CAPÍTULO

4

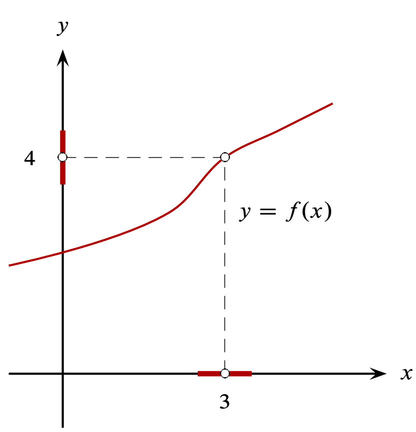
Continuidad

[1] OBJETIVOS PARTICULARES

1. Comprender el concepto de continuidad de una función en un punto.
2. Determinar y clasificar las discontinuidades de una función.
3. Bosquejar la gráfica de funciones continuas y discontinuas.
4. Determinar los valores apropiados de ciertos parámetros que aseguran la continuidad en un punto para una función definida por partes.
5. Comprender el concepto de continuidad de una función en intervalos.
6. Aplicar el teorema del Valor Intermedio para la existencia de raíces de una función continua.

4.1 Continuidad en un punto

Consideremos la gráfica de cierta función $y = f(x)$:



[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

Obsérvese lo siguiente:

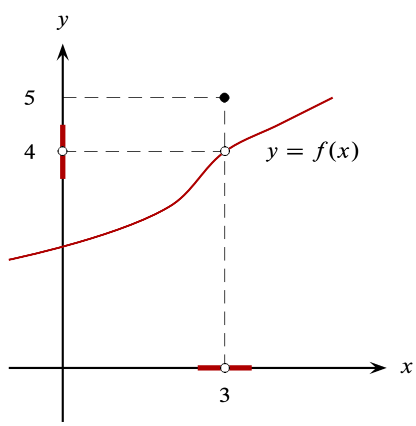
1. $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 4$, por lo cual $\lim_{x\to 3} f(x) = 4$. El límite existe.

2. $f(x)$ no está definida para $x = 3$. Esto es, $f(3)$ no existe.

3. La gráfica de f tiene una interrupción en el punto de abscisa $x = 3$.

   Decimos que la función no es continua en $x = 3$.

Consideremos ahora la siguiente gráfica:



Obsérvese lo siguiente:

1. $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 4$, por lo cual $\lim_{x\to 3} f(x) = 4$. El límite existe.

2. $f(x) = 5$ para $x = 3$. Esto es, $f(3) = 5$; $x = 3$ está en el dominio de $f(x)$.

3. La gráfica de f tiene una interrupción en el punto de abscisa $x = 3$. Decimos que la función no es continua en $x = 3$.

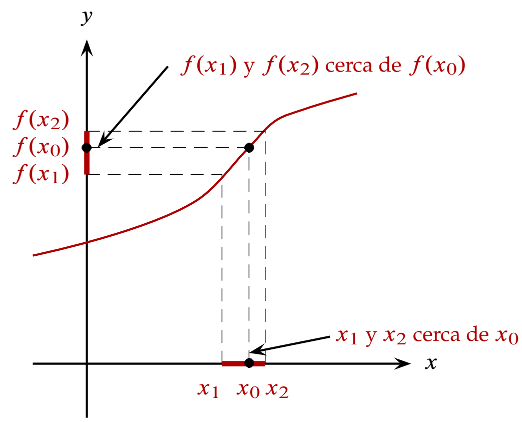
¿Cuando una función f es continua en un punto?

- Una función f es continua en $x_0 \in \mathbb{R}$ si

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

  Es decir, para que una función f sea continua en un punto x_0 necesariamente x_0 debe pertenecer al dominio de f, y debe existir el $\lim_{x\to x_0} f(x)$ y precisamente tiene que ser $f(x_0)$.

Observemos que si una función f es continua en x_0 y tomamos $x_1, x_2 \in D_f$ cerca de x_0, entonces $f(x_1)$ y $f(x_2)$ están cerca de $f(x_0)$ y por lo tanto próximos entre sí, lo que se verbaliza diciendo: un cambio pequeño en x produce un cambio pequeño en $f(x)$.

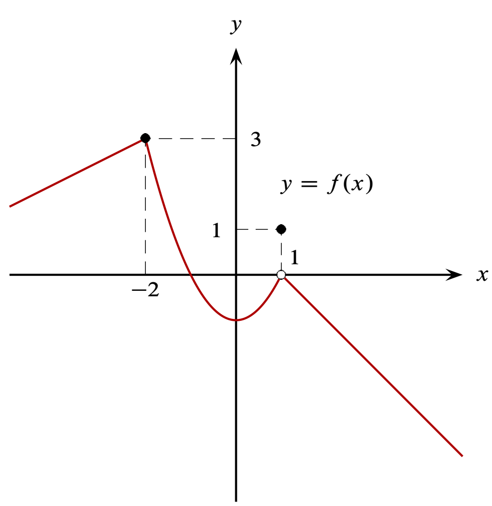


La continuidad es pues una ausencia de cambios bruscos. Como se dice tradicionalmente: una función es continua en un punto si en dicho punto la gráfica de la función no presenta interrupciones o saltos, esto es, cerca del punto se puede dibujar la gráfica de la función sin levantar el lápiz del papel.

Ejemplo 4.1.1 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + 4 & si\ x < -2; \\ 3 & si\ x = -2; \\ x^2 - 1 & si\ -2 < x < 1; \\ 1 & si\ x = 1; \\ 1 - x & si\ x > 1\,. \end{cases}$

1. a. *¿Pertenece* $x_0 = -2$ *al dominio de* f*?*
   b. *¿Existe* $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$*?*
   c. *¿Es* $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2)$*? ¿Es* f *continua en* $x_0 = -2$*?*
2. a. *¿Pertenece* $x_0 = 1$ *al dominio de* f*?*
   b. *¿Existe* $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$*?*
   c. *¿Es* $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$*? ¿Es* f *continua en* $x_0 = 1$*?*

▼ Graficamos primero la función



1. a. $f(-2) = 3$, por lo cual $x_0 = -2$ sí pertenece al dominio de f.

   b. Como la regla de correspondencia es distinta si $x < -2$ o bien si $x > -2$, calculamos los límites laterales en $x_0 = -2$.

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2} \left(\frac{x}{2} + 4 \right) = \frac{-2}{2} + 4 = -1 + 4 = 3 \\ \displaystyle\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2} (x^2 - 1) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -2^-} f(x) = 3 = \lim_{x \to -2^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to -2} f(x) = 3, \text{ el límite existe.}$$

   c. Como $\lim_{x \to -2} f(x) = 3$ y como $f(-2) = 3$, entonces sí se cumple que

$$\lim_{x \to -2} f(x) = f(-2).$$

   Por lo tanto f es continua en $x_0 = -2$.

2. a. $f(1) = 1$, por lo cual $x_0 = 1$ sí está en el dominio de f.

   b. Análogamente al inciso 1.(b) anterior, calculamos los límites laterales en $x_0 = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} (x^2 - 1) = 1^2 - 1 = 0 \\ \displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} (1 - x) = 1 - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) = 0 = \lim_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 0, \text{ el límite existe.}$$

   c. Como $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$ y como $f(1) = 1$, entonces $\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$. Por lo tanto la igualdad

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

   no se cumple y por ende f no es continua en $x_0 = 1$.

□

Ejemplo 4.1.2 *Dada la función* $g(x) = \begin{cases} 2x + 1 & si\ -1 < x < 2; \\ 9 - x^2 & si\ 2 < x < 6\,. \end{cases}$

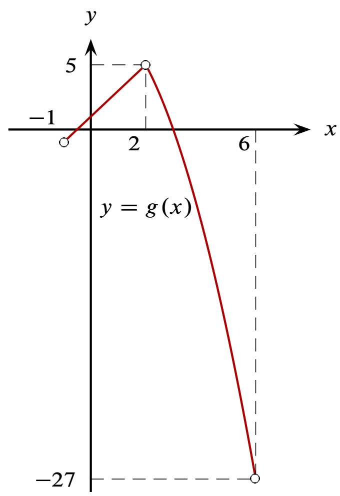
1. *¿Pertenece 2 al dominio de g?*

2. *¿Existe $\lim_{x \to 2} g(x)$?*

3. *¿Es g continua en $x_0 = 2$?*

4. *En caso de no ser continua g en $x_0 = 2$ ¿existe alguna manera de definir a la función g de manera que sea continua en $x_0 = 2$?*

▼ Graficamos primero la función



1. $g(x)$ sólo está definida para $x \in (-1, 2)$ y para $x \in (2, 6)$, por lo cual $g(x)$ no está definida para $x = 2$.

2. Calculamos los límites laterales en $x_0 = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2}(2x+1) = 2(2)+1 = 5 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 2}(9-x^2) = 9-(2)^2 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} g(x) = 5 = \lim_{x\to 2^+} g(x) \Rightarrow \lim_{x\to 2} g(x) \text{ sí existe y } \lim_{x\to 2} g(x) = 5.$$

3. Como $g(2)$ no existe, entonces la igualdad $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = g(2)$ no se puede cumplir. Por lo tanto g no es continua en $x_0 = 2$.

4. Debido a la existencia de $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$, podemos definir a $g(2)$ de manera que se cumpla la igualdad
$\lim\limits_{x\to 2} g(x) = g(2)$. ¿Cómo? Ya que $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 5$, si definimos $g(2) = 5$, aseguramos el cumplimiento de la igualdad $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = g(2)$.

   Esto es, una nueva función $g(x)$ continua en $x = 2$ quedaría definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } -1 < x < 2; \\ 5 & \text{si } x = 2; \\ 9-x^2 & \text{si } 2 < x < 6\,. \end{cases}$$

□

Ejemplo 4.1.3 *Dada la función* $h(x) = \begin{cases} \dfrac{6-2x}{x^2-9} & si\ x \neq \pm 3; \\ c & si\ x = 3\,. \end{cases}$

1. *¿Pertenece* 3 *al dominio de* h*?*

2. *¿Existe* $\lim\limits_{x\to 3} h(x)$*?*

3. *¿Cuánto debe valer* c *para que* h *sea continua en* $x_0 = 3$*?*

▼

1. Ya que $h(x) = c$ para $x = 3$, entonces $h(3) = c$ por lo que $3 \in D_f$.

   Observe que la ordenada c es arbitraria. Así el punto $(3, c)$ se puede situar en cualquier posición de la recta $x = 3$.

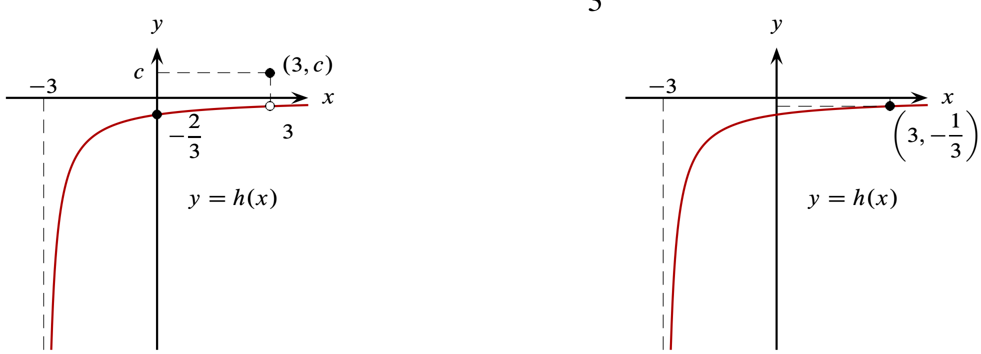
2. Calculamos $\lim h(x)$ cuando $x \to 3$.

$$\lim_{x\to 3} h(x) = \lim_{x\to 3} \frac{6-2x}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{-2x+6}{x^2-3^2} =$$
$$= \lim_{x\to 3} \frac{-2(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{-2}{x+3} = \frac{-2}{3+3} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}\,.$$

   Es decir, $\lim\limits_{x\to 3} h(x) = -\dfrac{1}{3}$ sí existe.

3. La función h es continua en $x_0 = 3$ si y sólo si $\lim\limits_{x\to 3} h(x) = h(3) \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3} = c$.

   Por lo tanto, la función h es continua en $x_0 = 3$ si $c = -\dfrac{1}{3}$. Gráficamente:

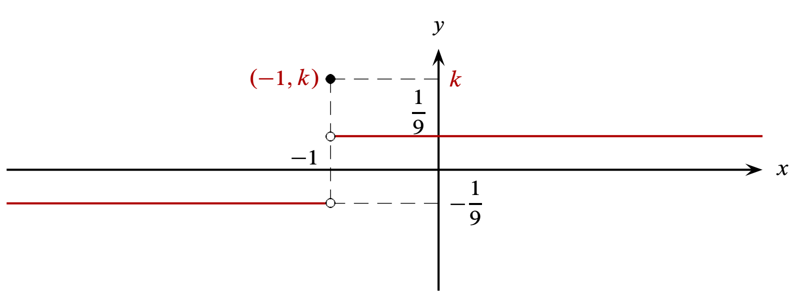


□

Ejemplo 4.1.4 *Dada la función* $\phi(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+1|}{9(x+1)} & \textit{si } x \neq -1; \\ k & \textit{si } x = -1\,. \end{cases}$

1. *¿Pertenece* -1 *al dominio de* ϕ*?*
2. *¿Existe* $\lim\limits_{x\to -1} \phi(x)$*?*
3. *¿Existe algún valor de* k *para el cual* ϕ *sea continua en* $x_0 = -1$*?*

▼ La gráfica de ϕ es:



1. Ya que $\phi(x) = k$ para $x = -1$, entonces $\phi(-1) = k$ & $-1 \in D_\phi$.

2. Por definición de valor absoluto se tiene que

$$|\,x+1\,| = \begin{cases} x+1 & \text{si } x+1 \geq 0; \\ -(x+1) & \text{si } x+1 < 0\,. \end{cases} = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq -1; \\ -(x+1) & \text{si } x < -1\,. \end{cases}$$

Entonces,

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to -1^-} \phi(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{|\,x+1\,|}{9(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{-(x+1)}{9(x+1)} = \lim_{x\to -1} \left(-\frac{1}{9}\right) = -\frac{1}{9} \\ \displaystyle\lim_{x\to -1^+} \phi(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{|\,x+1\,|}{9(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)}{9(x+1)} = \lim_{x\to -1} \left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{9} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -1^-} \phi(x) \neq \lim_{x\to -1^+} \phi(x) \Rightarrow \lim_{x\to -1} \phi(x) \text{ no existe.}$$

3. La función ϕ es continua en $x_0 = -1$ si y sólo si

$$\lim_{x\to -1} \phi(x) = \phi(-1) \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to -1} \phi(x) = k\,.$$

Debido a la no existencia de $\lim\limits_{x\to -1} \phi(x)$, podemos afirmar que no existe valor alguno de k que asegure el cumplimiento de la igualdad.

Esto es, no existe k para el cual ϕ sea continua en $x_0 = -1$.

□

Ejemplo 4.1.5 *Sea f la función definida por*

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx & \textit{si } x < 1; \\ 3 & \textit{si } x = 1; \\ 4ax - b & \textit{si } x > 1\,. \end{cases}$$

Determinar los valores de las constantes a, b para que la función f sea continua en $x = 1$.

▼ Para que f sea continua en $x = 1$, debe cumplirse que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$; y como $f(1) = 3$, entonces se debe cumplir que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}(ax^3 + bx) = a(1)^3 + b(1) = a + b;$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}(4ax - b) = 4a(1) - b = 4a - b\,.$$

Para que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$, se debe cumplir que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 3 = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, lo cual sucede si

$$\begin{cases} a + b & = 3; \\ 4a - b & = 3\,. \end{cases}$$

Lo anterior es un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas. Operando tenemos:

$$5a = 6 \;\Rightarrow\; a = \frac{6}{5};$$
$$a + b = 3 \;\Rightarrow\; b = 3 - a = 3 - \frac{6}{5} = \frac{15-6}{5} = \frac{9}{5}\,.$$

Entonces, debe suceder que

$$a = \frac{6}{5} \text{ y que } b = \frac{9}{5} \text{ para que la función } f \text{ sea continua en } x = 1.$$

□

Ejemplo 4.1.6 *Se define la función*

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1; \\ a & \text{si } x = 1; \\ bx^2 + 1 & \text{si } 1 < x < 3; \\ 2x & \text{si } 3 \le x\,. \end{cases}$$

1. *Determinar los valores de las constantes a, b que hacen de f una función continua en $x = 1$.*
2. *Reescriba la función f con los valores calculados de a, b. Estudie la continuidad o discontinuidad de f en $x = 3$.*

▼

1. Primero aseguramos la existencia de $\lim_{x\to 1} f(x)$ exigiendo la igualdad de los límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}(2x) = 2(1) = 2\,;$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}(bx^2 + 1) = b(1) + 1 = b + 1\,;$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \;\Leftrightarrow\; 2 = b + 1 \;\Leftrightarrow\; b = 1\,.$$

   Entonces con $b = 1$ aseguramos que $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

   Luego exigimos que $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ para asegurar la continuidad de f en $x = 1$.

   Ya que $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ & $f(1) = a$, entonces $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) \;\Leftrightarrow\; 2 = a$, es decir, $a = 2$.

   Luego con $a = 2$ & $b = 1$ aseguramos la continuidad de f en $x = 1$.

2. La función f con los valores a & b calculados, continua en $x = 1$ es

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1; \\ 2 & \text{si } x = 1; \\ x^2 + 1 & \text{si } 1 < x < 3; \\ 2x & \text{si } 3 \le x\,. \end{cases}$$

¿Es continua f en $x = 3$? Veamos:

$$\begin{aligned} f(3) &= 2(3) = 6\,; \\ \lim_{x\to 3^-} f(x) &= \lim_{x\to 3}(x^2+1) = 3^2+1 = 10\,; \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) &= \lim_{x\to 3}(2x) = 2(3) = 6\,. \end{aligned}$$

Nótese que $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$, por lo cual $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ no existe.

Por lo tanto la función f no es continua en $x = 3$.

□

Ejemplo 4.1.7 *Determinar los valores de a, b para los cuales la siguiente función es continua en $x = -1$ y en $x = 1$. Bosquejar la gráfica.*

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x+1 & si\ x < -1; \\ ax+b & si\ -1 \le x \le 1; \\ 2x-4 & si\ x > 1\,. \end{cases}$$

▼ Para que la función sea continua en -1 se debe cumplir que $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1)$.
En particular el límite debe existir y por lo tanto los límites laterales deben ser iguales.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1^-} f(x) &= \lim_{x\to -1^-}(x^2+x+1) = (-1)^2+(-1)+1 = 1\,; \\ \lim_{x\to -1^+} f(x) &= \lim_{x\to -1^+}(ax+b) = -a+b\,. \end{aligned}$$

Igualando obtenemos

(*) $$-a+b = 1\,.$$

También para que la función sea continua en 1 se debe cumplir que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$.
En particular el límite debe existir y por lo tanto los límites laterales deben ser iguales.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-}(ax+b) = a+b\,; \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+}(2x-4) = -2\,. \end{aligned}$$

Igualando obtenemos

(**) $$a+b = -2\,.$$

Resolviendo el sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas, formado por $(*)$ y por $(**)$ obtenemos

$$a = -\frac{3}{2}\ \&\ b = -\frac{1}{2}\,.$$

Al sustituir estos valores, obtenemos la función de la que se nos pide bosquejar su gráfica

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{si } x < -1; \\ -\dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1; \\ 2x - 4 & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

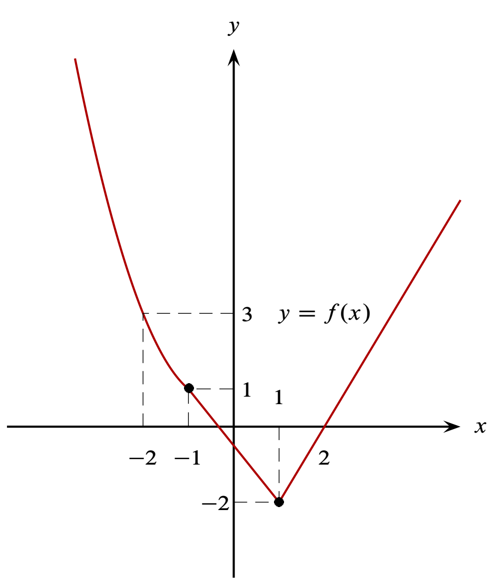
Esta función consta de tres partes:

1. La parábola $y = x^2 + x + 1$.
   Tenemos
   $$x^2 + x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\,.$$
   Es decir, es la parábola $y = x^2$ desplazada a la izquierda $\dfrac{1}{2}$ y levantada $\dfrac{3}{4}$.
   Pasa por los puntos $(-1, 1)$ y $(-2, 3)$.

2. La recta $y = -\dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$.
   Ésta es una recta de pendiente $-\dfrac{3}{2}$ y ordenada en el origen $-\dfrac{1}{2}$.
   Pasa por los puntos $(-1, 1)$ y $(1, -2)$. Esta recta corta a la parábola en $(-1, 1)$.

3. La recta $y = 2x - 4$.
   Ésta es una recta de pendiente 2 y ordenada en el origen -4.
   Pasa por los puntos $(1, -2)$ y $(2, 0)$. Esta recta corta a la anterior en el punto $(1, -2)$.

Con esta información, un bosquejo de la gráfica de la función $f(x)$ es



Como vemos la función es continua en $x = -1$ y en $x = 1$. □

Ejemplo 4.1.8 *Sea*

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{si } x \le -3; \\ \dfrac{9 - x^2}{4 - \sqrt{x^2 + 7}} & \text{si } -3 < x < 3; \\ d & \text{si } x \ge 3. \end{cases}$$

Encuentre los valores de c, d que hacen continua la función f en $x = -3$ y en $x = 3$.

▼ Para que la función sea continua en $x = -3$ se tiene que cumplir que $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = f(-3)$, esto es, que

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^+} f(x) = f(-3) = c.$$

Se sabe que

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} c = c.$$

Calculemos

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} \frac{9 - x^2}{4 - \sqrt{x^2 + 7}}.$$

Racionalizando el denominador:

$$\frac{9 - x^2}{4 - \sqrt{x^2 + 7}} = \frac{(9 - x^2)(4 + \sqrt{x^2 + 7})}{(4 - \sqrt{x^2 + 7})(4 + \sqrt{x^2 + 7})} = \frac{(9 - x^2)(4 + \sqrt{x^2 + 7})}{16 - (x^2 + 7)} =$$
$$= \frac{(9 - x^2)(4 + \sqrt{x^2 + 7})}{9 - x^2} = 4 + \sqrt{x^2 + 7}.$$

Lo anterior si $9 - x^2 \ne 0$, es decir, si $9 \ne x^2$ o bien $|\,x\,| \ne 3$, esto es, $x \ne \pm 3$.
Entonces,

$$\lim_{x \to -3^{\pm}} \frac{9 - x^2}{4 - \sqrt{x^2 + 7}} = \lim_{x \to -3^{\pm}} (4 + \sqrt{x^2 + 7}) = 4 + \sqrt{9 + 7} = 4 + \sqrt{16} = 4 + 4 = 8.$$

Luego, la función $f(x)$ será continua en $x = -3$ si $c = 8$.
Análogamente para que $f(x)$ sea continua en $x = 3$ se requiere que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$, esto es, que

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = d.$$

Se sabe que

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} d = d$$

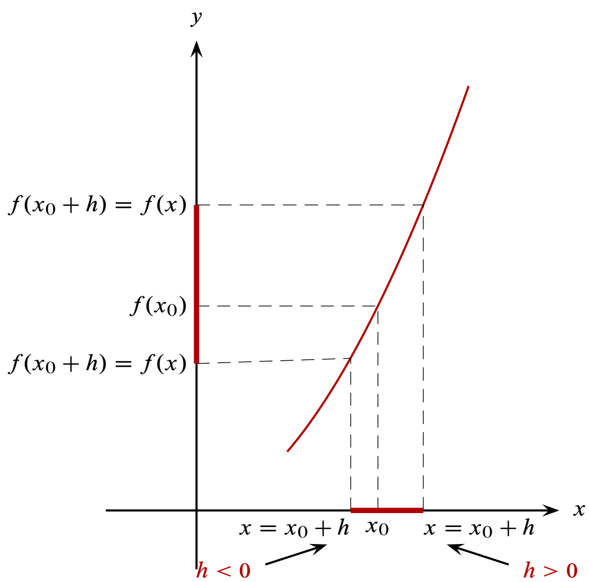
así como también que

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (4 + \sqrt{x^2 + 7}) = 8.$$

Luego, $f(x)$ será continua en $x = 3$ si $d = 8$. □

Otra notación para la continuidad

- Es usual hacer $x = x_0 + h$ o bien $h = x - x_0$.



Nótese que x está cerca de $x_0 \Leftrightarrow h$ está cerca de 0.

Entonces la continuidad de la función f en el punto x_0 ocurre si:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ o bien si}$$
$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)\,.$$

Ejemplo 4.1.9 *Utilizando la igualdad* $\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$, *verificar la continuidad de* $f(x) = 2x^3 - 3x - 4$ *en* $x_0 = -2$.

▼ Tenemos:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(-2) = 2(-2)^3 - 3(-2) - 4 = \\ &= 2(-8) + 6 - 4 = -16 + 6 - 4 = -14\,; \\ f(x_0 + h) &= f(-2 + h) = f(h - 2) = 2(h - 2)^3 - 3(h - 2) - 4 = \\ &= 2(h^3 - 6h^2 + 12h - 8) - 3(h - 2) - 4 = \\ &= 2h^3 - 12h^2 + 24h - 16 - 3h + 6 - 4 = \\ &= 2h^3 - 12h^2 + 21h - 14\,. \end{aligned}$$

Vemos que

$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = \lim_{h\to 0}(2h^3 - 12h^2 + 21h - 14) = -14 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)\,.$$

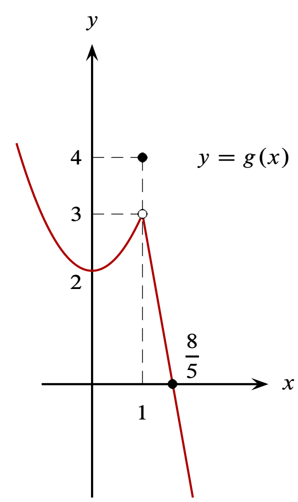
Entonces f es continua en $x_0 = -2$.

□

Ejemplo 4.1.10 *Dada la función* $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x < 1; \\ 4 & \text{si } x = 1; \\ 8 - 5x & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$

Utilizar la igualdad $\lim_{h\to 0} g(x_0 + h) = g(x_0)$ *para mostrar que* g *no es continua en* $x_0 = 1$.

▼ La gráfica de g es:



$g(x_0) = g(1) = 4$.

Para calcular $\lim_{h\to 0} g(x_0 + h)$ debemos notar que

$$h \to 0^- \;\Rightarrow\; h < 0 \;\Rightarrow\; x_0 + h < x_0 \;\Rightarrow\; x = 1 + h < 1 \;\Rightarrow\; g(x) = x^2 + 2;$$
$$h \to 0^+ \;\Rightarrow\; h > 0 \;\Rightarrow\; x_0 + h > x_0 \;\Rightarrow\; x = 1 + h > 1 \;\Rightarrow\; g(x) = 8 - 5x\,.$$

Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{h\to 0^-} g(x_0 + h) = \lim\limits_{h\to 0^-} g(1 + h) = \lim\limits_{h\to 0}[(1 + h)^2 + 2] = 1^2 + 2 = 3; \\ \lim\limits_{h\to 0^+} g(x_0 + h) = \lim\limits_{h\to 0^+} g(1 + h) = \lim\limits_{h\to 0}[8 - 5(1 + h)] = 8 - 5(1) = 3\,. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0^-} g(x_0 + h) = 3 = \lim_{h\to 0^+} g(x_0 + h) \;\Rightarrow\; \lim_{h\to 0} g(x_0 + h) = 3\,;$$

y debido a que $g(x_0) = 4$:

$$\lim_{h\to 0} g(x_0 + h) \neq g(x_0)\,.$$

Por lo tanto no se cumple la igualdad $\lim_{h\to 0} g(x_0 + h) = g(x_0)$, lo que permite afirmar que la función g no es continua en $x_0 = 1$.

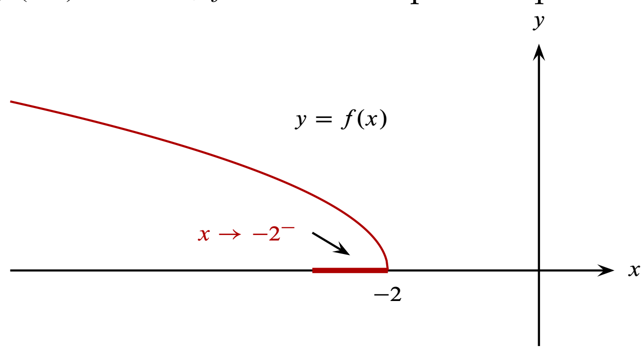
□

Continuidad lateral

- Una función es continua por la izquierda en x_0 si $\displaystyle\lim_{x\to {x_0}^-} f(x) = f(x_0)$.
- Una función es continua por la derecha en x_0 si $\displaystyle\lim_{x\to {x_0}^+} f(x) = f(x_0)$.
- De aquí que una función sea continua en un punto x_0 si y solamente si es continua por la izquierda y por la derecha en x_0.

Ejemplo 4.1.11 *Sea la función* $f(x) = \sqrt{-2-x}$.

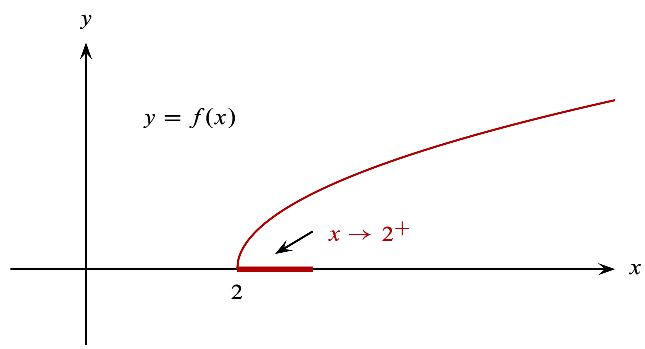
▼ Su dominio es $D_f = (-\infty, -2]$.
Se tiene $\displaystyle\lim_{x\to -2^-} f(x) = 0 = f(-2)$. Esto es, f es continua por la izquierda en $x_0 = -2$.



□

Ejemplo 4.1.12 *Sea la función* $f(x) = \sqrt{-2+x}$.

▼ Su dominio es $D_f = [2, +\infty)$.
Se obtiene $\displaystyle\lim_{x\to 2t'^+} f(x) = 0 = f(2)$. Esto es f es continua por la derecha en $x_0 = 2$.



□

Ejemplo 4.1.13

$$\textit{Dada la función } f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \textit{si } x < \dfrac{2}{3}; \\ 4 & \textit{si } x = \dfrac{2}{3}; \\ 9-6x & \textit{si } x > \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

1. *¿Es f continua por la izquierda en $x_0 = \dfrac{2}{3}$?*

2. *¿Es f continua por la derecha en $x_0 = \dfrac{2}{3}$?*

3. *¿Es f continua en $x_0 = \dfrac{2}{3}$?*

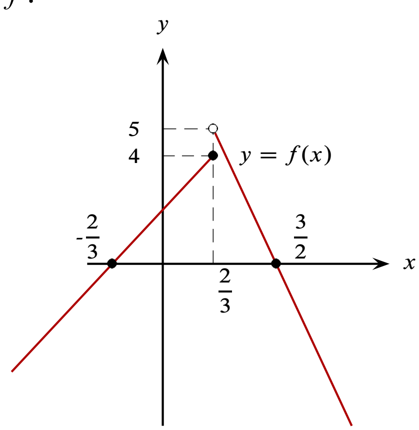
▼ Notamos que $f(x) = 4$ si $x = \dfrac{2}{3} \Rightarrow f\left(\dfrac{2}{3}\right) = 4$.

1. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{2}{3}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{2}{3}} (3x+2) = 3\left(\frac{2}{3}\right) + 2 = 2 + 2 = 4 \Rightarrow \lim_{x\to\frac{2}{3}^-} f(x) = f\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow f$ es continua por la izquierda en $x_0 = \dfrac{2}{3}$.

2. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{2}{3}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{2}{3}} (9-6x) = 9 - 6\left(\frac{2}{3}\right) = 9 - 4 = 5 \Rightarrow \lim_{x\to\frac{2}{3}^+} f(x) \neq f\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow f$ no es continua por la derecha en $x_0 = \dfrac{2}{3}$.

3. Por no ser f continua por la derecha en $x_0 = \dfrac{2}{3}$, se comprueba que f no es continua en $x_0 = \dfrac{2}{3}$.

Lo anterior se ve en la gráfica de f:



□

Ejemplo 4.1.14 *Dada la función $g(x) = \sqrt{x-5}$.*

1. *¿Es g continua por la izquierda en x_0=5?*

2. *¿Es g continua por la derecha en $x_0 = 5$?*

3. *¿Es g continua en $x_0 = 5$?*

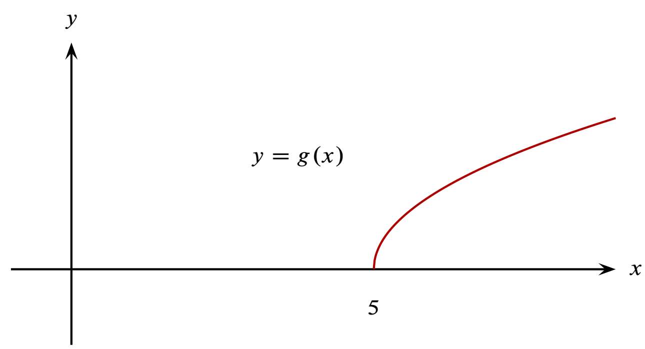
▼ Notamos que el dominio de g es

$$D_g = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x - 5 \geq 0 \,\} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5 \,\} = [5, +\infty)$$

y además que $g(5) = \sqrt{5-5} = 0$.

1. Ya que $D_g = [5, +\infty)$, entonces g no está definida para $x < 5$. Por lo tanto no tiene sentido hablar de continuidad para g por la izquierda en $x_0 = 5$.

   Ésta es la gráfica de g:



2. Ya que $D_g = [5, +\infty)$, entonces g sí esta definida para $x \geq 5$. Ahora sí,

$$\lim_{x\to 5^+} g(x) = \lim_{x\to 5^+} \sqrt{x-5} = \sqrt{\lim_{x\to 5^+} (x-5)} = \sqrt{5-5} = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 5^+} g(x) = g(5) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow g \text{ es continua por la derecha en } x_0 = 5.$$

3. Por no ser g continua por la izquierda en $x_0 = 5$, sucede que g no es continua en $x_0 = 5$.

□

Ejemplo 4.1.15 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} + a & \text{si } x < -1; \\ 1 & \text{si } x = -1; \\ \sqrt{k-2x} & \text{si } x > -1\,. \end{cases}$

Determinar los valores de las constantes a, k *que aseguren la continuidad de* f *en* $x_0 = -1$.

▼ Para lograr la continuidad de f en $x_0 = -1$ debemos asegurar la continuidad por la izquierda así como por la derecha en $x_0 = -1$.

1. Continuidad por la izquierda.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to -1} \left(\frac{1}{x} + a\right) = 1 \;\Leftrightarrow\; -1 + a = 1 \;\Leftrightarrow\; a = 2\,.$$

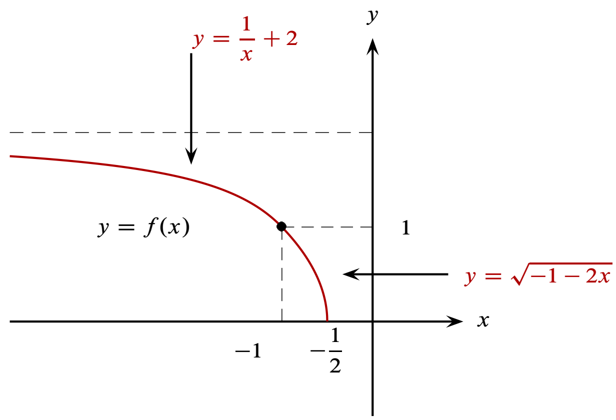
2. Continuidad por la derecha.

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to -1} (\sqrt{k-2x}) = 1 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{k+2} = 1 \;\Leftrightarrow\; k + 2 = 1 \;\Leftrightarrow\; k = -1\,.$$

Luego f es continua en $x_0 = -1$ si y sólo si

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) \,\&\, \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) \;\Leftrightarrow\; a = 2 \,\&\, k = -1\,.$$

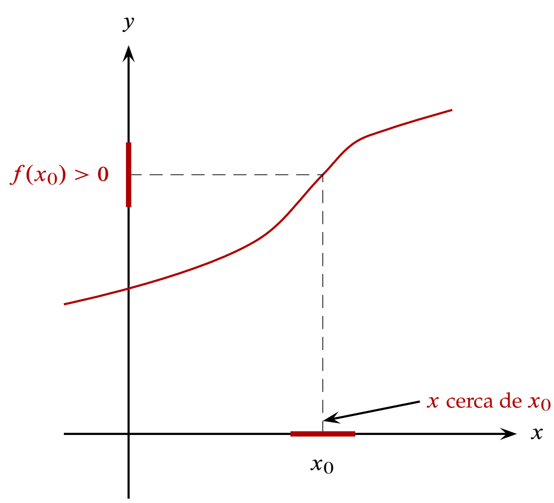
La gráfica de f con estos valores es:

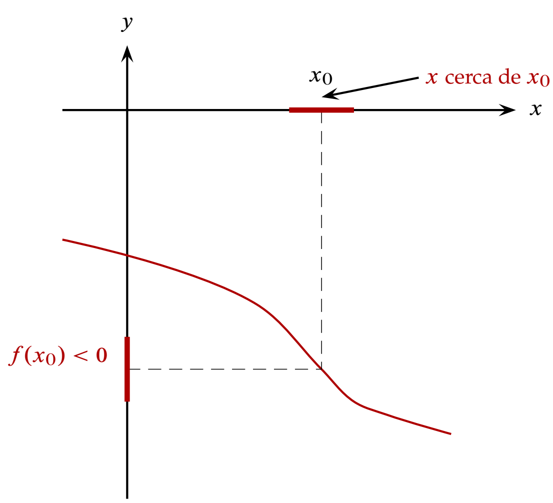


□

Como en la definición de continuidad aparece el límite de una función, todos los resultados anunciados para los límites generan resultados para las funciones continuas, por ejemplo:

- Si $f(x)$ es continua en x_0 y si $f(x_0) > 0$, entonces $f(x) > 0$ cuando x está cerca de x_0.
- Si $f(x)$ es continua en x_0 y si $f(x_0) < 0$, entonces $f(x) < 0$ cuando x está cerca de x_0.





Álgebra de funciones continuas

- La suma, diferencia, producto y cociente de funciones continuas en un punto x_0 es continua en dicho punto, exceptuando en el caso del cociente si x_0 es un cero o raíz del denominador.

Continuidad de la composición de funciones continuas

- Si la función f es continua en x_0 y la función g es continua en $f(x_0)$, entonces $g \circ f$ es continua en x_0.

Ejercicios 4.1.1 *Soluciones en la página 22*

1. Considere la función
$$g(x) = \begin{cases} 3x^2 - a & \text{si } x < 1\,; \\ b & \text{si } x = 1\,; \\ \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$
Determinar los valores de a, b para que la función sea continua en $x = 1$.

2. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en el punto -4. Se define $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(2x-10) + \dfrac{x^2-2}{x+3}$. ¿Es g continua en $a = 3$? Diga por qué.

3. Dada la siguiente función
$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 7 & \text{si } x < -2; \\ ax^2 - 3 & \text{si } -2 \le x < 2; \\ b & \text{si } x = 2; \\ -x + 7 & \text{si } 2 < x. \end{cases}$$
   a. Determinar los valores de las constantes a, b que hacen de f una función continua en $x = 2$.
   b. Reescriba la función f con los valores calculados de a, b. Estudie la continuidad o discontinuidad de f en $x = -2$.

4. Considere la función
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{4\,|\,x\,|} & \text{si } x < 0; \\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x = 0; \\ \dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x} & \text{si } x > 0\,, \end{cases}$$
y estudie su continuidad en $x = 0$.

5. Determinar los valores de a, b para que la siguiente función sea continua en $x = 0$ y en $x = 3$.
$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < 0; \\ \dfrac{4-\sqrt{4x+4}}{x^2-2x-3} & \text{si } x \ge 0 \;\&\; x \ne 3; \\ b & \text{si } x = 3\,. \end{cases}$$

6. Calcule los valores de a & b de modo que la función

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 1; \\ ax^2+b & \text{si } 1 \leq x < 2; \\ 3x & \text{si } x \geq 2\,, \end{cases}$$

sea continua en $x = 1$ y en $x = 2$.

7. Calcule los valores de a & b que hacen continua a la siguiente función en $x = -1$.

$$f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{si } x < -1; \\ a & \text{si } x = -1; \\ bx^2+1 & \text{si } -1 < x < 2\,. \end{cases}$$

8. Considere la función $g(x) = (x-1)f(x)$ con $0 \leq x \leq 2$, donde f es la función máximo entero. Decida, señalando claramente sus argumentos, si g es continua o no en $x = 1$.

9. Determinar los valores de las constantes a, b & c que hacen continua en todo su dominio la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < -2; \\ ax^2+b & \text{si } -2 \leq x < 1; \\ c & \text{si } x = 1; \\ 1-x & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

10. Dada la función $f(x) = \dfrac{3x^3+14x^2-27x+4}{3x-4}$, encuentre el punto donde esa función no es continua.

    ¿Cómo definiría la función en ese punto para que ésta resultase continua?

11. Determine los valores de las constantes c & k que hacen continua la función en $x = 1$ y en $x = 4$.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1; \\ cx+k & \text{si } 1 < x < 4; \\ -2x & \text{si } 4 \leq x\,. \end{cases}$$

    Dar un bosquejo de la gráfica de esa función con los valores encontrados.

12. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+4x+4 & \text{si } x \leq -1; \\ 2ax+b & \text{si } -1 < x \leq 2; \\ x^2-4x+4 & \text{si } 2 < x\,. \end{cases}$$

    a. Encontrar los valores de a, b para que la función sea continua en $x = -1$ y en $x = 2$.
    b. Graficar la función con los valores encontrados.

13. Determine los valores de a, b para que la siguiente función sea continua en $x = -3$ y en $x = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x = -3; \\ 9 - x^2 & \text{si } x \neq \pm 3; \\ b & \text{si } x = 3. \end{cases}$$

14. Determine los valores a, b para que la función $f(x)$ sea continua en $x = -2$ y en $x = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{si } x \leq -2; \\ x^2 - 1 & \text{si } -2 < x \leq 3; \\ x - b & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

15. Una legislación estatal sobre impuestos establece un impuesto exigible de 12% sobre los primeros \$20 000 de ganancias gravables y de 16% sobre el resto de las ganancias.
Calcular los valores de las constantes A y B para que la función de impuestos $T(x)$ sea continua para toda x.

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0; \\ A + 0.12x & \text{si } 0 < x \leq 20\,000; \\ B + 0.16(x - 20\,000) & \text{si } x > 20\,000. \end{cases}$$

16. Calcule los valores de a, b que hacen que la siguiente función sea continua en $x = -1$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{2x} & \text{si } x < -1; \\ b & \text{si } x = -1; \\ x^2 + 1 & \text{si } -1 < x < 2. \end{cases}$$

17. a. Hallar los valores de las constantes a, b de modo que la siguiente función sea continua en $x = -1$ y en $x = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq -1; \\ ax + b & \text{si } -1 < x < 3; \\ -2 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

b. Dibujar la gráfica de f con los valores obtenidos.

18. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x + 1} & \text{si } x < -2; \\ -ax + 2b & \text{si } |\,x\,| \leq 2; \\ 3 - x^2 & \text{si } x > 2\,. \end{cases}$$

a. Encuentre valores de a, b para que esa función sea continua en $x = -2$ y en $x = 2$.

b. Dar un bosquejo de la gráfica con estos valores.

19. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x - \sqrt{40 - 12x}}{3x^2 + x - 14} & \text{si } |\,x\,| \leq 3, x \neq 2, x \neq -\dfrac{7}{3}; \\ a & \text{si } x = 2\,. \end{cases}$$

¿Para qué valores de a la función es continua en $x = 2$?

20. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} mx - n & \text{si } x < 1; \\ 5 & \text{si } x = 1; \\ 2mx + n & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

a. Encontrar los valores de m y de n de modo que la función sea continua en $x = 1$. b. Graficar la función continua obtenida.

21. Sea la función

$$g(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < -1; \\ c & \text{si } x \in [-1, 1]; \\ x + 2 & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

a. Encontrar los valores de a & c que hacen que la función g sea continua en los puntos donde $|\,x\,| = 1$.
b. Dar un bosquejo de la gráfica de g con los valores encontrados.

22. Sea la función

$$g(t) = \begin{cases} 3 & \text{si } t \leq -1; \\ at^2 + bt + 1 & \text{si } -1 < t < 2; \\ \frac{3}{2}t & \text{si } t \geq 2\,. \end{cases}$$

a. Encontrar las valores de a, b para que la función g sea continua en $x = -1$ y en $x = 2$.
b. Con los valores encontrados, gráficar la función.

Ejercicios 4.1.1 *Continuidad en un punto, página 18*

1. $a = \dfrac{1}{8}$; $b = \dfrac{23}{8}$.

2. g es continua en 3;

   la composición $f(2x-10)$ es continua en $x = 3$.

3. a. $a = 2$; $b = 5$;

   b. $f(x) = \begin{cases} x^3 + 7 & \text{si } x < -2; \\ 2x^2 - 3 & \text{si } -2 \le x < 2; \\ 5 & \text{si } x = 2; \\ -x + 7 & \text{si } 2 < x; \end{cases}$

   f no es continua en $x = -2$;

   en $x = -2$ f tiene una discontinuidad esencial de salto.

4. g es una función continua para $x < 0$;

   g es una función continua para $x > 0$;

   g es discontinua en $x = 0$.

5. $a = -\dfrac{2}{3}$; $b = -\dfrac{1}{8}$.

6. $a = \dfrac{4}{3}$; $b = \dfrac{2}{3}$.

7. $a = -5$; $b = -6$.

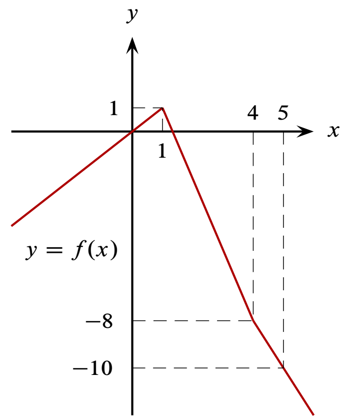
8. La función $g(x)$ es continua en $x = 1$.

9. $a = -1$; $b = 1$; $c = 0$.

10. $f(x)$ es continua excepto en $x = \dfrac{4}{3}$;

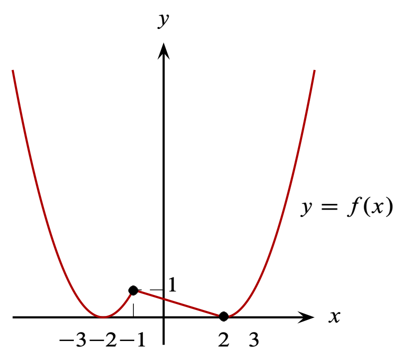
    definiendo $f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{79}{9}$, $f(x)$ resultaría continua en $x = \dfrac{4}{3}$.

11. $c = -3$; $k = 4$;



12. a. $a = -\dfrac{1}{6}$; $b = \dfrac{2}{3}$;

    b.



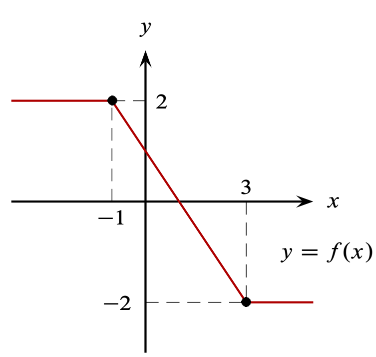
13. $a = 0$; $b = 0$.

14. $a = -1$; $b = -5$.

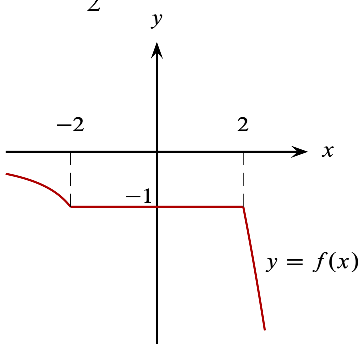
15. $A = 0$; $B = 2\,400$.

16. $a = -4$; $b = 2$.

17. $a = -1$; $b = 1$.

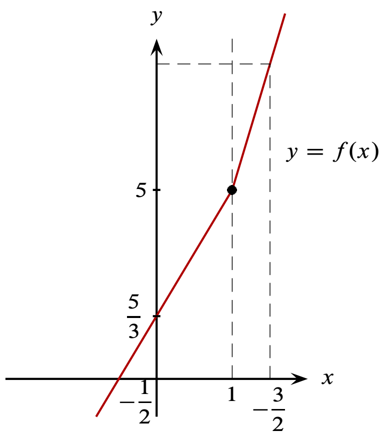


18. $b = -\dfrac{1}{2}$; $\quad a = 0$.

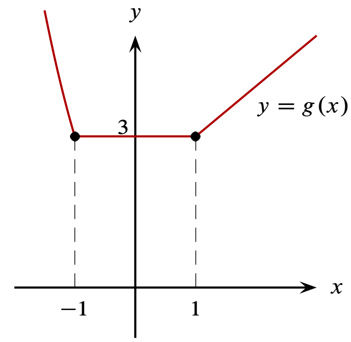


19. $\dfrac{7}{26} = f(2) = a$.

20. $m = \dfrac{10}{3}$ & $n = -\dfrac{5}{3}$.



21. $c = 3; a = 2$;



22. a. $a = 1; b = -1$;

b.