CAPÍTULO

2

Funciones

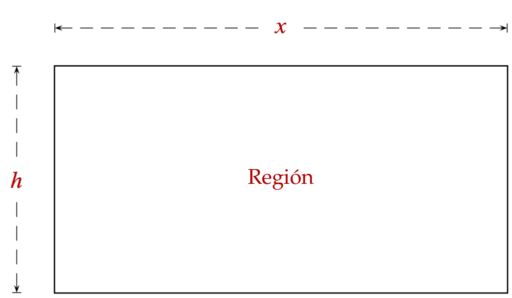
[1]

2.8 Modelando con funciones

Ahora haremos uso de ejemplos concretos para mostrar la manera en que podemos utilizar a las funciones para modelar matemáticamente situaciones y problemas reales.
Para llevar a cabo la actividad de modelar con funciones es necesario que se consideren las preguntas siguientes: ¿qué es lo que se pide en el problema?, así como ¿qué datos se dan en el problema?

Ejemplo 2.8.1 *Una región rectangular tiene un perímetro de* 200 *m. Expresar el área de la región como función de la longitud de uno de sus lados.*

▼ Consideramos un rectángulo con lados de longitudes x & h, expresados en metros.



¿Qué es lo que se pide en este problema?
Expresar el área A del rectángulo, que es $A = xh$, como función (solamente) de x o bien de h.
¿Qué dato se da en el problema? Que el perímetro, que es $P = 2x + 2h$, es de 200 m. Esto es, se sabe que $2x + 2h = 200$ o bien que $x + h = 100$.

Tenemos entonces

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

$$\begin{cases} \text{una función: } A = xh & \text{(por abuso del lenguaje en ocasiones llamamos función} \\ & \text{a una regla de correspondencia o una fórmula);} \\ \text{una ecuación: } x + h = 100. & \end{cases}$$

Ahora de la ecuación despejamos una de las variables (la que más nos convenga) para luego sustituirla en la función. En este caso es indistinto despejar cualquiera de las dos variables.
Si queremos expresar el área A como función de x, despejamos h de la ecuación.

$$x + h = 100 \Rightarrow h = 100 - x,$$

sustituimos el valor de h en la función y obtenemos

$$A = xh = x(100 - x) = 100x - x^2;$$

(si la quisiéramos como una función de h despejaríamos $x = 100 - h$.)

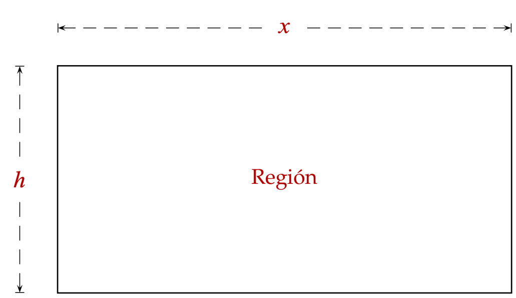
Luego la función buscada es

$$A(x) = 100x - x^2.$$

□

Ejemplo 2.8.2 *Una región rectangular tiene un área de* $160\ m^2$. *Expresar su perímetro como función de la longitud de uno de sus lados.*

▼ Consideramos un rectángulo con lados de longitudes x & h, expresados en metros.



¿Qué es lo que se pide en el problema?
Expresar el perímetro P del rectángulo, que es $P = 2x + 2h$, como función (solamente) de x o bien de h.
¿Qué dato se da en el problema? Que el área del rectángulo, que es $A = xh$, es igual a $160\ \text{m}^2$.
Esto es, se sabe que: $xh = 160$.

Tenemos entonces

$$\begin{cases} \text{una función: } P = 2x + 2h; \\ \text{una ecuación: } xh = 160. \end{cases}$$

Si queremos expresar el perímetro P como función de h, despejamos x de la ecuación para después sustituirla en P.

$$xh = 160 \Rightarrow x = \frac{160}{h};$$

sustituyendo x en P obtenemos

$$P = 2x + 2h = 2\left(\frac{160}{h}\right) + 2h = \frac{320}{h} + 2h.$$

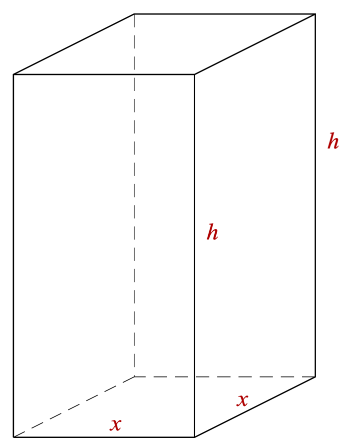
Luego la función buscada es

$$P(h) = \frac{320}{h} + 2h.$$

$\square$

Ejemplo 2.8.3 *Una caja de caras laterales rectangulares sin tapa tiene su base cuadrada y un volumen de* 2 m^3. *Expresar el área de la caja como función de uno de los lados de la base.*

▼ Consideramos una caja de caras laterales rectangulares de altura h y base cuadrada de lado x con h & x expresados en metros.



¿Qué es lo que se pide en este problema?
Expresar el área A de la caja como función de x (uno de los lados de la base) a sabiendas de que

$$A = \text{área de la base } + \text{ área de las caras laterales } = x^2 + 4xh.$$

¿Qué dato se da en el problema? Que el volumen de la caja, $V = x^2h$, es igual a 2 m^3; es decir, se sabe que $x^2h = 2$.

Tenemos entonces

$$\begin{cases} \text{una función: } A = x^2 + 4xh; \\ \text{una ecuación: } x^2h = 2. \end{cases}$$

Ahora, dado que se quiere expresar A como función de x, despejamos h de la ecuación, para luego sustituirla en la función.

$$x^2h = 2 \Rightarrow h = \frac{2}{x^2}.$$

Sustituyendo h en la función obtenemos

$$A = x^2 + 4xh = x^2 + 4x\left(\frac{2}{x^2}\right) = x^2 + \frac{8}{x}.$$

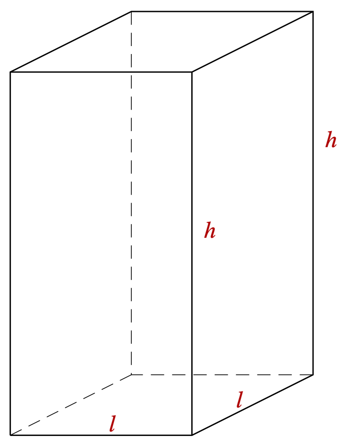
Luego la función buscada es

$$A(x) = x^2 + \frac{8}{x}.$$

□

Ejemplo 2.8.4 *Una caja de caras laterales rectangulares con base y tapa cuadradas tiene un área total de* 1 200 *cm*^{2}*. Expresar el volumen de la caja como función de uno de los lados de la base.*

▼ Consideramos una caja de caras rectangulares de altura h y base cuadrada de lado l, con h y l expresados en centímetros.



¿Qué es lo que se pide en este problema? Expresar el volumen V de la caja como función de l (uno de los lados de la base) a sabiendas de que

$$V = l^2 h.$$

¿Qué se sabe en el problema? Que el área total de la caja, que es $A = l^2 + l^2 + 4lh$, es igual a 1 200 cm^2. Es decir, se sabe que $2l^2 + 4lh = 1\,200$; o sea $l^2 + 2lh = 600$.

Tenemos entonces

$$\begin{cases} \text{una función: } V = l^2 h; \\ \text{una ecuación: } l^2 + 2lh = 600. \end{cases}$$

Ahora bien, debido a que se quiere expresar a V como función de l, despejamos h de la ecuación para luego sustituirla en la función

$$l^2 + 2lh = 600 \Rightarrow 2lh = 600 - l^2 \Rightarrow h = \frac{600 - l^2}{2l}.$$

Sustituyendo h en la función, obtenemos

$$V = l^2 h = l^2 \left(\frac{600 - l^2}{2l} \right) = \frac{l}{2}(600 - l^2) = 300\,l - \frac{1}{2} l^3.$$

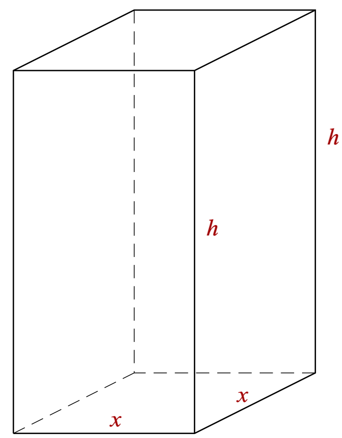
Luego la función buscada es

$$V(l) = 300\,l - \frac{1}{2} l^3.$$

□

Ejemplo 2.8.5 *Se va a construir un tanque de caras laterales rectangulares, con base y tapa cuadradas con capacidad de* 8 m^3 *para almacenar aceite. El material para construir la base y la tapa tiene un costo de* \$1 000.00 *por* m^2 *y el material para construir las caras laterales tiene un costo de* \$500.00 *por* m^2.
Obtener el costo de la construcción del tanque en función de la longitud x *del lado de la base cuadrada.*

▼ La figura del tanque corresponde a:



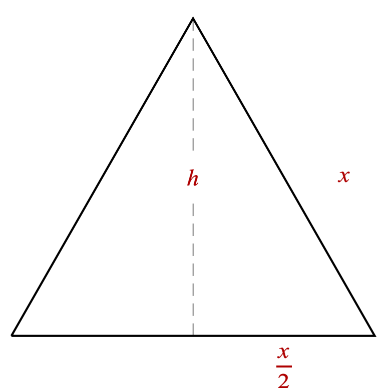
El área de la base cuadrada es x^2 y el de la tapa también es x^2, luego la suma de estas áreas es $2x^2$; entonces, el costo en pesos para construirlas, será de $2\,000x^2$, estando x expresada en metros.
Una cara lateral del tanque constituye un rectángulo de base x y altura digamos h (expresada también en metros), es decir, xh es su área.
El volumen del tanque es el área de la base multiplicada por la altura, es decir, x^2h, pero como tiene que ser 8 m^3 tenemos que $x^2h = 8$; luego despejando h resulta que $h = \dfrac{8}{x^2}$.
El área de una cara lateral es por tanto $x\dfrac{8}{x^2} = \dfrac{8}{x}$ y el área de las cuatro es $4\left(\dfrac{8}{x}\right) = \dfrac{32}{x}$.
Y su costo es $\dfrac{32}{x}(500) = \dfrac{16\,000}{x}$.
El costo total C de la construcción como función de la longitud del lado x de la base cuadrada será

$$C(x) = 2\,000x^2 + \frac{16\,000}{x}\,.$$

□

Ejemplo 2.8.6 *Exprese el área de un triángulo equilátero como función de la longitud* x *de uno de sus lados.*

▼ Usaremos la siguiente figura



Como la altura correspondiente a uno de sus lados es también la mediatriz tenemos, por el teorema de Pitágoras, que

$$h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{4x^2 - x^2}{4}} =$$
$$= \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Y el área será entonces

$$A = \frac{1}{2} \times x \times \frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2.$$

Es decir,

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2.$$

□

Ejemplo 2.8.7 *El número de vibraciones* (V) *de una cuerda que vibra es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la tensión* T *de la cuerda. Una cuerda particular vibra a* 864 *vibraciones por segundo sometida a una tensión de* 24 *kg.*

1. *Exprese el número de vibraciones de esta cuerda en términos de la tensión* T*.*
2. *Determine el número de vibraciones por segundo* $(V/seg.)$ *cuando la cuerda esté sometida a una tensión de* 6 *kg.*

▼

1. Ya que V es directamente proporcional a $\sqrt{T}$, entonces existe una constante de proporcionalidad k tal que $V = k\sqrt{T}$. Para la cuerda en consideración tendremos

$$864 = k\sqrt{24};$$

por lo tanto

$$k = \frac{864}{\sqrt{24}} = \frac{864}{\sqrt{24}} \cdot \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{24}} = \frac{864\sqrt{24}}{24} = 36\sqrt{24} = 36\sqrt{4 \times 6} = 72\sqrt{6};$$

y por último

$$V = 72\sqrt{6}\sqrt{T} = 72\sqrt{6T}.$$

2. Si $T = 6$, tendremos que

$$V = 72\sqrt{6 \times 6} = 72 \times 6 = 432\,.$$

□

Ejemplo 2.8.8 *En un bosque un depredador se alimenta de su presa y, para las primeras* 15 *semanas a partir del fin de la temporada de caza, la población de depredadores es una función* f *de* x*, donde* x *es el número de presas en el bosque el cual, a su vez, es una función* g *de* t*, donde* t *es el número de semanas que han pasado desde el fin de la temporada de caza.*

Si $f(x) = \frac{1}{48}x^2 - 2x + 50$ & $g(t) = 4t + 52$*, donde* $0 \le t \le 15$*, haga lo siguiente:*

1. *Encuentre un modelo matemático que exprese la población de depredadores como función del número de semanas a partir del fin de la temporada de caza.*
2. *Determine la población de depredadores* 11 *semanas después del cierre de la temporada de caza.*

▼

1. Tenemos que:

$$\begin{aligned} f[x(t)] &= f[g(t)] = f(4t+52) = \frac{(4t+52)^2}{48} - 2(4t+52) + 50 = \\ &= \frac{[4(t+13)]^2}{48} - 8t - 104 + 50 = \frac{t^2+26t+169}{3} - 8t - 54 = \\ &= \frac{t^2+26t+169-24t-162}{3} = \frac{t^2+2t+7}{3}, \text{ (donde } 0 \le t \le 15) . \end{aligned}$$

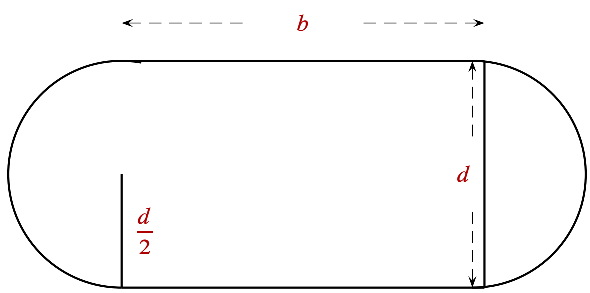
2. Valuamos:

$$f[x(11)] = f[g(11)] = \frac{11^2 + 2\times 11 + 7}{3} = \frac{121+22+7}{3} = \frac{150}{3} = 50.$$

□

Ejemplo 2.8.9 *Una pista de* 400 *m de longitud tiene lados paralelos y cabeceras semicirculares. Encuentre una expresión para el área A encerrada por la pista, en función del diámetro d de los semicírculos.*

▼ Dibujamos la pista.



Vemos que:

$$A = bd + \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = bd + \frac{\pi d^2}{4}.$$

Pero el perímetro es

$$P = 2b + \pi d = 400 \text{ por lo que } b = \frac{400-\pi d}{2}$$

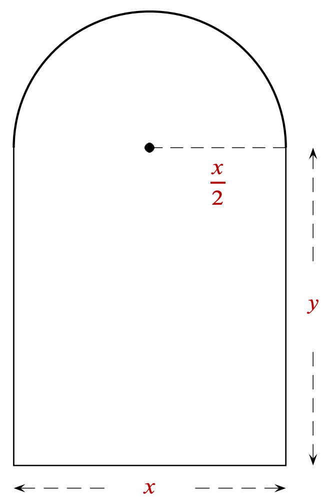
y entonces sustituyendo en A

$$A(d) = \frac{400-\pi d}{2}d + \frac{\pi d^2}{4} = \frac{800d - \pi d^2}{4} = \frac{d}{4}(800-\pi d).$$

□

Ejemplo 2.8.10 *Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de* 45 *dm, exprese su área como función del ancho x de la misma.*

▼ Primero representamos la ventana:



El área A es la suma del área del rectángulo más la del semicírculo que tiene radio $\dfrac{x}{2}$, es decir,

$$A = xy + \pi\frac{x^2}{4}\frac{1}{2} = xy + \frac{\pi}{8}x^2\,.$$

Pero además el perímetro de 45 dm es igual a

$$P = x + 2y + 2\pi\frac{x}{2}\frac{1}{2}\,,$$

y así

$$P = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x + 2y = 45$$

y de aquí que

$$2y = 45 - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x \;\Rightarrow\; y = \frac{45}{2} - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\frac{x}{2}\,.$$

Luego, sustituyendo este valor, nos queda A como función de x:

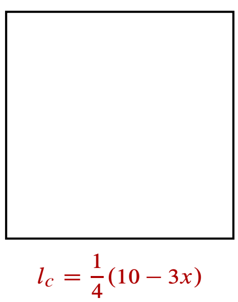
$$A(x) = x\left[22.5 - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\frac{x}{2}\right] + \frac{\pi}{8}x^2 = 22.5x + \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)x^2 =$$
$$= 22.5x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)x^2\,.$$

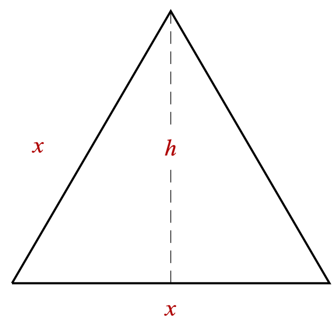
□

Ejemplo 2.8.11 *Un cordel de* 10 *m de largo se corta en dos partes; con una de ellas se forma un cuadrado y con la otra se forma un triángulo equilátero. Si x es la longitud del lado del triángulo, exprese la suma de las áreas del cuadrado y del triángulo (área total encerrada) en función de x.*

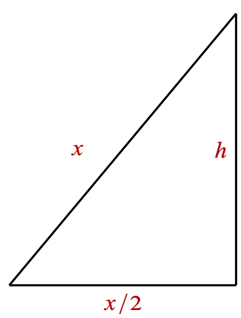
▼ Consideramos la figura siguiente

Si el punto C es donde cortamos el cordel $\overline{AB}$ en 2 pedazos entonces $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB} = 10$.
Si con el pedazo $\overline{AC}$ formamos un triángulo equilátero con lados de longitud x entonces $\overline{AC} = 3x$.
De lo cual se desprende que $\overline{CB} = 10 - 3x$.
Con el pedazo $\overline{CB}$ formamos un cuadrado con lados de longitud $l_c = \dfrac{1}{4}(10 - 3x)$.
Las figuras correspondientes son





Calculamos la altura h del triángulo equilátero, mediante el teorema de Pitágoras.



Tenemos:

$$h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}x^2} = \sqrt{\frac{3}{4}x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

El área del triángulo es

$$A_t = \frac{xh}{2} = \frac{1}{2}x\frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2.$$

El área del cuadrado es

$$A_c = {l_c}^2 = \left[\frac{1}{4}(10 - 3x)\right]^2 = \frac{1}{16}(10 - 3x)^2.$$

El área total de los 2 polígonos es

$$A = A_t + A_c = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{1}{16}(10 - 3x)^2.$$

Es decir,

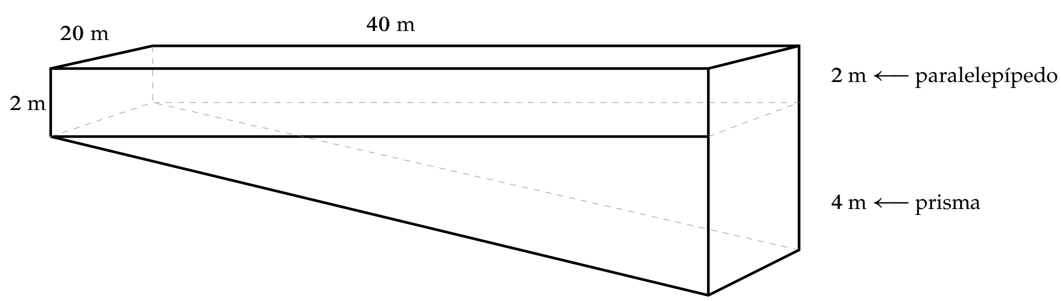
$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{1}{16}(10 - 3x)^2,$$

que es la función deseada.

□

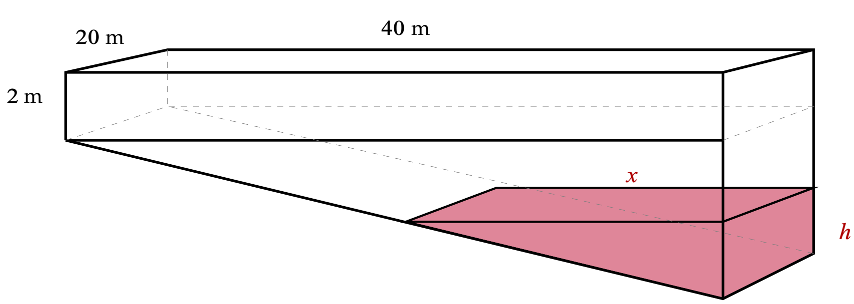
Ejemplo 2.8.12 *La piscina mostrada en la figura tiene 2 m de profundidad mínima y 6 m de profundidad máxima, 40 m de largo, 20 m de ancho y el fondo es un plano inclinado. Expresar el volumen V del agua contenida en la piscina en función de la altura h del nivel del agua desde la parte más profunda de la piscina.*

▼

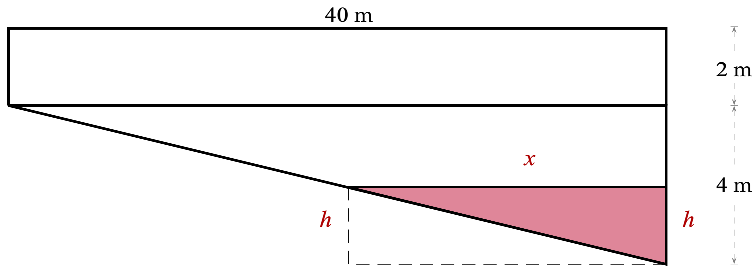


Primero observamos que la piscina está conformada por dos secciones diferentes: en los 2 primeros metros de profundidad se tiene un paralelepípedo recto rectangular (una caja de caras rectangulares) y en la parte restante se tiene una forma de prisma con caras rectangulares y triangulares.
¿Qué se pide en el problema? Expresar el volumen V del agua contenida en la piscina (cuando ésta no está necesariamente llena) en función de la altura h, medida a partir de la parte más profunda de dicha piscina.
¿Qué datos se dan en el problema? Los que se ven en la figura.
Para resolver este problema supongamos que la piscina está inicialmente vacía y que la estamos llenando.

1. En una primera etapa vemos lo siguiente:



La sección vertical de la figura anterior es



En la figura anterior vemos la porción de la piscina que está llena de agua (parte sombreada) y que tiene un volumen V_1. Proponemos dos formas de calcular dicho volumen:

a. V_1 es igual a la mitad del volumen del paralelepípedo que tiene por base el rectángulo de lados h & 20 m y altura x, es decir, $V_1 = \dfrac{20hx}{2}$.

b. V_1 = (área del triángulo rectángulo de catetos x, h)(anchura de la piscina)= $\dfrac{xh}{2} \times 20$.

Es decir:

$$V_1 = 10xh.$$

En la figura anterior vemos una proyección de la piscina donde, por semejanza de triángulos, se cumple que

$$\frac{x}{h} = \frac{40}{4} \Rightarrow \frac{x}{h} = 10 \Rightarrow x = 10h.$$

Entonces,

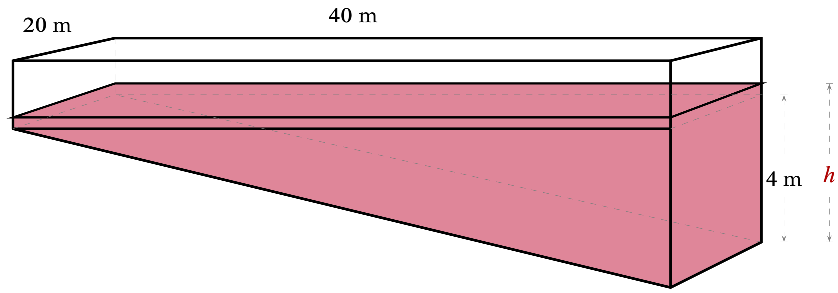
$$V_1 = 10xh = 10(10h)h = 100h^2.$$

Es decir: $V_1(h) = 100h^2$ para $0 \leq h \leq 4$.

Nótese que el volumen de todo el semiparalelepípedo es

$$V_p = V_1(4) = V_1(h = 4) = 100(4)^2 = 100(16) = 1\,600 \text{ m}^3.$$

2. En una segunda etapa, cuando el semiparalelepípedo ya fue rebasado por el agua, vemos lo siguiente:



Ahora la porción de la piscina llena de agua está conformada por el semiparalelepípedo que tiene un volumen $V_p = 1\,600\,\mathrm{m}^3$ y por un paralelepípedo recto rectangular con una altura igual a $h - 4$ y un volumen V_c dado por

$$V_c = (\text{largo})(\text{ancho})(\text{altura}) = (40)(20)(h-4);$$
$$V_c = 800(h-4) = 800h - 3\,200.$$

Entonces, el volumen de toda la porción de la piscina que está llena de agua es

$$V_2 = V_p + V_c = 1\,600 + (800h - 3\,200) = 800h - 1\,600.$$

Es decir: $V_2(h) = 800(h-2)$ para $4 < h \le 6$.

3. Por lo tanto el volumen V en función de h es

$$V(h) = \begin{cases} 100\,h^2 & \text{si } 0 \le h \le 4; \\ 800(h-2) & \text{si } 4 \le h \le 6. \end{cases}$$

□

Ejemplo 2.8.13 *Una barra metálica AD de longitud ℓ está formada por tres porciones: AB, BC y CD, de longitudes ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 (donde $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = \ell$) y con densidades lineales de masa (cantidad de masa por unidad de longitud) ρ_1, ρ_2, ρ_3, respectivamente. Si AP es una porción de longitud x (variable) y masa M (variable), expresar M en función de x.*

▼ ¿Qué se pide en el problema? Expresar la masa de una porción cualquiera de la barra metálica en función de la longitud de dicha porción. Es decir, dado un pedazo AP (de la barra metálica) de longitud x, expresar la masa M de dicho pedazo en función (precisamente) de x.
Para encontrar una expresión de la masa M debemos tomar en cuenta la longitud x de la porción considerada; ¿por qué? Porque puede suceder cualquiera de los tres casos siguientes:

$$0 \le x \le \ell_1 \text{ o bien } \ell_1 < x \le \ell_1 + \ell_2 \text{ o bien } \ell_1 + \ell_2 < x \le \ell.$$

Considerando que la densidad lineal de masa es la cantidad de masa por unidad de longitud, entonces la masa de un pedazo de alambre (con densidad lineal constante) es igual al producto de su densidad por su longitud; es decir la masa del pedazo de alambre está en función de su longitud. Por esto, para un pedazo de alambre de longitud x sucede lo siguiente:

1. Si $0 \le x \le \ell_1$, entonces la masa (del pedazo de alambre) es $M_1(x) = \rho_1 x$.
2. Si $\ell_1 < x \le \ell_1 + \ell_2$, entonces la masa es $M_2(x) = \rho_1\,\ell_1 + \rho_2\,(x - \ell_1)$.
3. Si $\ell_1 + \ell_2 < x \le \ell$, entonces la masa es $M_3(x) = \rho_1\,\ell_1 + \rho_2\,\ell_2 + \rho_3\,[x - (\ell_1 + \ell_2)]$.

Por lo tanto, la masa M de una porción de alambre de longitud x es la función

$$M(x) = \begin{cases} \rho_1 x & \text{si } 0 \le x \le \ell_1; \\ \rho_1\ell_1 + \rho_2(x - \ell_1) & \text{si } \ell_1 < x \le \ell_1 + \ell_2; \\ \rho_1\ell_1 + \rho_2\ell_2 + \rho_3[x - (\ell_1 + \ell_2)] & \text{si } \ell_1 + \ell_2 < x \le \ell. \end{cases}$$

□

Ejercicios 2.8.1 *Soluciones en la página 16*

1. Las dimensiones de un rectángulo pueden variar, pero no su área que debe ser de A cm^2. Considerando que uno de sus lados mide x cm, expresar el perímetro P del rectángulo en función de x.

2. El perímetro de un rectángulo debe ser P cm. Expresar el área A del rectángulo en función de la longitud y de uno de sus lados.

3. Las dimensiones de un paralelepípedo (caja con caras laterales rectangulares) pueden variar, pero no su volumen que debe ser igual a V m^3. Considerando que la caja tiene base cuadrada con lado de longitud igual a x m, expresar el área A de la superficie total del paralelepípedo en función de x.

4. Una caja con base y tapa cuadradas tiene una superficie de área A cm^2. Expresar el volumen V de la caja en función de la longitud de uno de sus lados.

5. a. Exprese el área A de un cuadrado en función de su perímetro P.
   b. Expreſe el perímetro P de un cuadrado en función de su área A.

6. a. Exprese el área A de un círculo en función de su perímetro C.
   b. Exprese el perímetro C de un círculo en función de su área A.

7. a. Exprese el área A de un triángulo equilátero en función de la longitud s de uno de sus lados.
   b. Exprese el área A de un triángulo equilátero en función de la longitud h de la altura.

8. Exprese el volumen V de un cubo en función del área A de su base.

9. Una caja con base y tapa cuadradas de lado x tiene una superficie total de 600 m^2. Expresar el volumen V de la caja como función de x.

10. Una pecera de 1.5 pies de altura h tiene un volumen de 6 pies cúbicos. Si x es el largo de la base, y su ancho es y:

    a. Determine y como función de x. Además grafique esta función.

    b. Encuentre la cantidad de material necesario, en pies cuadrados, para construir la pecera en función de x.

11. Un envase cilíndrico tiene una altura igual al triple del radio r.

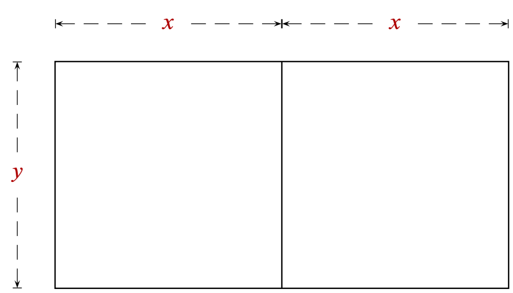
    a. Determine la superficie del envase, considerando sus dos tapas, en función del radio.

    b. Si se desean fabricar envases cuyos radios están entre 3 y 5 dm, ¿cuál es la respectiva variación de volumen de los envases?

12. Un terreno tiene la forma de un rectángulo con dos semicírculos adosados a dos de sus lados opuestos. Si el perímetro del terreno es de 800 m, hallar el área A del terreno en función de la longitud ℓ de uno de los lados del rectángulo.

13. Una lata tiene capacidad de 1 dm^3 y forma de un cilindro circular recto. Exprese el área de la superficie de la lata como función de su radio.

14. Un granjero dispone de 200 m de valla para cercar dos corrales adyacentes (véase figura). Expresar el área A encerrada como función de x



15. Una caja cerrada, en forma de cubo, va a construirse con dos materiales diferentes. El material de las caras laterales cuesta 2.5 pesos por centímetro cuadrado y el material de la base y la tapa cuesta 3 pesos por centímetro cuadrado. Exprese el costo total C de la caja en función de la longitud x de uno de sus lados.

16. Un avión vuela a una velocidad de 350 millas/h, a una altitud de una milla y pasa directamente sobre una estación de radar en el instante $t = 0$.

    a. Exprese la distancia horizontal d (en millas) que el avión recorre como función del tiempo t.

    b. Exprese la distancia s entre el avión y la estación de radar como función de d.

    c. Aplique la composición de funciones para expresar s como función de t.

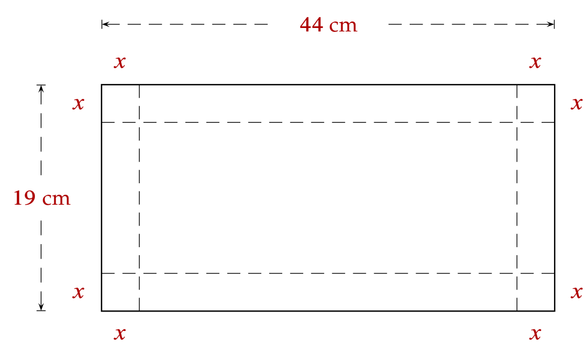
17. Una ventana inglesa tiene la forma de rectángulo coronado con un triángulo equilátero. Si el perímetro de la ventana es de 30 m, exprese el área de la ventana en función de su ancho.

18. Se va a construir una cisterna rectangular con base y tapa cuadradas para almacenar 12 000 pies^3 de agua. El concreto para construir la base y las caras laterales tiene un costo de \$100.00 por pie^2 y el material para construir la tapa cuesta \$200.00 por pie^2.

    Obtenga el costo de la construcción de la cisterna en función de la longitud x del lado de la base.

19. Un alambre de 100 cm de longitud se corta en dos partes. Una de ellas se dobla para formar un cuadrado y con la otra se forma un triángulo equilátero. Obtener el área de ambas figuras como función del lado del cuadrado.

20. De una pieza rectangular de cartón que mide 44 cm de largo y 19 cm de ancho se va a construir una caja sin tapa. Se cortarán 4 cuadrados de x cm de lado, como se muestra en la figura, y luego se doblará sobre las líneas punteadas para formar la caja. Exprese el volumen de esta caja como función de x.



21. Considerando las escalas Celsius y Fahrenheit para medir temperaturas, se sabe que 0 °C corresponde a 32 °F y que 100 °C a 212 °F. Deducir la fórmula de transición de una escala a la otra, es decir expresar °C en función de °F, así como °F en función de °C.

22. Un viaje subsidiado por una escuela costará a cada estudiante 150 pesos si viajan no más de 150 estudiantes; sin embargo el costo a pagar por estudiante se reduciría 5 pesos por cada uno más que se inscriba al grupo de los 150. Exprese los ingresos brutos recibidos por la escuela en función del número de inscritos a dicho viaje.

23. El costo de un viaje en taxi es de 4.80 pesos por el primer kilómetro (o parte del primer kilómetro) y de 30 centavos por cada 100 metros subsiguientes. Exprese el costo de un viaje como función de la distancia x recorrida (en kilómetros) para $0 < x < 2$; además grafique esa función.

Ejercicios 2.8.1 *Modelando con funciones, página 13*

1. $P(x) = 2\left(x + \dfrac{A}{x}\right)$.

2. $A(y) = \left(\dfrac{P}{2} - y\right) y$.

3. $A(x) = 2x^2 + \dfrac{4V}{x}$.

4. $V(w) = \dfrac{A}{4} w - \dfrac{1}{2} w^3$.

5. $A(P) = \dfrac{1}{4} P^2$;

   $P(A) = 4\sqrt{A}$.

6. $A(C) = \dfrac{1}{4\pi} C^2$;

   $C(A) = 2\pi\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$.

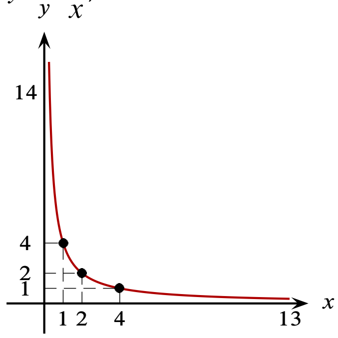
7. $A(s) = \dfrac{\sqrt{3}}{4} s^2$;

   $A(h) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} h^2$.

8. $V = \left(A^{\frac{1}{2}}\right)^3 = A^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{A^3}$.

9. $V = \dfrac{300x - x^3}{2}$.

10. $y = \dfrac{4}{x}$;



   $A = 3\left(x + \dfrac{4}{x}\right) + 4$ pies^2.

11. $S(r) = 6\pi r^2 + 2\pi r^2 = 8\pi r^2$;

    $V(r) \in [81\pi, 375\pi]$.

12. $A = \dfrac{1}{4}\left(1\,600 l - \pi l^2\right)$.

13. $A(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{2}{r}$.

14. $A_{\square}(x) = \dfrac{2x(200 - 4x)}{3}$.

15. $C(x) = 16x^2$ pesos.

16. $d = 350t$;

    $s = \sqrt{1 + d^2}$;

    $s(t) = \sqrt{1 + (350t)^2}$.

17. $A = 15x + \dfrac{-6 + \sqrt{3}}{4} x^2$.

18. $C(x) = 300x^2 + \dfrac{4\,800\,000}{x}$.

19. $A_{\triangle} = \dfrac{(100 - 4x)(25 - x)}{3\sqrt{3}}$.

20. $V(x) = 4x^3 - 126x^2 + 836x$ cm^3.

21. $T_C = \dfrac{5}{9}(T_F - 32)$; $\quad T_F = \dfrac{9}{5} T_C + 32$.

22. $I(n) = \begin{cases} 150n & \text{si } n \le 150; \\ (180 - n)5n & \text{si } n > 150. \end{cases}$

23. $C(x) = 4.80 + n(0.30)$

    si $1 + n(0.1) \le x < 1 + (n + 1)(0.1)$.