CAPÍTULO

5

La derivada

[1]

5.4 La derivada y la continuidad

Si consideramos la función $f(x) = |\,x-a\,|$, donde a es un número real fijo y arbitrario, podemos notar que:

1. La función f no es derivable en $x_0 = a$. Recordemos lo que vimos en la sección de límites laterales.

$$f\,'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{|\,x-a\,|-|\,a-a\,|}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{|\,x-a\,|}{x-a}\,.$$

Obtenemos los límites laterales:

$$x \to a^- \;\Rightarrow\; x<a \;\Rightarrow\; x-a<0 \;\Rightarrow\; |\,x-a\,| = -(x-a) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \lim_{x\to a^-}\frac{|\,x-a\,|}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{-(x-a)}{(x-a)} = \lim_{x\to a}(-1) = -1.$$
$$x \to a^+ \;\Rightarrow\; x>a \;\Rightarrow\; x-a>0 \;\Rightarrow\; |\,x-a\,| = x-a \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \lim_{x\to a^+}\frac{|\,x-a\,|}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{x-a}{x-a} = \lim_{x\to a} 1 = 1.$$

Entonces

$$\lim_{x\to a^-}\frac{|\,x-a\,|}{x-a} \neq \lim_{x\to a^+}\frac{|\,x-a\,|}{x-a} \;\Rightarrow\; \lim_{x\to a}\frac{|\,x-a\,|}{x-a} \text{ no existe } \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; f\,'(a) \text{ no existe } \;\Rightarrow\; f \text{ no es derivable en } x_0 = a\,.$$

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

2. La función f es continua en $x_0 = a$. Veamos.

   $f(x) = |\,x - a\,| \;\Rightarrow\; f(a) = |\,a - a\,| = |\,0\,| = 0.$

   Además $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} |\,x - a\,| = 0$, ya que $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^-} -(x-a) = 0 \\ \lim\limits_{x\to a^+} (x-a) = 0 \end{cases}$, por lo cual $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) \;\Rightarrow\; f$ es continua en $x_0 = a$.

3. Por lo tanto, f es una función continua pero que no es derivable en $x_0 = a$.

De lo anterior se puede afirmar que:

La continuidad de una función en un punto no implica la derivabilidad de la misma en dicho punto. Esto es, no toda función continua en un punto es derivable en dicho punto.
En cambio, la derivabilidad de una función sí implica la continuidad de la misma. Esta afirmación es muy importante y la resaltamos de la siguiente manera.

- Si f es una función derivable en $x_0 = a$, entonces f es continua en $x_0 = a$.

  ▼ Demostramos esta afirmación.

  Suponer que f es derivable en $x_0 = a$ implica suponer la existencia de $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

  Demostrar que f es continua en $x_0 = a$ implica demostrar que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

  Así:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a} [f(x) - f(a) + f(a)] = \lim_{x\to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) + f(a)\right] = \\
&= \lim_{x\to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)\right] + \lim_{x\to a} f(a) = \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times \lim_{x\to a}(x - a) + \lim_{x\to a} f(a) = \\
&= f'(a) \times 0 + f(a) = 0 + f(a) = f(a)\,,
\end{aligned}$$

  que es lo que se quería demostrar. □

  Con el resultado anterior se ve que:

- Si una función no es continua en un punto entonces no es derivable en dicho punto.