CAPÍTULO

2

Funciones

[1]

2.2 Función real de una variable real

Cuando $C_f \subset \mathbb{R}$ se dice que f es una función real y cuando $D_f \subset \mathbb{R}$ se dice que f es una función de una variable real.

Para una función f real de una variable real, definida mediante una regla de correspondencia o una fórmula $y = f(x)$, sin más especificaciones, sobreentenderemos que D_f es el subconjunto de números reales para los cuales la fórmula $y = f(x)$ tiene sentido, esto es, cuando las imágenes $f(x)$ son reales. Es decir:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; f(x) \in \mathbb{R} \right\}.$$

Generalmente se denomina variable independiente a una letra (por ejemplo x) que representa a cualquiera de los elementos del dominio y se denomina variable dependiente a otra letra (por ejemplo y) que representa a cualquiera de los elementos del rango (esto es, a cualquiera de las imágenes).

Ejemplo 2.2.1

▼ Si f es la función que a cada número real x le asocia su cuadrado (x^2), entonces la imagen de x bajo la acción de f es x^2 y escribimos $f(x) = x^2$. Otra manera de expresar esta función es mediante la fórmula $y = x^2$, donde la letra y representa a la imagen $f(x)$.

□

Ejemplo 2.2.2

▼ Si g es la función que a cada número real $t \geq 0$ le asocia su raíz cuadrada no negativa ($\sqrt{t}$), entonces la imagen de t bajo la acción de g es $\sqrt{t}$ y escribimos $g(t) = \sqrt{t}$. Podemos expresar esta función mediante $u = \sqrt{t}$, por ejemplo, donde la letra u representa a la imagen $g(t)$.

□

[1] canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

Nota: cuando se trata de determinar el dominio de una función definida mediante una fórmula $y = f(x)$, es conveniente tener presente dos situaciones:

1. Para que un cociente sea real es necesario que numerador y denominador sean reales y el denominador no sea cero.

2. Una raíz de índice par es real cuando el radicando es un real que no es negativo.

Ejemplo 2.2.3 *Determinar el dominio de la función* $f(x) = \sqrt{x-1}$.

▼ Aquí es importante notar que $\sqrt{x-1}$ corresponderá a un número real siempre y cuando el radicando $(x-1)$ no sea negativo. Luego

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x-1} \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x-1 \geq 0 \right\};$$
$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \right\} = [1, +\infty).$$

□

Ejemplo 2.2.4 *Obtener el dominio de la función* $g(t) = \dfrac{t^2+1}{t-2}$.

▼ Observamos que el cociente $\dfrac{t^2+1}{t-2}$ corresponde a un número real cuando al denominador $(t-2)$ no se anula. Entonces

$$D_g = \left\{ t \in \mathbb{R} \mid g(t) \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{t^2+1}{t-2} \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \in \mathbb{R} \mid t-2 \neq 0 \right\};$$
$$D_g = \left\{ t \in \mathbb{R} \mid t \neq 2 \right\} = \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \bigcup (2, +\infty).$$

□

Ejemplo 2.2.5 *Determinar el dominio de la función* $h(u) = \dfrac{\sqrt[3]{u+5}}{u^2-1}$.

▼ Aquí $\dfrac{\sqrt[3]{u+5}}{u^2-1}$ tiene que ser un número real, por lo que $h(u)$ será real siempre que el denominador (u^2-1) no sea cero. En este caso no es necesario establecer condición para el radicando $u+5$ ya que la raíz tiene un índice impar.
Por lo tanto

$$\begin{aligned} D_h &= \left\{ u \in \mathbb{R} \mid h(u) \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ u \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{\sqrt[3]{u+5}}{u^2-1} \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ u \in \mathbb{R} \mid u^2-1 \neq 0 \right\} = \left\{ u \in \mathbb{R} \mid u^2 \neq 1 \right\} = \\ &= \mathbb{R} - \left\{ u \in \mathbb{R} \mid u^2 = 1 \right\} = \mathbb{R} - \left\{ u \in \mathbb{R} \mid |u| = 1 \right\} = \\ &= \mathbb{R} - \left\{ u \in \mathbb{R} \mid u = \pm 1 \right\} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.2.6 *Obtener el dominio de la función* $\phi(y) = \dfrac{\sqrt{y+5}}{y^2-1}$.

▼ Observamos dos restricciones para que $\phi(y)$ sea real: el radicando $(y+5)$ no debe ser negativo y el denominador (y^2-1) no debe ser cero. Luego

$$\begin{aligned}
D_\phi &= \left\{\, y \in \mathbb{R} \;\middle|\; \phi(y) \in \mathbb{R} \,\right\} = \left\{\, y \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{\sqrt{y+5}}{y^2-1} \in \mathbb{R} \,\right\} = \\
&= \left\{\, y \in \mathbb{R} \;\middle|\; y+5 \geq 0 \;\&\; y^2-1 \neq 0 \,\right\} = \left\{\, y \in \mathbb{R} \;\middle|\; y \geq -5 \;\&\; y^2 \neq 1 \,\right\} = \\
&= \left\{\, y \in \mathbb{R} \;\middle|\; y \geq -5 \;\&\; |\, y \,| \neq 1 \,\right\} = \left\{\, y \in \mathbb{R} \;\middle|\; y \geq -5 \;\&\; y \neq \pm 1 \,\right\} = \\
&= [-5, +\infty) - \{\, -1, 1 \,\} = [-5, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)\,.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.2.7 *Obtener el dominio de la función* $g(t) = \dfrac{\sqrt[3]{t}}{\sqrt{4-t^2}}$.

▼ Con $\sqrt[3]{t}$ no hay restricción alguna, pero con el radicando $(4-t^2)$ si la hay. Debemos pedir que $4-t^2$ sea positivo. Es decir,

$$\begin{aligned}
D_g &= \left\{\, t \in \mathbb{R} \;\middle|\; g(t) \in \mathbb{R} \,\right\} = \left\{\, t \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{\sqrt[3]{t}}{\sqrt{4-t^2}} \in \mathbb{R} \,\right\} = \\
&= \left\{\, t \in \mathbb{R} \;\middle|\; 4-t^2 > 0 \,\right\} = \left\{\, t \in \mathbb{R} \;\middle|\; t^2 < 4 \,\right\} = \\
&= \left\{\, t \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sqrt{t^2} < \sqrt{4} \,\right\} = \left\{\, t \in \mathbb{R} \;\middle|\; |\, t \,| < 2 \,\right\} = \left\{\, t \in \mathbb{R} \;\middle|\; -2 < t < 2 \,\right\}; \\
D_g &= (-2, 2)\,.
\end{aligned}$$

□

Ejercicios 2.2.1 *Soluciones en la página 4*

Determinar el dominio de cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \sqrt{5+x}$.
2. $g(x) = \dfrac{x}{4x^2-9}$.
3. $h(t) = \sqrt{8-3t}$.
4. $j(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-2x-8}$.
5. $\alpha(y) = \dfrac{2y+5}{y^2+1}$.
6. $\beta(x) = \dfrac{\sqrt{10-3x}}{x^2+x-6}$.
7. $\gamma(u) = \sqrt[3]{u^2-u+6}$.
8. $\phi(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{9-2x}}$.
9. $F(x) = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x^3-x}$.
10. $G(x) = \sqrt{x+4} + \sqrt{5-x}$.

Ejercicios 2.2.1 *Función real de una variable real, página 3*

1. $[-5, +\infty)$.
2. $\mathbb{R} - \left\{ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\}$.
3. $\left(-\infty, \frac{8}{3}\right]$.
4. $\mathbb{R} - \{ -2, 4 \}$.
5. $\mathbb{R}$.
6. $\left(-\infty, \frac{10}{3}\right] - \{ -3, 2 \}$.
7. $\mathbb{R}$.
8. $\left(-\infty, \frac{9}{2}\right)$.
9. $[-3, 3] - \{ -1, 0, 1 \}$.
10. $[-4, 5]$.