CAPÍTULO

2

Funciones

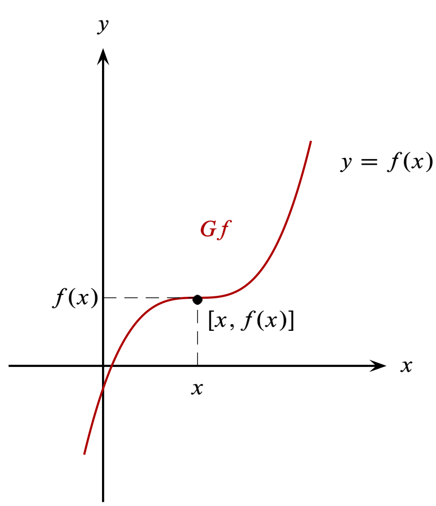
[1]

2.5 Gráfica de una función real de variable real

Definimos la gráfica G_f de una función f real de una variable real como:

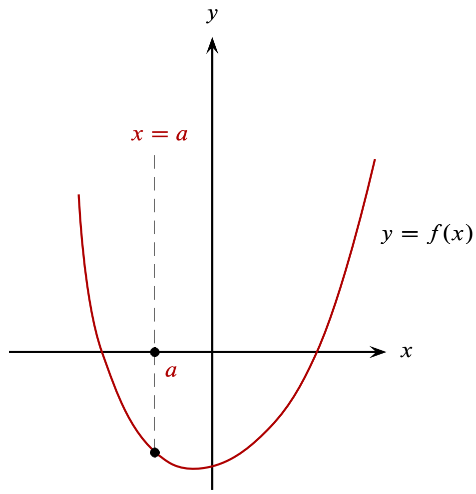
$$G_f \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \in D_f \;\&\; y = f(x) \right\} .$$

La expresión anterior se lee:
"La gráfica G_f de una función real de una variable real es igual al conjunto de los puntos que pertenecen a $\mathbb{R}^2$ (ubicados en el plano cartesiano) tales que x pertenece al dominio de f & y es igual a $f(x)$".

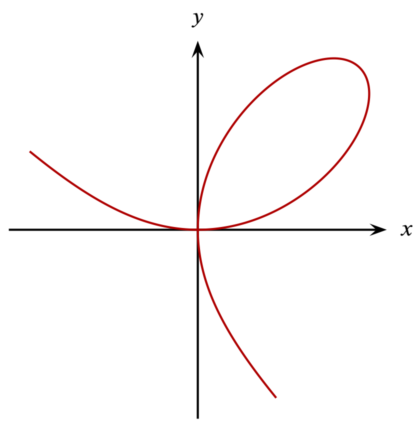


Una condición necesaria y suficiente para que una curva plana sea la gráfica de una función es que cualquier recta vertical corte a la curva en a lo más un punto.

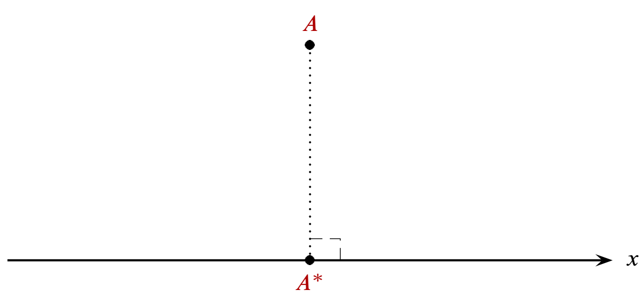
[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008



Esto es, la recta vertical $x = a$ debe cortar a la curva en un punto si $a \in D_f$. En caso contrario, si a $\notin D_f$, entonces la recta vertical $x = a$ no corta a la curva.
Así una curva de esta forma:

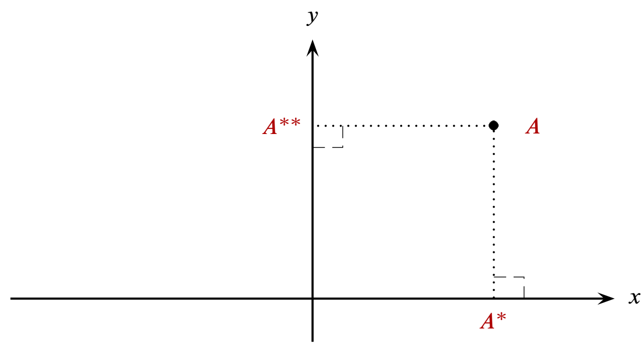


No puede ser la gráfica de función alguna, pues hay ciertas rectas verticales que la cortan en más de un punto.
Recordemos que la proyección ortogonal de un punto sobre un eje es el punto donde la perpendicular al eje que pasa por el punto corta al eje.

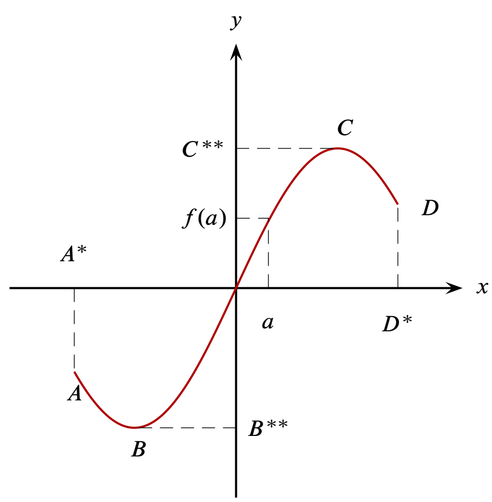


A^* es la proyección ortogonal de A sobre el eje x.

En la siguiente figura se muestra que A^* es la proyección ortogonal del punto A sobre el eje x y que A^{**} es la proyección ortogonal del mismo punto sobre el eje y.



Dada la gráfica de una función f, la proyección ortogonal de todos sus puntos sobre el eje x es el dominio D_f de la función y su proyección ortogonal sobre el eje y es su rango R_f.
Además dado un número $a \in D_f$, la ordenada del punto donde la recta $x = a$ corta a la gráfica de la función f es el número $f(a)$.



$$D_f = \overline{A^* D^*}, \qquad R_f = \overline{B^{**} C^{**}}$$

De manera que, dada la gráfica de una función, conocemos a ésta completamente, pues podemos determinar su dominio y su rango, y dado $a \in D_f$ podemos hallar $f(a)$.

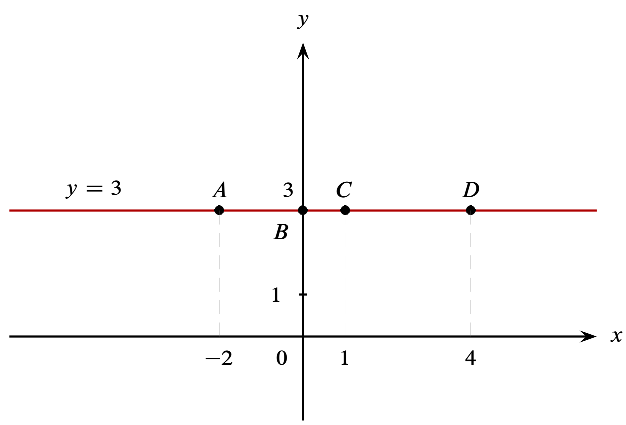
Ahora bien, dada una función $y = f(x)$, es frecuente intentar tener una noción de su gráfica generando un conjunto de puntos de ella, lo cual se logra dando valores arbitrarios a $x \in D_f$ y obteniendo las imágenes $y = f(x)$ correspondientes. Se genera así una tabla de valores donde cada $x \in D_f$ es la abscisa y la imagen $y = f(x)$ es la ordenada de un mismo punto $P(x, y)$. Esto es,

x	y	$P(x, y)$
a	$f(a)$	$A[a, f(a)]$
x_1	$f(x_1)$	$B[x_1, f(x_1)]$
x_2	$f(x_2)$	$C[x_2, f(x_2)]$
b	$f(b)$	$D[b, f(b)]$

Ejemplo 2.5.1 *Trazar la gráfica de la función $f(x) = 3$.*

▼ Aquí f es la función que a cada número real x le asocia siempre el mismo número que es $y = 3$. Ahora bien, sabemos que la ecuación $y = 3$ representa la línea recta horizontal que corta al eje y en el número 3.
Por lo tanto la gráfica de la función $f(x) = 3$ es la recta horizontal $y = 3$.
Algunos puntos de la gráfica de $f(x) = 3$ son:

x	$f(x)$	$P(x, y)$
-2	3	$A(-2, 3)$
0	3	$B(0, 3)$
1	3	$C(1, 3)$
4	3	$D(4, 3)$



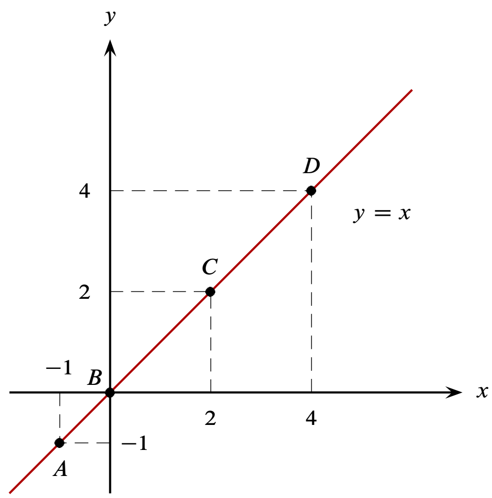
Nótese que el dominio de esta función es $D_f = \mathbb{R}$ y su rango es $R_f = \{3\}$.

□

Ejemplo 2.5.2 *Bosquejar la gráfica de la función $g(x) = x$.*

▼ Aquí g es la función que a cada $x \in \mathbb{R}$ le asocia su imagen $y = x$. Además sabemos que la ecuación $y = x$ representa a la línea recta que biseca a los cuadrantes primero y tercero del plano cartesiano.
Por lo tanto la gráfica de la función $g(x) = x$ es la recta $y = x$.
Algunos puntos de la gráfica de $g(x) = x$ son:

x	$f(x)$	$P(x, y)$
-1	-1	$A(-1, -1)$
0	0	$B(0, 0)$
2	2	$C(2, 2)$
4	4	$D(4, 4)$



Observamos que el dominio de esta función es $D_g = \mathbb{R}$ y su rango es $R_g = \mathbb{R}$.

□

Ejemplo 2.5.3 *Trazar la gráfica de la función* $h(x) = 1 - 2x$.

▼ Aquí h es la función que a cada $x \in \mathbb{R}$ le asocia la imagen $y = 1 - 2x$. Además sabemos que la ecuación $y = -2x + 1$ representa a la recta $(y = mx + b)$ que tiene pendiente $m = -2$ y ordenada en el origen $b = 1$.

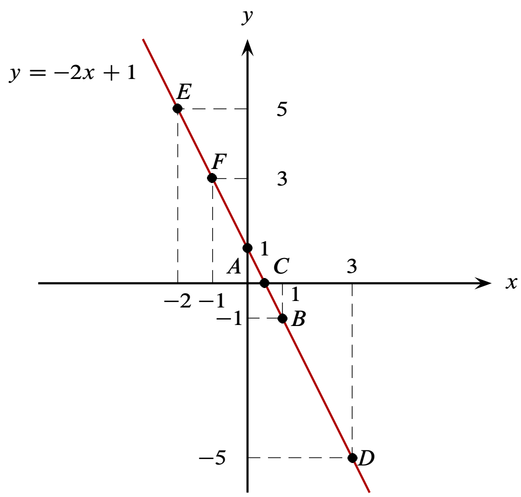
Dos puntos de esta recta son

$$x = 0 \Rightarrow y = -2(0) + 1 = 0 + 1 = 1 \Rightarrow A(0, 1);$$
$$x = 1 \Rightarrow y = -2(1) + 1 = -2 + 1 = -1 \Rightarrow B(1, -1).$$

Por lo tanto, la gráfica de la función $h(x) = 1 - 2x$ es la recta $y = -2x + 1$ que pasa por los puntos $A(0, 1)$ y $B(1, -1)$.

Algunos puntos de la gráfica de $h(x) = 1 - 2x$ son:

x	$f(x)$	$P(x, y)$
-2	5	$E(-2, 5)$
-1	3	$F(-1, 3)$
0	1	$A(0, 1)$
$1/2$	0	$C(1/2, 0)$
1	-1	$B(1, -1)$
3	-5	$D(3, -5)$



Obsérvese que el dominio de esta función es $D_h = \mathbb{R}$ y su rango es $R_h = \mathbb{R}$.

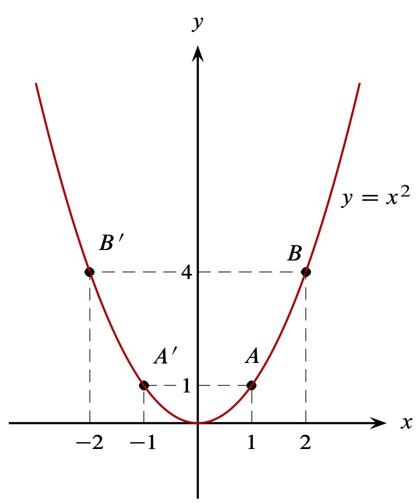
□

Ejemplo 2.5.4 *Bosquejar la gráfica de la función* $f(x) = x^2$.

▼ Aquí f es la función que a cada $x \in \mathbb{R}$ le asocia su imagen $y = x^2$.
Cuatro puntos de la gráfica son

$$x = \pm 1 \;\Rightarrow\; y = (\pm 1)^2 = 1 \;\Rightarrow\; A'(-1, 1) \text{ y } A(1, 1)\,;$$
$$x = \pm 2 \;\Rightarrow\; y = (\pm 2)^2 = 4 \;\Rightarrow\; B'(-2, 4) \text{ y } B(2, 4)\,.$$

Por lo tanto la gráfica de la función $f(x) = x^2$ es la parábola $y = x^2$ que tiene su vértice en $V(0, 0)$ y que pasa por los puntos $B'(-2, 4)$, $A'(-1, 1)$, $A(1, 1)$ y $B(2, 4)$.



El dominio de esta función es $D_f = \mathbb{R}$ y su rango es $R_f = [0, +\infty)$.

□

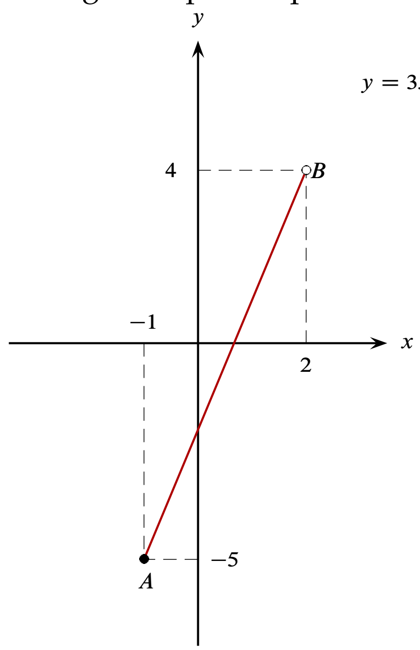
Ejemplo 2.5.5 *Bosquejar la gráfica de* $g(x) = 3x - 2$ *con* $-1 \le x < 2$.

▼ Sabemos que la ecuación $y = 3x - 2$ representa a la recta $(y = mx + b)$ que tiene pendiente $m = 3$ y ordenada en el origen $b = -2$.

Como el dominio de g es el intervalo $-1 \leq x < 2$, la gráfica de g es el segmento de tal recta $y = 3x-2$ que tiene por extremos a los puntos siguientes

$$x = -1 \ \Rightarrow \ y = 3(-1) - 2 = -3 - 2 = -5 \ \Rightarrow \ A(-1, -5)\,;$$
$$x = 2 \ \Rightarrow \ y = 3(2) - 2 = 6 - 2 = 4 \ \Rightarrow \ B(2, 4)\,.$$

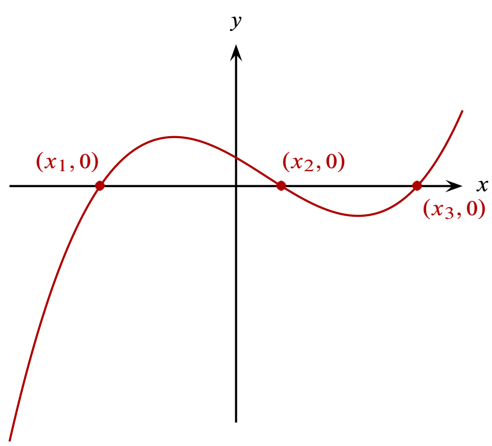
Notemos que el punto A sí pertenece a la gráfica pero el punto B no está en la gráfica de g.



También que el rango es el intervalo $R_g = [-5, 4)$.

□

Puntos muy importantes de la gráfica de una función son aquellos donde ella interseca el eje de las abscisas.
Recordemos que se denomina raíz de la función $y = f(x)$ a todo número $x = r$ tal que $f(r) = 0$.
Por ejemplo



En esta figura los números x_1, x_2 & x_3 son raíces de la función $y = f(x)$ ya que

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0.$$

Ejemplo 2.5.6 *(ver las gráficas anteriores)*

▼

1. La función $f(x) = 3$ no tiene raíces, ya que la recta $y = 3$ nunca interseca al eje x.
2. La función $g(x) = x$ tiene sólo una raíz que es $x = 0$, ya que $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
3. La función $h(x) = 1 - 2x$ tiene una sola raíz que es $x = \frac{1}{2}$, ya que:
$$h(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$
4. La función $f(x) = x^2$ tiene una única raíz en $x = 0$, ya que:
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$
5. La función $g(x) = 3x - 2$ con $-1 \leq x < 2$ tiene una raíz, ya que
$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

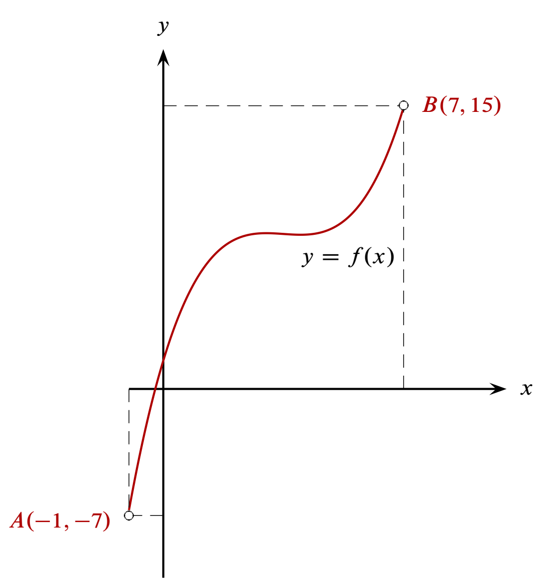
□

Ejercicios 2.5.1 *Soluciones en la página 10*

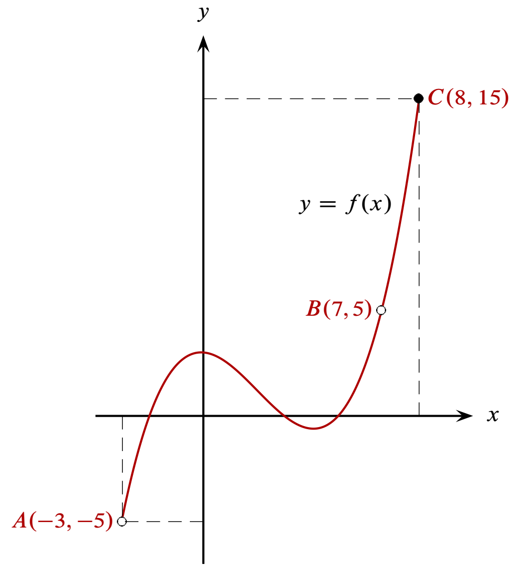
1. La ecuación $x^2 + y^2 = 1$ representa a una circunferencia de radio 1 y centro en el origen. ¿Puede considerarse a esta curva como la gráfica de una función? Justifique su respuesta.
2. La ecuación $y^2 = x$ representa a una parábola en el plano xy. ¿Puede ser considerada esta parábola como la gráfica de una función $y = f(x)$? Justifique su respuesta.

Las curvas siguientes son gráficas de funciones y los puntos A y B no pertenecen a dicha gráfica. Determinar dominio, rango y el número de raíces de cada función.

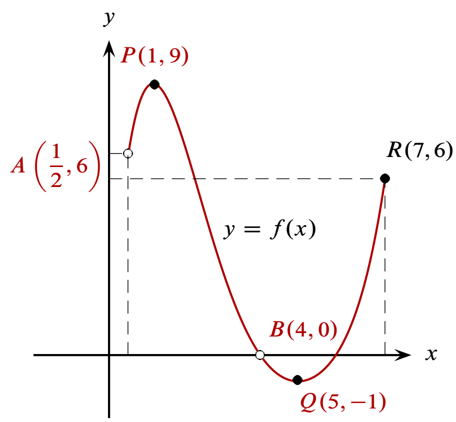
3.



4.



5.



Mediante una tabla de valores, obtener un bosquejo de la gráfica de las funciones siguientes. Determinar además (en cada caso) dominio, rango y raíces de la función.

6. $f(x) = 3x + 1$.

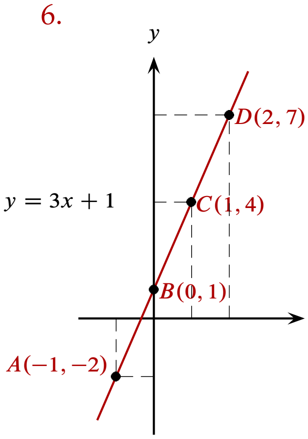
7. $g(x) = x^2 - 1$.

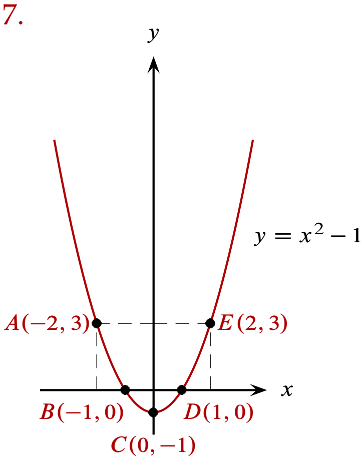
8. $h(x) = -2 \quad \text{con} \quad -\dfrac{3}{2} < x < \dfrac{8}{3}$.

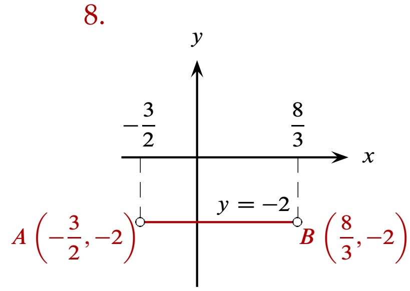
9. $f(x) = 3 - 2x \quad \text{con} \quad -1 \leq x < 4$.

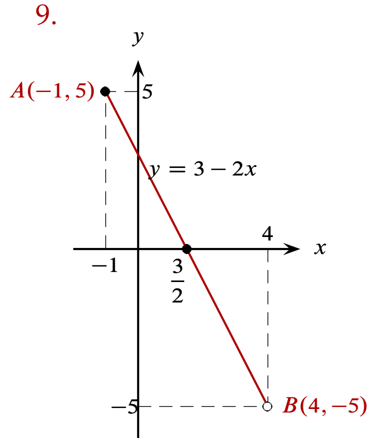
10. $g(x) = 4 - x^2 \quad \text{con} \quad -2 < x \leq \dfrac{5}{2}$.

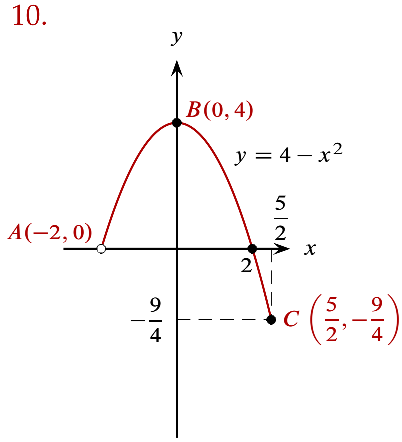
Ejercicios 2.5.1 *Gráfica de una función real de variable real, página 8*

1. No es la gráfica de una función.
2. No es la gráfica de una función.
3. $D_f = (-1, 7)$;
   $R_f = (-7, 15)$;
   $f(x)$ tiene 1 raíz.
4. $D_f = (-3, 8] - \{7\}$;
   $R_f = (-5, 15] - \{5\}$;
   tiene 3 raíces.
5. $D_f = \left(\frac{1}{2}, 4\right) \cup (4, 7]$;
   $R_f = [-1, 9]$;
   tiene 2 raíces.
6. 

   $D_f = \mathbb{R}$; $R_f = \mathbb{R}$; 1 raíz: $x = -\frac{1}{3}$.
7. 

   $D_g = \mathbb{R}$; $R_g = [-1, +\infty)$;
   2 raíces: $x = -1$ & $x = 1$.
8. 

   $D_h = \left(-\frac{3}{2}, \frac{8}{3}\right)$; $R_h = \{-2\}$; no tiene raíces.
9. 

   $D_f = [-1, 4)$; $R_f = (-5, 5]$;
   tiene 1 raíz: $x = \frac{3}{2}$.
10. 

    $D_g = \left(-2, \frac{5}{2}\right]$; $R_g = \left[-\frac{9}{4}, 4\right]$;
    tiene 1 raíz: $x = 2$.