CAPÍTULO

4

Continuidad

[1]

4.2 Tipos de discontinuidades

De una función que no es continua en un punto se dice que es discontinua en dicho punto.

Vamos a clasificar las discontinuidades de una función.

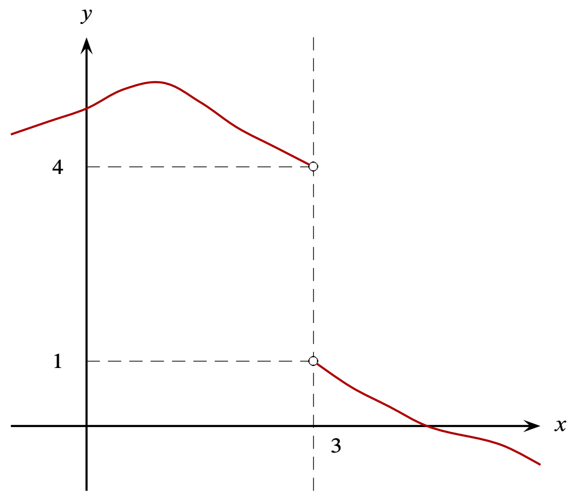
- Discontinuidad esencial: una función f tiene una discontinuidad esencial en x_0 si no existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

  Una discontinuidad esencial puede ser de salto o infinita.

  1. Discontinuidad esencial de salto: cuando existen $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, pero son diferentes.

     Ejemplo 4.2.1 *En la siguiente gráfica, existe una discontinuidad esencial de salto en $x = 3$.*

[1] canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008



▼ En efecto:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 4 \neq 1 = \lim_{x \to 3^+} f(x) .$$

□

2. Discontinuidad esencial infinita: cuando se cumple al menos uno de los límites siguientes:

a. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$;

b. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$;

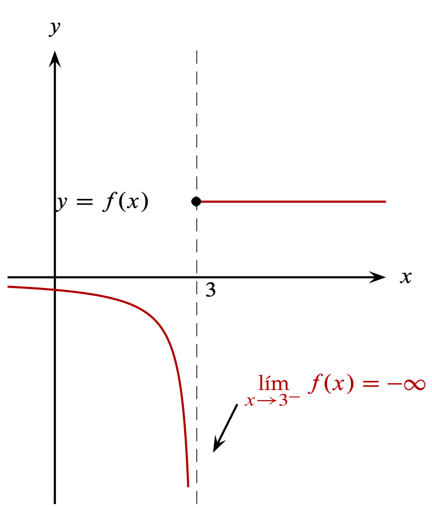
c. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$;

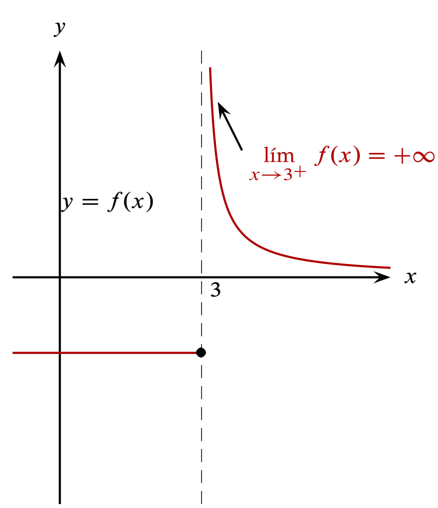
d. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$.

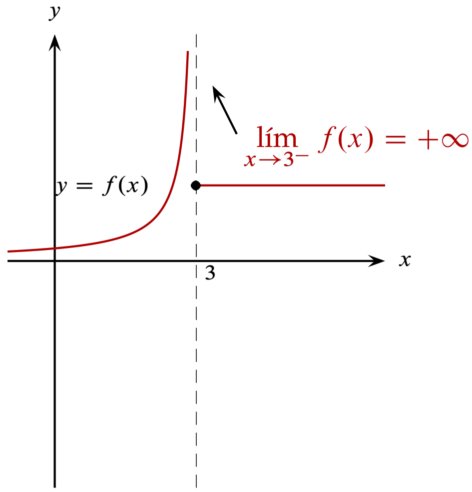
Ejemplo 4.2.2

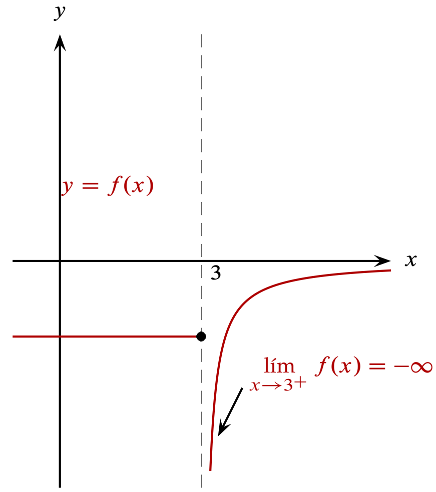
Cuatro ejemplos de discontinuidad esencial infinita:

▼







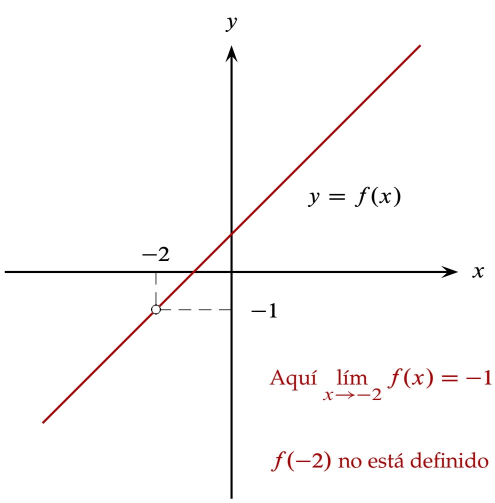


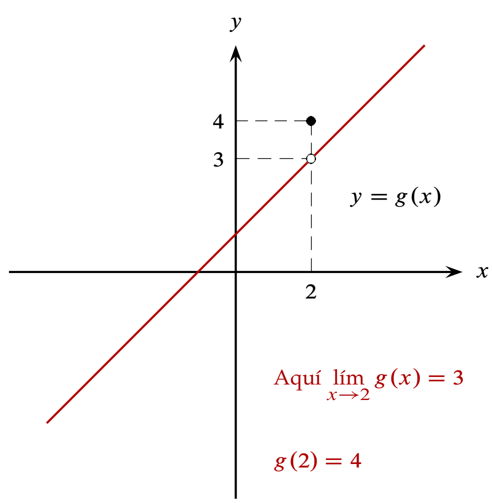
$\square$

- <u>Discontinuidades removibles o evitables:</u> una función f tiene una discontinuidad removible o evitable en x_0 si existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$, pero o bien no es igual a $f(x_0)$, o bien f no está definida en x_0.

  En ambos casos si redefiniésemos $f(x_0)$ o definiésemos $f(x_0)$ como el valor de $\lim_{x \to x_0} f(x)$, la función f resultaría continua en x_0.

Ejemplo 4.2.3 *¿Cómo habría que definir f en $x = -2$ y redefinir g en $x = 2$ para que ambas funciones resultasen continuas en -2 y 2 respectivamente?*





▼ Claramente si definimos $f(-2) = -1$ y redefinimos $g(2) = 3$, las funciones f & g resultarían continuas en $x = -2$ y en $x = 2$ respectivamente.

$\square$

Ejemplo 4.2.4 *La función $f(x) = \dfrac{2x + 6}{x^2 - 9}$ no está definida en $x = -3$ ni en $x = 3$, por lo cual es discontinua en dichos puntos.*

1. *¿Qué tipo de discontinuidad tiene f en $x_0 = -3$?*

2. *¿Qué tipo de discontinuidad tiene f en $x_0 = 3$?*

▼

1. Para decidir qué tipo de discontinuidad tiene f en $x_0 = -3$, debemos investigar la existencia de $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$

$$\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} \frac{2x+6}{x^2-9} = \lim_{x \to -3} \frac{2(x+3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \to -3} \frac{2}{x-3} =$$
$$= \frac{2}{-3-3} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to -3} f(x) \text{ sí existe.}$$

Entonces la discontinuidad que tiene f en $x_0 = -3$ es removible o evitable.

En esta discontinuidad observamos que $f(-3)$ no existe y que $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = -\frac{1}{3}$. Podemos entonces remover o evitar esta discontinuidad definiendo l función f en $x_0 = -3$ como $f(-3) = -\frac{1}{3}$.

2. Para decidir qué tipo de discontinuidad tiene f en $x_0 = 3$, debemos investigar la existencia de $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{2x+6}{x^2-9} = \lim_{x \to 3} \frac{2}{x-3} \,.$$

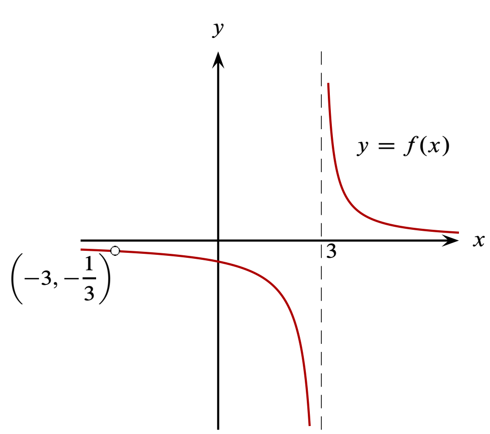
Por el lado izquierdo tenemos:

$$x \to 3^- \Rightarrow x-3 \to 0 \;\&\; x < 3 \Rightarrow x-3 \to 0 \;\&\; x-3 < 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x-3 \to 0^- \Rightarrow \frac{2}{x-3} \to -\infty \Rightarrow \lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty \,.$$

Entonces la discontinuidad que tiene f en $x_0 = 3$ es esencial infinita.

Por el lado derecho, tenemos también:

$$x \to 3^+ \Rightarrow x-3 \to 0 \;\&\; x > 3 \Rightarrow x-3 \to 0 \;\&\; x-3 > 0 \Rightarrow x-3 \to 0^+ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{2}{x-3} \to +\infty \Rightarrow \lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty \,.$$



□

Ejemplo 4.2.5 *Dada la función* $g(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{si } x < -2; \\ \dfrac{x}{|\,x\,|} & \text{si } |\,x\,| < 2 \text{ y si } x \neq 0; \\ 3 - x & \text{si } x \geq 2\,. \end{cases}$

Analizar la continuidad o discontinuidad en $x_0 = -2$, $x_0 = 0$ *y en* $x_0 = 2$. *Si existe discontinuidad en alguno de esos puntos, indicar su tipo.*

▼ Debemos indagar la existencia de $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

1. En $x_0 = -2$, $g(x)$ no está definida, por lo cual g es discontinua en $x_0 = -2$. Además,

$$\lim_{x \to -2^-} g(x) = \lim_{x \to -2}(x^2 - 5) = (-2)^2 - 5 = 4 - 5 = -1;$$
$$\lim_{x \to -2^+} g(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x}{|\,x\,|} = \frac{-2}{|-2|} = \frac{-2}{2} = -1 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to -2^-} g(x) = -1 = \lim_{x \to -2^+} g(x) \;\Rightarrow\; \lim_{x \to -2} g(x) = -1 \;\Rightarrow\; \lim_{x \to -2} g(x) \text{ sí existe.}$$

Luego g tiene en $x_0 = -2$ una discontinuidad removible o evitable.

2. En $x_1 = 0$ tampoco está definida $g(x)$ por lo que g es discontinua en $x_1 = 0$. Además

$$x \to 0^- \;\Rightarrow\; x < 0 \;\Rightarrow\; |\,x\,| = -x \;\Rightarrow\; \frac{x}{|\,x\,|} = \frac{x}{-x} = -1;$$
$$x \to 0^+ \;\Rightarrow\; x > 0 \;\Rightarrow\; |\,x\,| = x \;\Rightarrow\; \frac{x}{|\,x\,|} = \frac{x}{x} = 1;$$
$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|\,x\,|} = \lim_{x \to 0} -1 = -1;$$
$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|\,x\,|} = \lim_{x \to 0} 1 = 1;$$
$$\lim_{x \to 0^-} g(x) \neq \lim_{x \to 0^+} g(x) \;\Rightarrow\; \lim_{x \to 0} g(x) \text{ no existe.}$$

Entonces, g tiene en $x_1 = 0$ una discontinuidad esencial de salto.

3. En $x = 2$

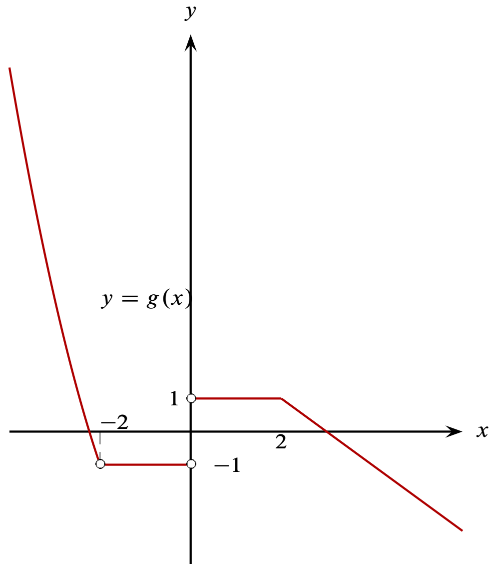
$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x}{|\,x\,|} = \frac{2}{|\,2\,|} = \frac{2}{2} = 1;$$
$$\lim_{x \to 2^+} g(x) = \lim_{x \to 2}(3 - x) = 3 - 2 = 1;$$
$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = 1 = \lim_{x \to 2^+} g(x) \;\Rightarrow\; \lim_{x \to 2} g(x) = 1\,.$$

Pero, notando que $g(x) = 3 - x$ para $x \geq 2$, podemos afirmar que $g(2) = 3 - 2 = 1$.

Entonces
$$\lim_{x \to 2} g(x) = 1 = g(2) \;\Rightarrow\; g \text{ es continua en } x_0 = 2\,.$$

Por lo tanto no hay discontinuidad en $x_0 = 2$.

Ésta es la gráfica de g:



□

Ejercicios 4.2.1 *Soluciones en la página 10*

1. Bosqueje la gráfica de una función f que cumpla las siguientes condiciones:

   a. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$;

   b. $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = +\infty$;

   c. $f(1) = 0$;

   d. $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = +\infty$;

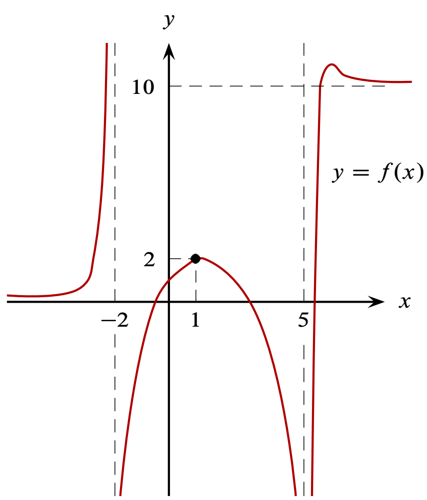
   e. $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = +\infty$;

   f. $f(x)$ tiene discontinuidad removible en $x = 1$;

   g. $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$;

   h. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$.

2. Considere la gráfica de la función f dada en la figura

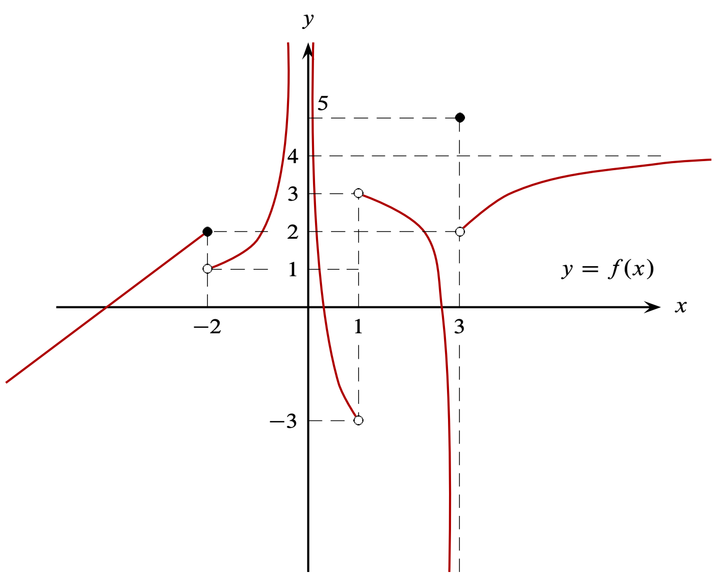


De la gráfica determine los siguientes límites:

a. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$;
b. $\displaystyle\lim_{x\to 5^-} f(x)$;
c. $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)$;
d. $\displaystyle\lim_{x\to -2^-} f(x)$;
e. $\displaystyle\lim_{x\to 5^+} f(x)$;
f. $\displaystyle\lim_{x\to -2^+} f(x)$;
g. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Clasifique las discontinuidades.

3. La función f tiene la gráfica siguiente:



a. De la gráfica obtener

i. $\displaystyle\lim_{x\to -2^-} f(x)$;
ii. $\displaystyle\lim_{x\to -2^+} f(x)$;
iii. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x)$;
iv. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$;
v. $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x)$;
vi. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x)$;
vii. $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} f(x)$;
viii. $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} f(x)$;
ix. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$;
x. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b. Del inciso anterior clasifique las discontinuidades de la función y escriba las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.

4. Dada la función

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 1; \\ 4 & \text{si } x = 1; \\ x^2 - 2 & \text{si } 1 < x \le 2; \\ 3 & \text{si } 2 < x\,. \end{cases}$$

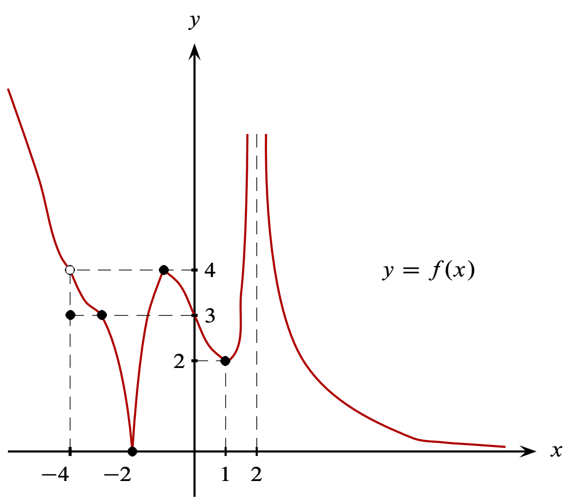
Analizar los tipos de discontinuidades en $x = 1$ y en $x = 2$.

5. Trace la gráfica de una función f que tenga una discontinuidad removible en $x = -2$ y que además satisfaga las condiciones siguientes:

a. $f(0) = 3$;
b. $f(4) = 0$;
c. $f(6) = 0$;
d. $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2$;
e. $\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$;
f. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$;
g. $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$.

6. A partir de la gráfica de f, determine:

   a. Los puntos de discontinuidad y su clasificación.
   b. Las ecuaciones de las asíntotas verticales y las ecuaciones de las asíntotas horizontales.



7. Bosqueje una posible gráfica de una función f que cumpla con las siguientes condiciones:

   a. $f(x) = 1$ si $4 < x < 6$;
   b. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$;
   c. $f(-2) = 0$;
   d. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$;
   e. $\lim_{x\to 6} f(x) = 1$.

   Señale los puntos de discontinuidad esencial.

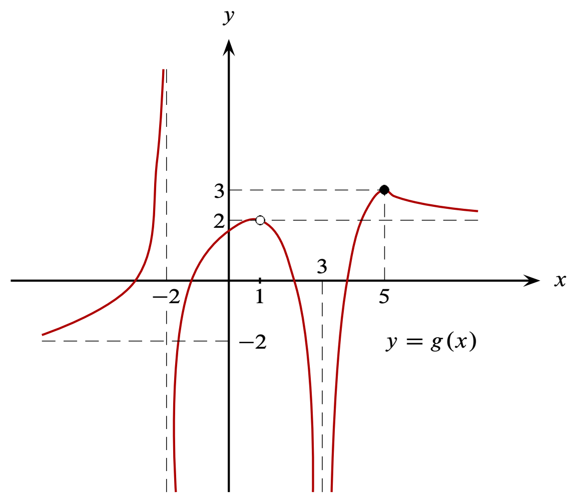
8. Si $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$, ¿qué tipo de discontinuidad hay en $x = 0$?; ¿esencial?; ¿removible? Justifique su respuesta.

9. Sea $(-\infty, 4) - \{-4\}$ el dominio de una función f. Trace una posible gráfica esa función que cumpla con las condiciones siguientes:

   a. Los puntos $(-3, 2)$, $(-5, 0)$, $(1, 0)$ & $(3, 0)$ están en su gráfica.
   b. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$.
   c. $\lim_{x\to -4^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -4^+} f(x) = +\infty$.
   d. $\lim_{x\to -3^-} f(x) = 3$, $\lim_{x\to -3^+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 4^-} f(x) = -2$.

   A partir de la gráfica, determine y clasifique los puntos de discontinuidad de la función f.

10. A partir de la gráfica de la función g que observamos a continuación



determine:

a. $\lim\limits_{x \to -2^-} g(x)$;

b. $\lim\limits_{x \to -2^+} g(x)$;

c. $\lim\limits_{x \to -2} g(x)$;

d. $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$;

e. $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$;

f. $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

Puntos de discontinuidad y su clasificación.

Ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.

11. Sea la función

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 2x - 8}.$$

Encontrar y clasificar las discontinuidades. Determinar las asíntotas verticales y horizontales.

12. Dada $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x}{x^2 + 4x - 5}$, obtener:

a. Puntos de discontinuidad y su clasificación

b. Asíntotas verticales y horizontales.

c. Esbozo de la gráfica.

13. Dibujar la gráfica posible de función f que cumpla las condiciones siguientes:

a. $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = +\infty$;

b. $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -\infty$;

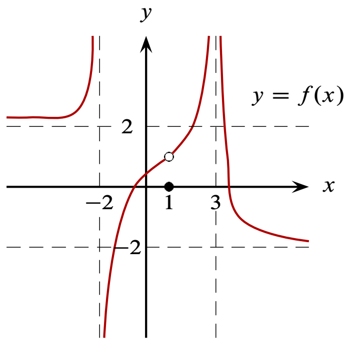
c. $f(x)$ tiene una discontinuidad removible en $x = 0$;

d. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$;

e. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$.

Ejercicios 4.2.1 *Tipos de discontinuidades, página 6*

1.

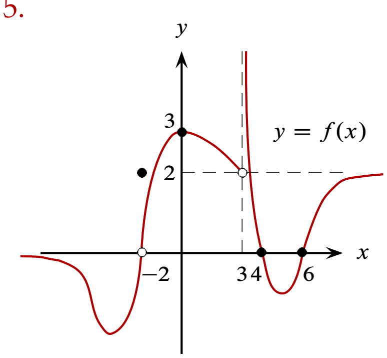


2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$;
   $\lim\limits_{x\to5^-} f(x) = -\infty$;
   $\lim\limits_{x\to1} f(x) = f(1) = 2$;
   $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = +\infty$;
   $\lim\limits_{x\to5^+} f(x) = -\infty$;
   dos discontinuidades esenciales (infinitas) en:
   $x = -2$ y en $x = 5$;
   $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$;
   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. a. $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = 1$;
   $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \infty$;
   $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -3$; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 3$;
   $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = 2$;
   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 4$;
   b. En $x = -2$ y en $x = 1$ hay discontinuidad de salto, esencial;
   en $x = 0$ hay una discontinuidad infinita;
   en $x = 3$ hay una discontinuidad esencial, infinita;
   $y = 4$ es asíntota horizontal;
   $x = 0$ es asíntota vertical;
   $x = 3$ es asíntota vertical.

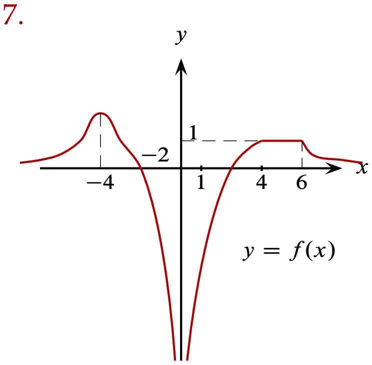
4. En $x = 1$ la función $g(x)$ tiene una discontinuidad removible;
   en $x = 2$ la función $g(x)$ tiene una discontinuidad esencial, de salto.

5.



6. a. $f(x)$ tiene discontinuidad removible en $x = -4$;
   $f(x)$ es discontinua en $x = 2$ (discontinuidad infinita);
   b. $x = 2$ es la única asíntota vertical;
   $y = 0$ la única asíntota horizontal.

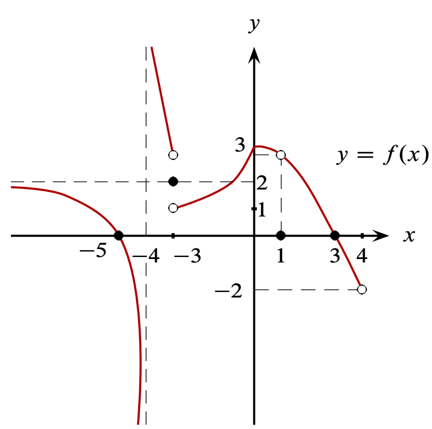
7.



En $x = 0$ hay una discontinuidad infinita (esencial).

8. Si definimos $f(0) = 2$, f resultaría continua en 0, por lo que la discontinuidad es removible.

9.



f tiene discontinuidades en:

$x = -4$, que es infinita;

$x = -3$, que es esencial;

$x = 1$, que es removible .

10. $\lim\limits_{x\to -2^-} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -2^+} g(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{x\to -2} g(x)$ no existe ;

$\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = -2$;

$\lim\limits_{x\to \infty} g(x) = 2$;

discontinuidades esenciales en $x = -2$ & $x = 3$;

discontinuidad removible en $x = 1$;

asíntotas verticales: las rectas $x = -2$ & $x = 3$;

asíntotas horizontales: las rectas $y = -2$ & $y = 2$,.

11. f es discontinua en $x = -4$ y en $x = 2$;

f tiene en $x = -4$ una discontinuidad removible;

f tiene en $x = 2$ una discontinuidad esencial;

$x = 2$ es una asíntota vertical de f y es la única;

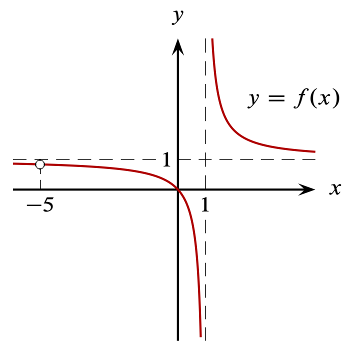
$y = 1$ es una asíntota horizontal y es la única.

12. a. $D_f = \mathbb{R} - \{-5, 1\}$, donde f es continua; la discontinuidad en $x = -5$ es removible; la discontinuidad en $x = 1$ es esencial infinita;

b. $x = 1$ es asíntota vertical;

$y = 1$ es asíntota horizontal.

c.



13.