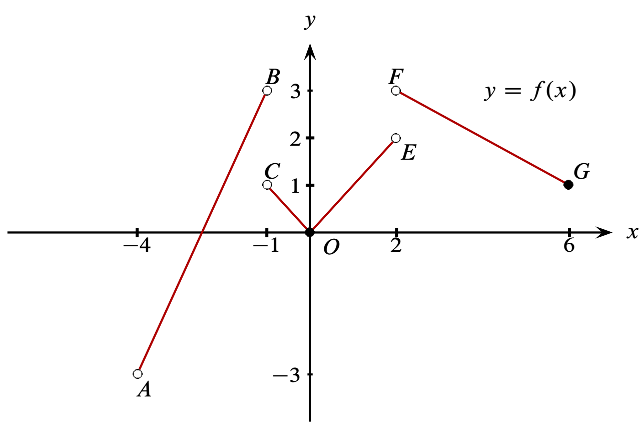
▼ Para obtener la gráfica de f notamos que:

1. Para $-4 < x < -1$ se tiene que $f(x) = 2x + 5$. En este caso la gráfica de f es el segmento de la recta $y = 2x + 5$ que tiene por extremos a los puntos $A(-4, -3)$ y $B(-1, 3)$.

2. Para $-1 < x < 2$ se tiene que $f(x) = |\,x\,|$. En este caso la gráfica de f está compuesta por el segmento de la recta $y = -x$ con extremos en $C(-1, 1)$ y $O(0, 0)$, y por el segmento de la recta $y = x$ con extremos en $O(0, 0)$ y $E(2, 2)$.

3. Para $2 < x \le 6$ se tiene que $f(x) = 4 - \dfrac{x}{2}$. En este caso la gráfica de f es el segmento de la recta $y = -\dfrac{1}{2}x + 4$ cuyos extremos son los puntos $F(2, 3)$ y $G(6, 1)$.

Por lo tanto la gráfica de la función f es



Entonces, el dominio de f es $D_f = (-4, 6] - \{-1, 2\}$, el rango de f es $R_f = (-3, 3)$ y comprobamos que los puntos A, B, C, E y F no pertenecen a la gráfica de la función, a diferencia de O y G que sí están en la gráfica.

□

Ejercicios 2.6.1 *Soluciones en la página* **??**

1. Dada la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$, señale si es par, impar o ninguna de las dos cosas.

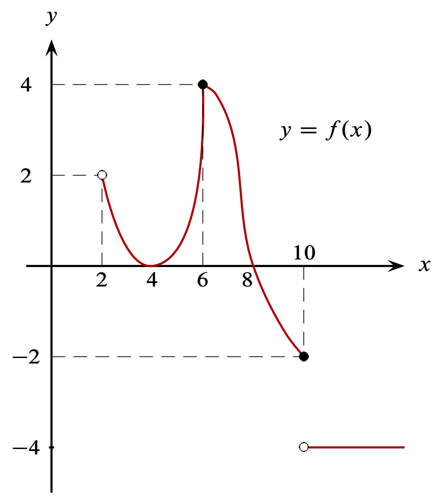
2. Dada la función $f(x) = \sqrt[4]{x^3 - x}$, señale si es par, impar o ninguna de las dos cosas.

3. Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^3 - x}{x^2 + 1}$, señale si es par, impar o ninguna de las dos cosas.

4. Si f es par ¿será $g(x) = (x^2 + 1) f(x)$ par?

5. Si f & g son impares ¿será $h(x) = (f + g)(x)$ impar?

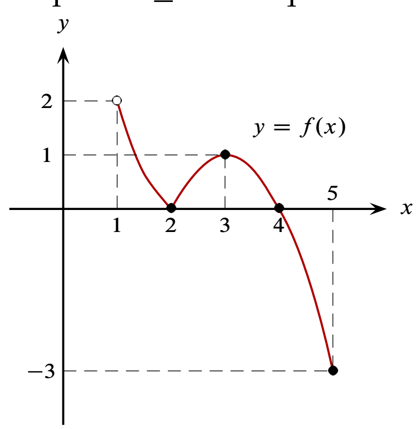
6. La función f es par, y parte de su gráfica es la figura siguiente:



a. Complete su gráfica de f.

b. Obtenga su dominio, raíces y rango, y además determine a partir de la gráfica completada las soluciones de $f(x) > 0$ y de $f(x) < 0$.

7. Si f es una función par cuya gráfica para $x \geq 1$ es la que se indica en la figura,



completar la gráfica, indicar su dominio, sus raíces y su rango.

8. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 5 & \text{si } -4 \leq x \leq -2\,; \\ x^2 + 1 & \text{si } -2 < x \leq 3\,; \\ 7 & \text{si } 3 < x\,. \end{cases}$$

a. Obtener su gráfica.

b. Determinar su dominio y rango.

c. Calcular: $f(-4)$, $f(-3)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$, $f(5)$ & $f(1\,000)$.

9. Dada la siguiente función

$$g(x) = \begin{cases} -|\,x + 2\,| & \text{si } x < -2\,; \\ \sqrt{4 - x^2} & \text{si } -2 \leq x \leq 2\,; \\ x - 2 & \text{si } x > 2\,. \end{cases}$$

Obtenga su gráfica y diga si es par, impar o ninguna de las dos. Determinar su rango.

10. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x < -5\,; \\ \sqrt{25 - x^2} & \text{si } -5 \le x \le 5\,; \\ 5 - x & \text{si } x > 5\,. \end{cases}$$

Esboce su gráfica, obtenga el rango, las raíces y diga si es par, impar o ni una cosa ni la otra.

11. Graficar la siguiente función

$$G(z) = \begin{cases} -2z + 4 & \text{si } z < -2; \\ 2z^2 - 1 & \text{si } -2 \le z \le 2; \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } z > 2. \end{cases}$$

12. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x - 3 & \text{si } x \in (-\infty, 0]\,; \\ -2x + 3 & \text{si } x \in [3, +\infty)\,. \end{cases}$$

Obtener dominio, raíces, gráfica y rango de dicha función.

13. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 3 & \text{si } -3 \le x < -1\,; \\ 4 & \text{si } |\,x\,| < 1\,; \\ x^2 - 2x - 3 & \text{si } 1 \le x \le 4\,. \end{cases}$$

a. Proporcionar el dominio y raíces de f.
b. Hacer un bosquejo gráfico y hallar el rango.

14. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x - 1 & \text{si } -2 \le x < 0\,; \\ 3 & \text{si } 0 \le x < 2\,; \\ -3x + 1 & \text{si } 2 \le x \le 4\,. \end{cases}$$

a. Proporcionar el dominio de la función, sus raíces y su paridad.
b. Hacer un bosquejo de la gráfica y hallar el rango.

15. Hallar el dominio, graficar y determinar el rango de las funciones:

a. $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \le 0\,; \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1\,; \\ x^2 + 1 & \text{si } 1 \le x\,. \end{cases}$

b. $g(x) = \dfrac{2x}{|\,x\,| + 2x}$.

16. Determinar dominio, raíces, un esbozo de la gráfica de la siguiente función y su rango.

$$f(x) = \begin{cases} 2 - |\,x + 3\,| & \text{si } -3 < x < 1; \\ 1 + 2x - x^2 & \text{si } x \geq 1\,. \end{cases}$$

17. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < -3\,; \\ \left|\,x^2 + x - 2\,\right| & \text{si } -3 \leq x \leq 1\,; \\ 1 - x & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

   a. Trace su gráfica.
   b. Determine su dominio, rango y raíces.

18. Dada la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} |\,3x + 1\,| & \text{si } x \leq 0\,; \\ x^2 + 1 & \text{si } 0 < x < 3\,; \\ -3 & \text{si } x \geq 3\,, \end{cases}$$

obtener la gráfica de f, su dominio, su rango y sus raíces.

19. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -x + 7 & \text{si } x < -5\,; \\ 2 & \text{si } -5 \leq x < -3\,; \\ \left|\,4 - x^2\,\right| & \text{si } -3 \leq x \leq 3\,; \\ 2 & \text{si } 3 < x < 6\,; \\ \dfrac{-x}{6} + \dfrac{7}{6} & \text{si } x \geq 6\,. \end{cases}$$

Determine:

   a. Gráfica y rango de f.
   b. ¿Es par o impar f? Justifique su respuesta.

20. Graficar la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < -1; \\ \sqrt{1 - x^2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1; \\ |\,x - 3\,| & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

21. Realizar un bosquejo de la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < -1; \\ \dfrac{|\,x\,|}{x} & \text{si } -1 \leq x < 2 \;\&\; x \neq 0; \\ 4 & \text{si } x = 2; \\ x^2 - 6x + 6 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

22. Obtener dominio y gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} |\, x\,| + 1 & \text{si } x \leq 0\,; \\ -x^2 + 1 & \text{si } 0 < x \leq 1\,; \\ 3x - 3 & \text{si } x \geq 2\,. \end{cases}$$

23. Considere las funciones

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0\,; \\ 1 & \text{si } x \geq 0\,. \end{cases}$$

así como

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0\,; \\ 0 & \text{si } x = 0\,; \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Obtener el dominio, la gráfica y el rango de la función definida por

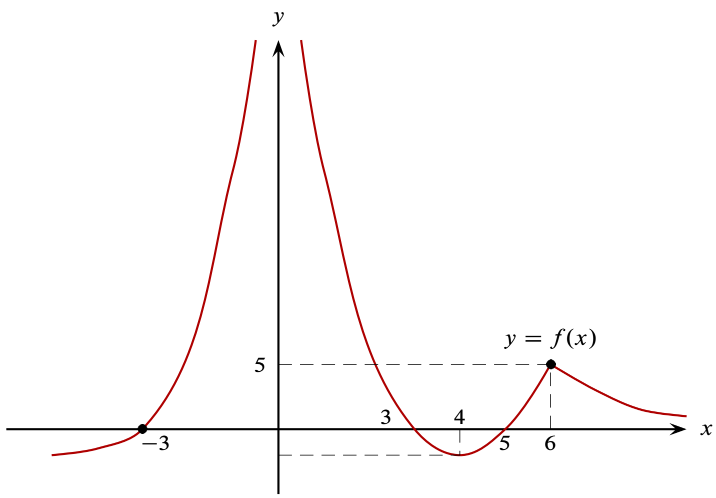
$$f(x) = sgn(x) + xU(x).$$

24. Sean las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } -10 < x \leq 6; \\ x & \text{si } x > 6. \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{si } x \leq 0; \\ x^2 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Obtenga el dominio y la fórmula de la función $f + g$.

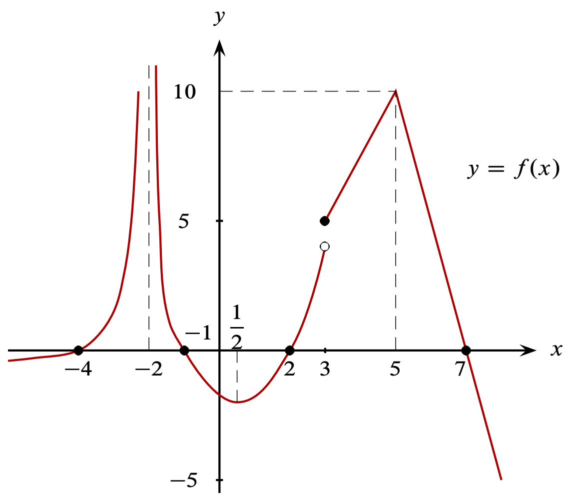
25. A partir de la gráfica de la función f



determine:

a. Los intervalos donde $f(x) > 0$ & $f(x) < 0$, así como los valores donde $f(x) = 0$, es decir, las raíces de f.
b. Los intervalos de monotonía de f, es decir, dónde es creciente y dónde es decreciente.

26. A partir de la gráfica de la función f:



Determinar:

a. Los intervalos donde $f(x) > 0$ & $f(x) < 0$; y los valores donde $f(x) = 0$.

b. Los intervalos de monotonía de f; es decir dónde es creciente y dónde es decreciente.

27. Para la función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } -7 \leq x < -2\,; \\ -x^2 + 3 & \text{si } -2 \leq x \leq 3\,; \\ 4 & \text{si } 3 < x \leq 6\,. \end{cases}$$

a. Bosqueje su gráfica.

b. Determine su dominio, su rango y sus raíces.

c. A partir de la gráfica, encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d. A partir de la gráfica, encuentre los intervalos donde la función es positiva y donde es negativa.

28. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } -6 \leq x < -2\,; \\ x^2 - 1 & \text{si } -2 \leq x \leq 2\,; \\ -2x + 7 & \text{si } 2 < x \leq 5\,. \end{cases}$$

a. Bosqueje la gráfica de la función.

b. Determine el dominio y el rango de la función; encuentre también sus raíces.

c. A partir de la gráfica, encuentre los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

d. A partir de la gráfica, encuentre los intervalos en donde la función es positiva y negativa.

29. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \leq -2\,; \\ \left| x^2 - 1 \right| & \text{si } x \in (-2, 2)\,; \\ -2 & \text{si } x \geq 2\,. \end{cases}$$

Bosquejar su gráfica.

Obtener el dominio, raíces y especificar los intervalos donde: a. $f(x) > 0$; b. $f(x) < 0$; c. $f(x)$ crece; d. $f(x)$ decrece.

30. Sea la función

$$f(x)=\begin{cases}-x^2-2x+2 & \text{si } x\le 0\,;\\ |\,x-2\,| & \text{si } 0<x<4\,;\\ 3 & \text{si } x\ge 4\,.\end{cases}$$

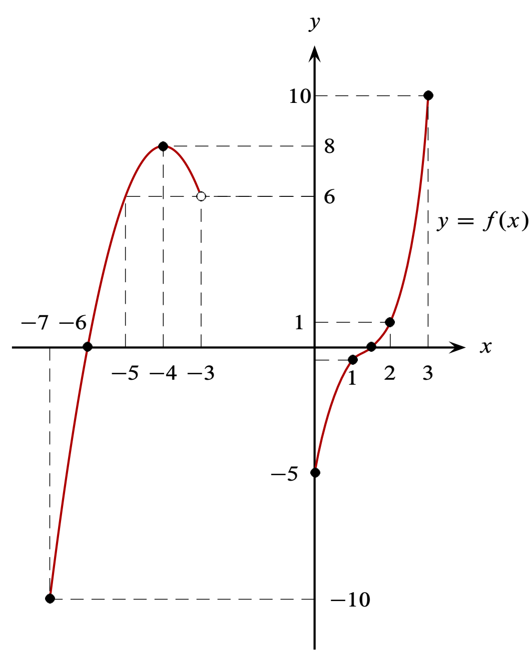
a. Grafique la función.

b. ¿Cuáles son el rango y las raíces de f?

c. ¿Cuáles son los intervalos de monotonía de f?

d. ¿La función f es par o impar? Justifique su respuesta.

31. En el dibujo aparece una parte de la gráfica de la función f.



a. Complete esta gráfica sabiendo que se trata de una función par y también determine su dominio, raíces y rango (imagen).

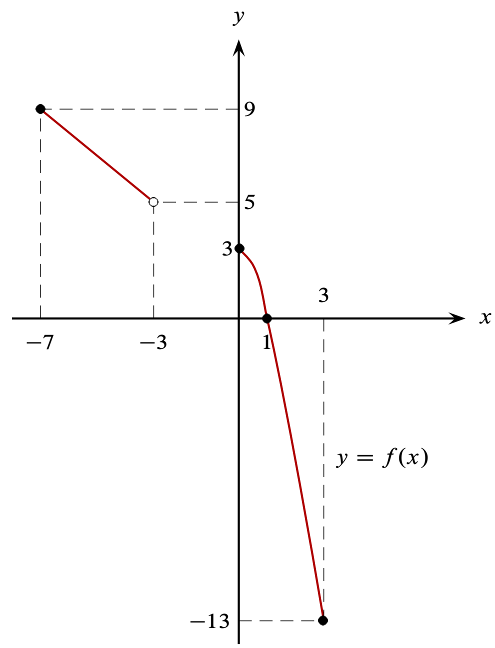
b. Determine las soluciones de las desigualdades $f(x)>0$ & $f(x)<0$.

c. Determine los intervalos donde esta función f es

i. creciente;

ii. decreciente.

32. La siguiente figura es parte de la gráfica de una función f:



a. Completar la gráfica sabiendo que es una función par.

b. Determinar dominio, raíces y rango.

c. Determinar los intervalos de monotonía.

Ejercicios 2.6.1 *Tipos de funciones, página* **??**

1. No es par ni impar .

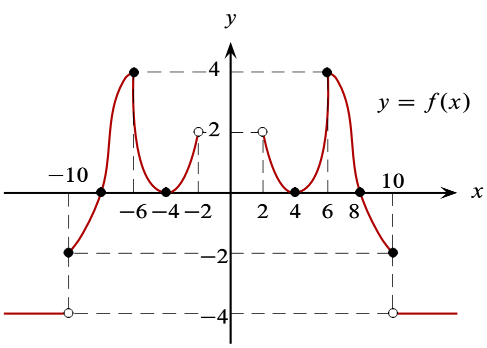
2. $f(x)$ no es par ni impar .

3. Es impar .

4. Sí .

5. Sí .

6.



$D_f = (-\infty, -2) \bigcup (2, +\infty)$;

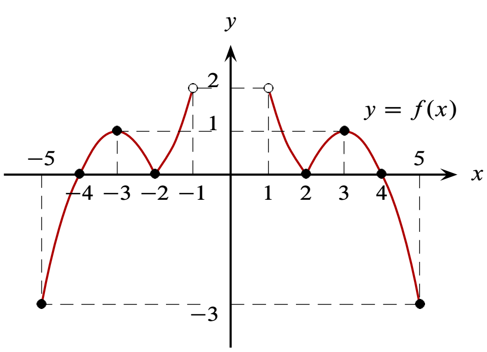
raíces: $x = -8, -4, 4$ & 8;

rango = $\{-4\} \bigcup [-2, 4]$;

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-8, -4) \bigcup (-4, -2) \bigcup (2, 4) \bigcup (4, 8)$;

$f(x) < 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; x \in (-\infty, -8) \bigcup (8, +\infty)$.

7.

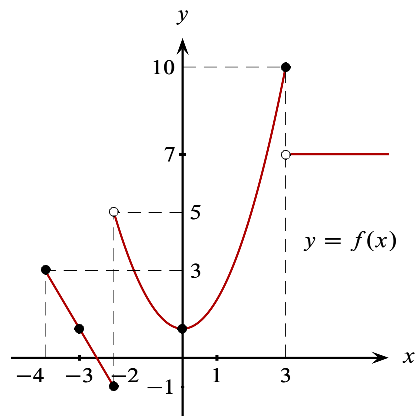


$D_f = [-5, -1) \bigcup (1, 5]$;

$R_f = [-3, 2)$;

raíces $x = -4$, $x = -2$, $x = 2$ & $x = 4$.

8.

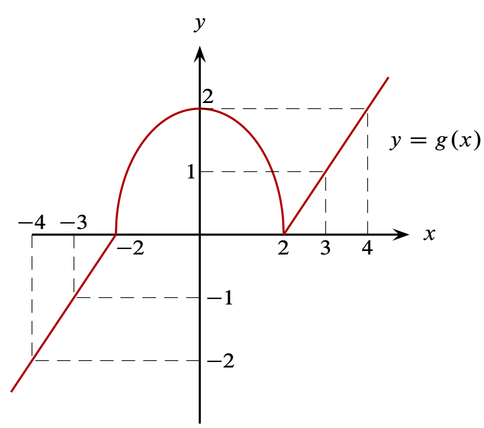


$D_f = [-4, +\infty)$; $R_f = [-1, 10]$;

$f(-4) = 3$, $f(-3) = 1$, $f(-2) = -1$, $f(0) = 1$;

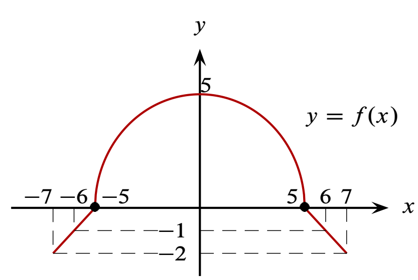
$f(3) = 10$, $f(5) = 7$ y $f(1\,000) = 7$.

9.



no es par ni impar; $R_g = \mathbb{R}$.

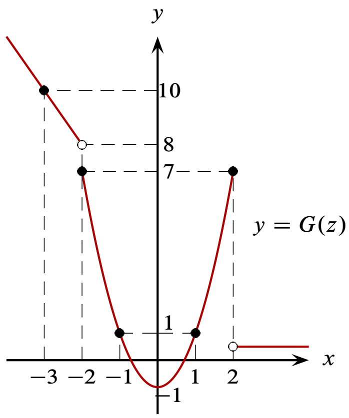
10.



$R_f = (-\infty, 5]$; las raíces son $x = \pm 5$;

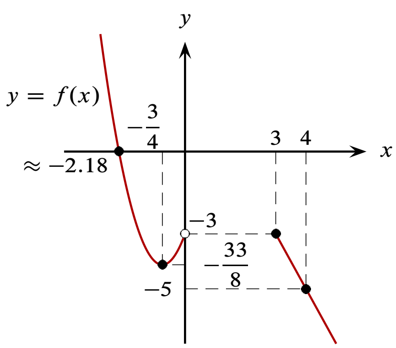
la función es par .

11.



12. $D_f = (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$;

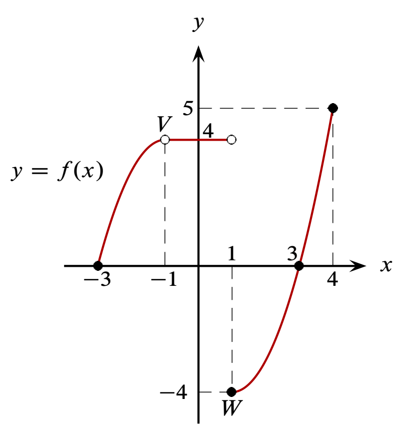
la única raíz es $x = \dfrac{-3-\sqrt{33}}{4}$;



$R_f = \mathbb{R}$.

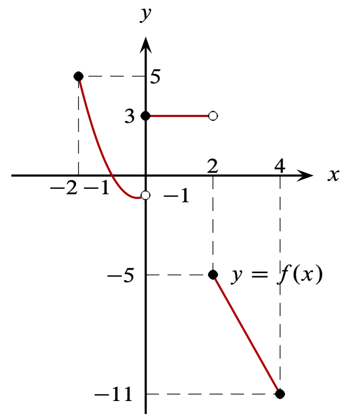
13. Dominio: $[-3, 4] - \{-1\}$; rango: $[-4, 5]$;

raíces: $x = -3$ & $x = 3$;

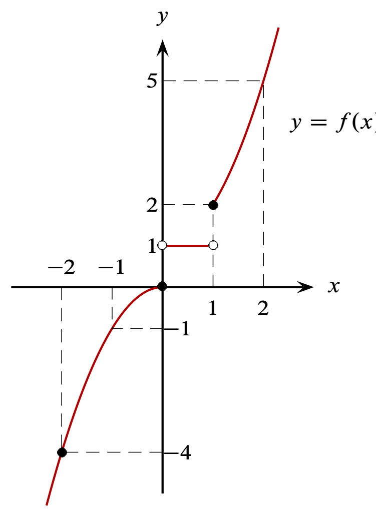


14. $D_f = [-2, 4]$; $R_f = [-11, -5] \bigcup \left(-\dfrac{9}{8}, 5\right]$;

raíces: $x = -1$; f no es par, ni impar.

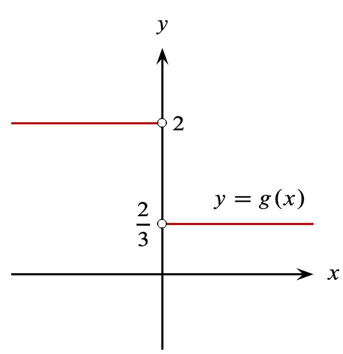


15. $D_f = \mathbb{R}$;



$R_f = (-\infty, 0] \cup \{1\} \cup [2, +\infty)$.

$D_g = \mathbb{R} - \{0\}$;

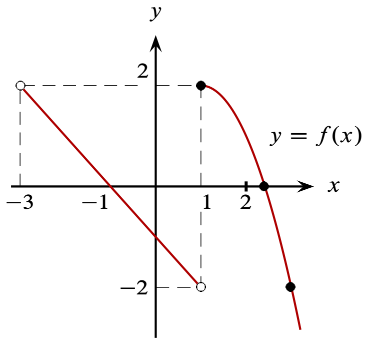


$R_g = \left\{\dfrac{2}{3}, 2\right\}$.

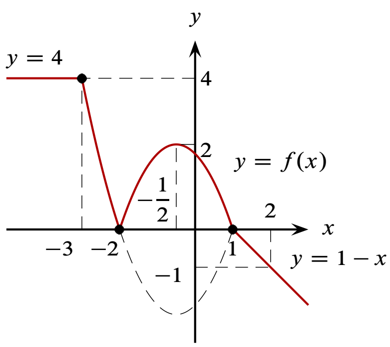
16. $D_f = (-3, +\infty)$;

las raíces son $x = -1$ & $x = 1 + \sqrt{2}$;

$R_f = (-\infty, 2]$.



17.

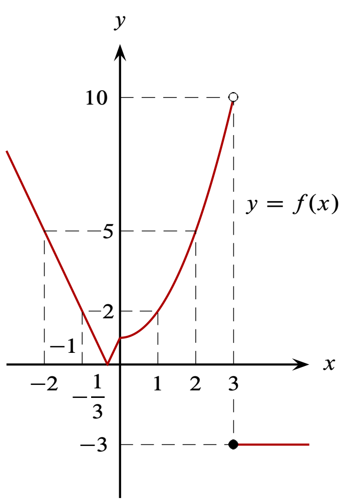


$D_f = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$;

$R_f = (-\infty, 4]$;

raíces $x = -2$ & $x = 1$.

18.

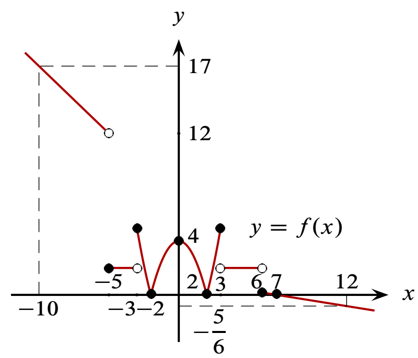


$D_f = \mathbb{R}$;

$R_f = \{-3\} \bigcup [0, +\infty)$;

raíz $x = -\dfrac{1}{3}$.

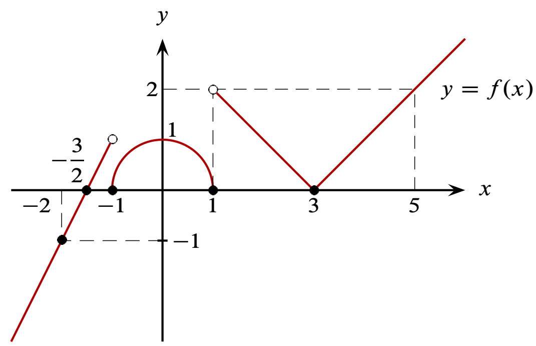
19.



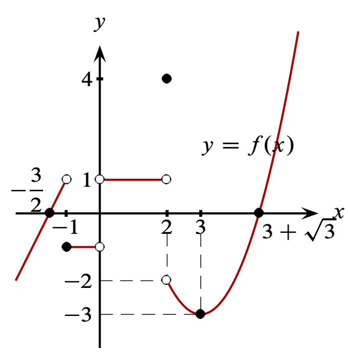
$R_f = (-\infty, 5] \bigcup (12, +\infty)$;

la función no es par ni impar.

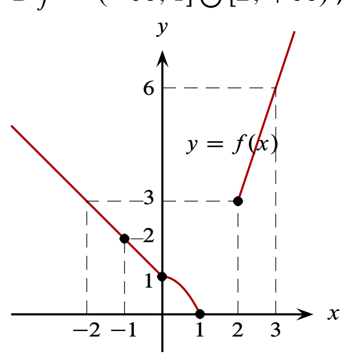
20.



21.

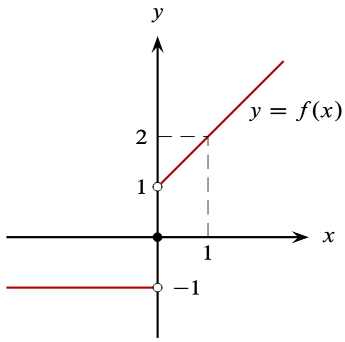


22. $D_f = (-\infty, 1] \bigcup [2, +\infty)$;



23.

$D_f = \mathbb{R}$;



$R_f = \{-1, 0\} \bigcup (1, +\infty)$.

24. $D_{f+g} = (-10, +\infty)$;

$$(f+g)(x) = \begin{cases} x^3 + 1 - 2x & \text{si } x \in (-10, 0]\,; \\ x^3 + x^2 & \text{si } x \in (0, 6]\,; \\ x + x^2 & \text{si } x \in (6, +\infty)\,. \end{cases}$$

25. a. En $(-3, 0) \bigcup (0, 3) \bigcup (5, +\infty)$, $f(x) > 0$;
en $(-\infty, -3) \bigcup (3, 5)$, $f(x) < 0$;
$f(x) = 0$ si $x = -3$, $x = 3$ & $x = 5$;

b. f es creciente en $(-\infty, 0) \bigcup (4, 6)$;
f es decreciente en $(0, 4) \bigcup (6, +\infty)$.

26. $f(x) > 0$ si $x \in (-4, -2) \bigcup (-2, -1) \bigcup (2, 7)$;

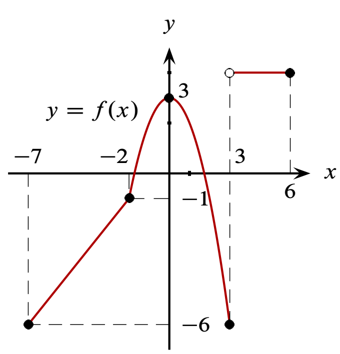
$f(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -4) \bigcup (-1, 2) \bigcup (7, +\infty)$;

$f(x) = 0$ si $x = -4, -1, 2, 7$;

f es creciente en $(-\infty, -2)$ y en $(0.5, 5)$;

f es decreciente en $(-2, 0.5)$ y en $(5, +\infty)$.

27. a.



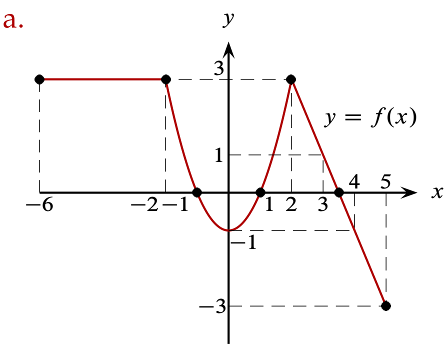
b. $D_f = [-7, 6]$ y $R_f = [-6, 3] \bigcup \{4\}$;
raíces $x = \pm\sqrt{3}$;

c. en $[-7, 0]$ creciente y en $[0, 3]$ decreciente;
en $(3, 6]$ es constante;

d. $f(x) > 0$ si $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \bigcup (3, 6]$;

$f(x) < 0$ si $x \in [-7, -\sqrt{3}) \bigcup (\sqrt{3}, 3]$.

28. a.



b. $D_f = [-6, 5]$, $R_f = [-3, 3]$; raíces $x = \pm 1, \dfrac{7}{2}$;

c. $f(x)$ crece en $[0, 2]$ y decrece en $[-2, 0] \bigcup [2, 5]$;

d. $f(x) > 0$ si $x \in [-6, -1) \bigcup \left(1, \dfrac{7}{2}\right)$;

$f(x) < 0$ si $x \in (-1, 1) \bigcup \left(\dfrac{7}{2}, 5\right]$.

29. $D_f = \mathbb{R}$;

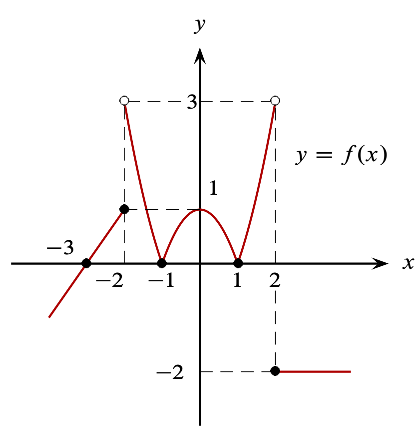
las raíces: $\{-3, -1, 1\}$;

$f(x) > 0$ si $x \in (-3, -1) \bigcup (-1, 1) \bigcup (1, 2)$;

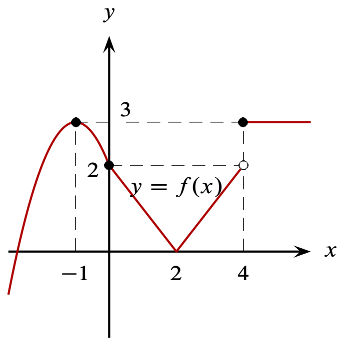
$f(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -3) \bigcup [2, \infty)$;

$f(x)$ crece si $x \in (-\infty, -2)$, $(-1, 0)$ y en $(1, 2)$;

$f(x)$ decrece si $x \in (-2, -1)$ y en $(0, 1)$;



30. a.

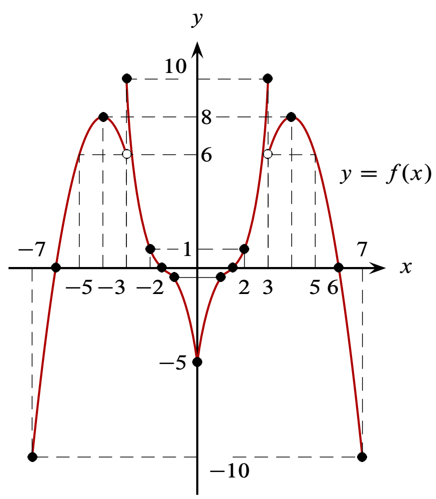


b. $R_f = (-\infty, 3]$; sus raíces son $-1-\sqrt{3}$ y 2;

c. f es creciente en $(-\infty, -1] \bigcup [2, 4]$;
f es decreciente en $[-1, 2]$;
f constante en $[4, +\infty)$;

d. f no es par y tampoco es impar .

31. a.



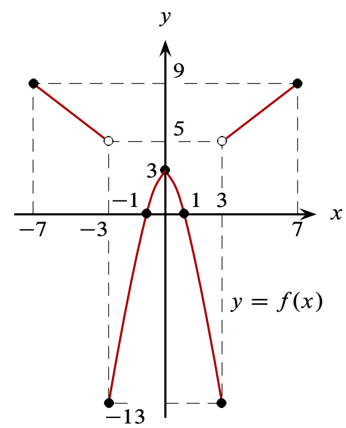
$D_f = (-7, 7)$;

raíces: $-6, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$ y 6;
$R_f = [-10, 10]$;

b. $f(x) > 0$ si $x \in \left(-6, -\frac{3}{2}\right) \bigcup \left(\frac{3}{2}, 6\right)$;
$f(x) < 0$ si $x \in (7, -6) \bigcup \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \bigcup (6, 7)$;

c. f es creciente en $(-7, -4)$, $[0, 3]$ y en $[3, 4)$;
f es decreciente en $(-4, -3)$, $[-3, 0]$ y en $(4, 7)$.

32.



$D_f = [-7, 7]$;
raíces: $\{-1, 1\}$;
$R_f = [-13, 3] \bigcup (5, 9]$;
la función decrece en $[-7, -3)$ y en $[0, 3]$;
la función crece en $[-3, 0]$ y en $[3, 7]$.