CAPÍTULO

5

La derivada

[1]

5.2 La derivada de una función

A continuación trataremos uno de los conceptos fundamentales del cálculo, que es el de la derivada. Este concepto es un límite que está estrechamente ligado a la recta tangente, a la velocidad instantánea y en general a la razón de cambio de una variable con respecto a otra.

- Cuando existe el límite $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, lo denominamos la derivada de la función f en el punto x_0 y decimos que la función f es derivable en el punto x_0.

  Al límite $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ lo denotamos por $f'(x_0)$. Es decir:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$

  Alternativamente si hacemos $x - x_0 = h$ [una translación de coordenadas en que el nuevo origen es el punto $(x_0, 0)$] o sea $x = x_0 + h$, podemos escribir:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\,.$$

  A veces se usa Δx (incremento de x) en lugar de h; también se usa Δy en lugar de $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ en cuyo caso:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\,.$$

[1] canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

- Si no existe $f'(x_0)$, afirmamos que la función f no es derivable en x_0 o bien que la función f no tiene derivada en x_0

  Otras notaciones para $f'(x_0)$ son:

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}, \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}, \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}, y'(x_0).$$

- A la razón $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0}{h}$ se le denomina cociente diferencial.

Ejemplo 5.2.1 *Demostrar que la función $f(x) = 3x^2 - 4x - 5$ es derivable en $x_0 = 2$.*

▼ Demostraremos la existencia de $f'(x_0) = f'(2)$:

$$\begin{aligned}
&f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \Rightarrow\\
\Rightarrow\ &f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[3(2+h)^2-4(2+h)-5]-[3(2)^2-4(2)-5]}{h} =\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3(4+4h+h^2)-8-4h-5-12+8+5}{h} =\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{12+12h+3h^2-12-4h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{8h+3h^2}{h} =\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(8+3h)}{h} = \lim_{h\to 0}(8+3h) = 8+3(0) = 8;\\
&f'(2) = 8.
\end{aligned}$$

Luego $f'(2)$ existe, por lo cual f es una función derivable en $x_0 = 2$. Además la derivada de f en $x_0 = 2$ es $f'(2) = 8$.

□

Ejemplo 5.2.2 *Si $f(x) = 4 - x^2$, usando la definición de derivada, calcular $f'(a)$. Calcular también, usando lo anterior, $f'(-2)$ y comprobar que $f'(1) = -2$.*

▼ Calculamos el cociente diferencial:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \frac{(4-x^2)-(4-a^2)}{x-a} = \frac{4-x^2-4+a^2}{x-a} = \frac{-x^2+a^2}{x-a} =\\
&= \frac{-(x^2-a^2)}{x-a} = -\frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = -(x+a) \text{ si } x-a \neq 0, \text{ esto es, si } x \neq a.
\end{aligned}$$

Así:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}[-(x+a)] = -2a.$$

Hemos demostrado por lo tanto que, en todo punto $[a, f(a)] = (a, 4-a^2)$, la función es derivable y su derivada es $f'(a) = -2a$.

Concluimos con esto que $f'(x) = -2x$ para $x \in \mathbb{R}$.

Usando este resultado, tenemos que

$$f'(-2) = 4;$$
$$f'(1) = -2.$$

□

Ejemplo 5.2.3 *Sea* $f(x) = \sqrt{2x+1}$. *Encontrar* $f'(a)$ *con* $a \in D_f = \left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

▼ Calculamos el cociente diferencial del cual obtendremos el límite:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2a+1}}{x-a} = \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2a+1}}{x-a} \times \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2a+1}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2a+1}} =$$
$$= \frac{(2x+1)-(2a+1)}{(x-a)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2a+1})} = \frac{2(x-a)}{(x-a)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2a+1})} =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2a+1}} \text{ si } x-a \neq 0, \text{ esto es, si } x \neq a.$$

Así:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2a+1}} =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2a+1}+\sqrt{2a+1}} = \frac{2}{2\sqrt{2a+1}} = \frac{1}{\sqrt{2a+1}}.$$

Esta última expresión sólo tiene sentido si $2a+1>0$, es decir, si $a > -\dfrac{1}{2}$. Vemos que $-\dfrac{1}{2} \in D_f$, pero ahí la función f no es derivable; de hecho ni siquiera está definida a la izquierda de $-\dfrac{1}{2}$. □

Ejemplo 5.2.4 *Demostrar que la función* $g(x) = |x|$ *no es derivable en el origen.*

▼ Demostraremos la no existencia de $g'(x_0)$ en $x_0 = 0$.

$$g'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = ?$$

Calculamos los límites laterales $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$ & $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$. Recuerde que ya lo hicimos en el capítulo Límites, ejemplo **??**.

1. $x \to 0^- \Rightarrow x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0} (-1) = -1.$$

2. $x \to 0^+ \Rightarrow x > 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Entonces,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|\,x\,|}{x} = -1 \neq 1 = \lim_{x\to 0^+} \frac{|\,x\,|}{x} \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0} \frac{|\,x\,|}{x} \text{ no existe } \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; g'(0) \text{ no existe } \;\Rightarrow\; \text{la derivada de } g \text{ en } x_0 = 0 \text{ no existe.}$$

Por lo tanto la función g no es derivable en $x_0 = 0$. En $x = 0$ la gráfica de la función tiene un pico. En cualquier otro punto sí es derivable:

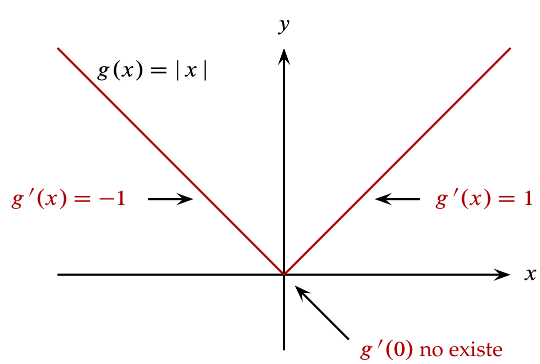
1. $g'(a) = 1$ si $a > 0$.

   Pues
   $$\frac{g(x) - g(a)}{x-a} = \frac{|\,x\,| - |\,a\,|}{x-a} = \frac{x-a}{x-a} = 1 \text{ si } x \text{ está cerca de } a \text{ pero } x \neq a\,.$$
   Por lo que
   $$g'(a) = \lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} 1 = 1\,.$$

2. $g'(a) = -1$ si $a < 0$.

   Pues
   $$\begin{aligned}\frac{g(x) - g(a)}{x-a} &= \frac{|\,x\,| - |\,a\,|}{x-a} = \frac{-x-(-a)}{x-a} = \\ &= \frac{-x+a}{x-a} = \frac{-(x-a)}{x-a} = -1 \text{ si } x \text{ está cerca de } a \text{ pero } x \neq a.\end{aligned}$$
   Por lo que
   $$g'(a) = \lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} -1 = -1\,.$$

Conocemos la gráfica de $g(x) = |\,x\,|$:



□

Ejemplo 5.2.5 *Si* $g(x) = \dfrac{1}{2+x^2}$, *calcular* $g'(a)$ *para* $a \in \mathbb{R}$. *Calcular también, usando lo anterior,* $g'(-3)$ *y* $g'(2)$.

▼ Calculamos el cociente diferencial:

$$\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=\frac{\dfrac{1}{2+(a+h)^2}-\dfrac{1}{2+a^2}}{h}=$$

$$=\frac{\dfrac{(2+a^2)-[2+(a+h)^2]}{[2+(a+h)^2](2+a^2)}}{h}=$$

$$=\frac{(2+a^2)-(2+a^2+2ah+h^2)}{h[2+(a+h)^2](2+a^2)}=$$

$$=\frac{2+a^2-2-a^2-2ah-h^2}{h[2+(a+h)^2](2+a^2)}=\frac{-2ah-h^2}{h[2+(a+h)^2](2+a^2)}$$

$$=\frac{h(-2a-h)}{h[2+(a+h)^2](2+a^2)}=$$

$$=\frac{-2a-h}{[2+(a+h)^2](2+a^2)}\ \text{si } h\neq 0$$

Así:

$$g'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2a-h}{[2+(a+h)^2](2+a^2)}=\frac{-2a}{(2+a^2)^2}\,.$$

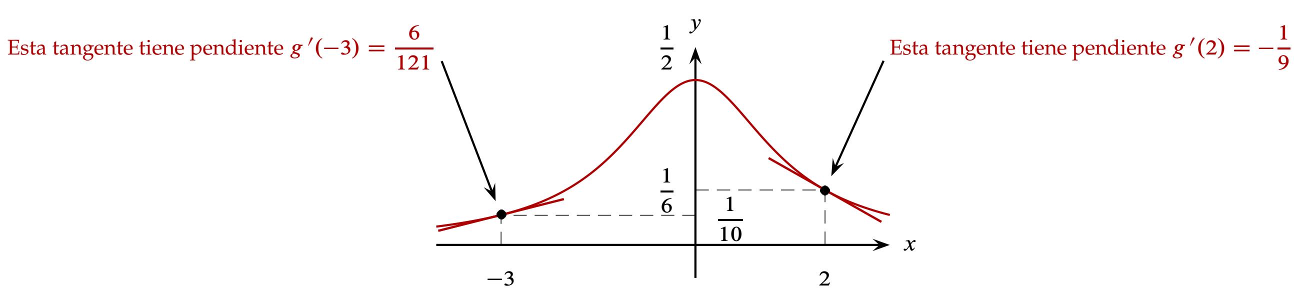
Hemos demostrado, por lo tanto, que en todo punto $[a, g(a)]=\left(a, \dfrac{1}{2+a^2}\right)$ de la gráfica de la función g, la pendiente de la recta tangente vale $g'(a)=\dfrac{-2a}{(2+a^2)^2}$.

Concluimos con esto que $g'(x)=\dfrac{-2x}{(2+x^2)^2}$ para $x\in\mathbb{R}$.

Usando este resultado:

$$g'(-3)=\frac{-2(-3)}{[2+(-3)^2]^2}=\frac{6}{121}\,;$$

$$g'(2)=\frac{-4}{36}=-\frac{1}{9}\,.$$



□

5.2.1 La regla de los cuatro pasos

Considerando la definición de la derivada de $y = f(x)$ en x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

se puede decir que, para obtener la derivada de f en x_0, tenemos que calcular

1. $f(x)$ o bien $f(x_0 + h)$ además de $f(x_0)$.
2. El incremento de la función:
$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)\,.$$
3. El cociente de incrementos o cociente diferencial:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\,.$$
4. El límite del cociente diferencial:
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\,.$$

A este proceso para calcular la derivada de una función algunos autores lo denominan la "regla de los cuatro pasos".

Ejemplo 5.2.6 *Utilizando la regla de los cuatro pasos, calcular la derivada de la función*

$$f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 6x + 7 \text{ en } x = a\,.$$

▼ Utilizamos la igualdad $f'(a) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

1. $f(a) = 4a^3 - 5a^2 - 6a + 7$.
2. $$\begin{aligned}\Delta y &= f(x) - f(a) = \\ &= (4x^3 - 5x^2 - 6x + 7) - (4a^3 - 5a^2 - 6a + 7) = \\ &= 4(x^3 - a^3) - 5(x^2 - a^2) - 6(x - a)\,.\end{aligned}$$
3. $$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \\ &= \frac{4(x^3 - a^3) - 5(x^2 - a^2) - 6(x - a)}{x - a} = \\ &= \frac{4(x - a)(x^2 + xa + a^2) - 5(x - a)(x + a) - 6(x - a)}{(x - a)} = \\ &= 4(x^2 + ax + a^2) - 5(x + a) - 6 \text{ para } x \neq a\,.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \\
&= \lim_{x \to a} [4(x^2 + ax + a^2) - 5(x + a) - 6] = \\
&= 4(a^2 + a^2 + a^2) - 5(a + a) - 6 = \\
&= 4(3a^2) - 5(2a) - 6 = 12a^2 - 10a - 6\,.
\end{aligned}$$

Entonces, $f'(a) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 12a^2 - 10a - 6$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$.

□

Ejemplo 5.2.7 *Mediante la regla de los cuatro pasos, calcular* $f'(x)$ *para* $f(x) = \sqrt{x-1}$.

▼ Para calcular $f'(x)$ en un $x \in D_f$ arbitrario utilizaremos la igualdad

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,.$$

1. $f(x+h) = \sqrt{x+h-1}$.

2. $\Delta y = f(x+h) - f(x) = \sqrt{x+h-1} - \sqrt{x-1}$.

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{\sqrt{x+h-1} - \sqrt{x-1}}{h}$.

4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} =$

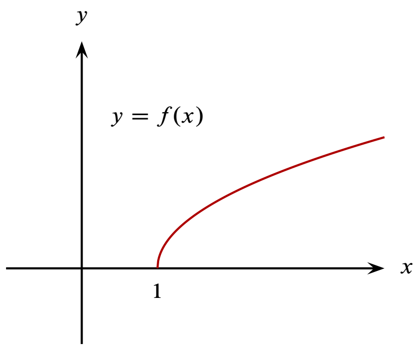
$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h-1} - \sqrt{x-1}}{h} = \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+h-1} - \sqrt{x-1}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1}} \right) = \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x+h-1})^2 - (\sqrt{x-1})^2}{h(\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1})} = \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h-1) - (x-1)}{h(\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1})} = \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x+h-1-x+1}{h(\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1})} = \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1})} = \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1}} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\,.
\end{aligned}$$

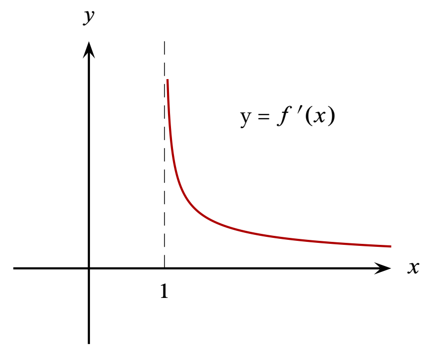
Entonces,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\,.$$

Por lo tanto,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \text{ o bien } \frac{d}{dx}\sqrt{x-1} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\,.$$





Esta derivada existe para cada $x > 1$. Aunque $1 \in D_f = [1, +\infty)$, observe que f no está definida a la izquierda de 1 y por lo tanto no tiene sentido calcular la derivada de f en 0, pues no tiene sentido calcular el límite:

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}\,.$$

□

Ejercicios 5.2.1 *Soluciones en la página 10*

1. Sea $h(x) = \dfrac{3}{\sqrt{3x+2}}$. Usando la definición de la derivada, calcular $h'(a)$.
   Calcular también, usando lo anterior, $h'(0)$ así como $h'(8)$.

2. Utilizando la regla de los cuatro pasos, calcular la derivada de la función $f(x) = \dfrac{4}{3x}$ en:
   a. $x = a$.
   b. $x = 2$.
   c. $x = -\dfrac{2}{3}$.
   Obtener además:
   d. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto P de abscisa 2;
   e. La ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto Q de abscisa $-\dfrac{2}{3}$.

3. Para la función $g(x) = \sqrt{2x-1}$, y mediante la regla de los cuatro pasos, determinar:
   a. $g'(a)$.
   b. $g'\left(\dfrac{5}{2}\right)$.

c. $g'(3)$.

Obtener además:

d. La ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{2x-1}$ en el punto P de abscisa $\dfrac{5}{2}$;

e. La ecuación de la recta normal a la curva $y = \sqrt{2x-1}$ en el punto Q de abscisa 3.

Ejercicios 5.2.1 *La derivada de una función, página 8*

1. $h'(a) = -\dfrac{9}{2}\dfrac{1}{(3a+2)^{\frac{3}{2}}}$;

   $h'(0) = -\dfrac{9}{4\sqrt{2}}$;

   $h'(8) = -\dfrac{9}{52\sqrt{26}}$.

2. a. $f'(a) = \dfrac{-4}{3a^2}$;

   b. $f'(2) = -\dfrac{1}{3}$;

   c. $f'(-\frac{2}{3}) = -3$;

   d. recta tangente: $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{3}$;

   e. recta normal: $y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{16}{9}$.

3. a. $g'(a) = \dfrac{1}{\sqrt{2a-1}}$;

   b. $g'(\frac{5}{2}) = \dfrac{1}{2}$;

   c. $g'(3) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$;

   d. recta tangente: $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{4}$;

   e. recta normal: $y = -\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}$.