CAPÍTULO

# 4

# Continuidad

[1]

## 4.3 Continuidad en intervalos

- Una función es continua en un conjunto si es continua en cada punto del conjunto. Entonces, una función es continua en un intervalo abierto $(a, b)$ si es continua en cada $x \in (a, b)$.
- Una función $f$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ si es continua en el intervalo abierto $(a, b)$, si en $a$ es continua por la derecha y si en $b$ es continua por la izquierda, o sea que $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ y que $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.
- Definiciones análogas se dan para la continuidad de funciones en intervalos de la forma $[a, +\infty)$ así como $(-\infty, b]$.

Resultados muy importantes son los siguientes:

- Una función polinomial es continua en todo $\mathbb{R}$.
- Una función racional es continua en todo su dominio.
- La composición de funciones continuas es continua.

**Ejemplo 4.3.1** *Obtener los intervalos de continuidad de las siguientes funciones:*

1. $f(x) = x^{10} - x^6 + x^2 - 1$.
2. $g(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$.

[1] canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

3. $h(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$.

4. $\beta(x) = \sqrt[3]{3x - 4}$.

5. $\gamma(x) = \sqrt{-x^3}$.

6. $\delta(x) = \dfrac{\sqrt{x + 5}}{x^3 - 4x}$.

▼

1. Por ser una función polinomial, $f$ es continua en toda la recta real $\mathbb{R}$.

2. Por ser una función racional, $g$ es continua en todo su dominio que es $D_g = \mathbb{R}$.

3. Por ser una función racional, $h$ es continua en todo su dominio, que es

$$D_h = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 1 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 \neq 1 \right\} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}\,.$$

Es decir, $h$ es continua en los intervalos

$$(-\infty, -1)\ ,\ (-1, 1)\ \text{ y }\ (1, +\infty)\ .$$

4. Si consideramos que $\beta_1(y) = \sqrt[3]{y}$ & $\beta_2(x) = 3x - 4$, podemos afirmar que $(\beta_1 \circ \beta_2)(x) = \beta(x)$. Y debido a que $\beta_1$ & $\beta_2$ son funciones continuas en todo $\mathbb{R}$, entonces $\beta$ (por ser una composición de funciones continuas) es continua en todo $\mathbb{R}$.

5. El dominio de $\gamma(x) = \sqrt{-x^3}$ es

$$D_\gamma = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -x^3 \geq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^3 \leq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \leq 0 \right\}\,.$$

La función $\gamma$ es continua en $D_\gamma = (-\infty, 0]$. Puede considerarse como una composición de funciones continuas: $-x^3$ compuesta con $\sqrt{x}$.

6. El dominio de la función $\delta(x) = \dfrac{\sqrt{x + 5}}{x^3 - 4x}$ es

$$\begin{aligned}
D_\delta &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x + 5 \geq 0 \,\&\, x^3 - 4x \neq 0 \right\} = \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \geq -5 \,\&\, x(x + 2)(x - 2) \neq 0 \right\} = \\
&= [-5, +\infty) - \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x(x + 2)(x - 2) = 0 \right\} = \\
&= [-5, +\infty) - \{-2, 0, 2\}\,.
\end{aligned}$$

La función $\delta$ es continua en los intervalos

$$[-5, -2)\,,\ (-2, 0)\,,\ (0, 2)\ \text{ y }\ (2, +\infty)\ .$$

□

**Ejemplo 4.3.2** *Dada la función* $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4}$*, obtener:*

1. *Dominio, raíces e intervalos de continuidad.*
2. *Discontinuidades y su clasificación.*
3. *Asíntotas verticales y horizontales.*
4. *Un bosquejo de la gráfica.*

▼

1. Por ser $f$ una función racional, es continua en todo su dominio. Éste es:

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 - 4 = 0 \right\} = \mathbb{R} - \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 = 4 \right\} = \mathbb{R} - \{-2, 2\} \,.$$

Es decir, $f$ es continua en los intervalos

$$(-\infty, -2)\,,\; (-2, 2) \;\text{ y }\; (2, +\infty)\,.$$

Raíces:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \;&\Leftrightarrow\; \frac{(x+2)(x-3)}{x^2-4} = 0 \;\Leftrightarrow\; x + 2 = 0 \text{ o bien } x - 3 = 0 \;\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; x = -2 \text{ o bien } x = 3\,. \end{aligned}$$

Pero debido a que $x = -2 \notin D_f$, entonces $x = -2$ no puede ser raíz. Por lo tanto $f$ tiene sólo una raíz que es $x = 3$.

2. La función $f$ es discontinua en $x_1 = -2$ y en $x_2 = 2$.

Para clasificar estan discontinuidades debemos indagar la existencia de los límites: $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ & $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

a. En $x_1 = -2$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2} f(x) &= \lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = \\ &= \lim_{x \to -2} \frac{x-3}{x-2} = \frac{-2-3}{-2-2} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4} \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow\; \lim_{x \to -2} f(x) = \frac{5}{4} \;\Rightarrow\; \lim_{x \to -2} f(x) \text{ sí existe.} \end{aligned}$$

Entonces $f$ tiene en $x_1 = -2$ una discontinuidad removible o evitable.

¿Cómo remover o evitar la discontinuidad en $x_1 = -2$?

Obtenemos que $-2 \notin D_f$ y que $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \dfrac{5}{4}$. Concluimos que la curva $y = f(x)$ tiene una interrupción en el punto $\left(-2, \dfrac{5}{4}\right)$. Es decir, el punto $\left(-2, \dfrac{5}{4}\right)$ no pertenece a la curva.

La discontinuidad se remueve o se evita definiendo $f(-2) = \dfrac{5}{4}$.

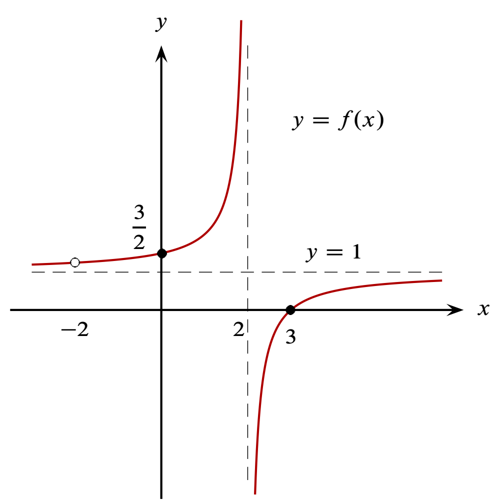
b. En $x_2 = 2$
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-2}\,.$$
Como $\lim\limits_{x\to 2}(x-2) = 2-2 = 0$ & $\lim\limits_{x\to 2}(x-3) = 2-3 = -1$, podemos asegurar que
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\frac{x-3}{x-2} = \text{“}\left(\frac{-1}{0^-}\right)\text{”} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\frac{x-3}{x-2} = \text{“}\left(\frac{-1}{0^+}\right)\text{”} = -\infty\,.$$
Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no existe.

Luego, $f$ tiene en $x_2 = 2$ una discontinuidad esencial infinita.

3. Podemos asegurar entonces que la recta $x = 2$ es una asíntota vertical y además es la única.

   Para hallar las asíntotas horizontales calculamos:
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \dfrac{4}{x^2}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{6}{x^2}}{1 - \dfrac{4}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1\,.$$
   Entonces, $f$ tiene sólo una asíntota horizontal que es la recta $y = 1$.

4. Un bosquejo de la gráfica de $f$ es




□

**Ejemplo 4.3.3** *Dada la función*
$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}\,.$$

1. *Obtenga su dominio y sus raíces.*
2. *Determinar los intervalos de continuidad y clasificar sus discontinuidades.*
3. *Dé las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.*
4. *En base a la información obtenida en los incisos anteriores haga un bosquejo de la gráfica de $f$.*

▼

1. Dominio: $D_f = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - x = 0\}$.

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0, x = \pm 1\,,$$

entonces

$$D_f = \mathbb{R} - \{0, \pm 1\}\,.$$

Las raíces deberían ser los puntos donde

$$x^2 - 2x + 1 = 0\,,$$

sin embargo $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ es cero solamente si $x = 1$, pero $1 \notin D_f$.

Entonces, la función $f(x)$ no tiene raíces.

2. La función $f(x)$ es continua en todo su dominio.

En $x = 0$ tiene una discontinuidad infinita pues

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{x-1}{x(x+1)} = \mp\infty\,.$$

Así $x = 0$ es una asíntota vertical.

En $x = -1$ también tiene una discontinuidad infinita, pues

$$\lim_{x\to -1^\pm} f(x) = \lim_{x\to -1^\pm} \frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1^\pm} \frac{x-1}{x(x+1)} = \pm\infty;\ \text{e igualmente}$$

$x = -1$ también es una asíntota vertical;

pero en $x = 1$ la discontinuidad es removible pues

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x(x+1)} = \frac{0}{2} = 0\,.$$

Obsérvese que la función $f$ podría ser continua en $x = 1$, al definir $f(1) = 0$.

3. En el inciso anterior vimos que $x = 0$ y que $x = -1$ son asíntotas verticales.

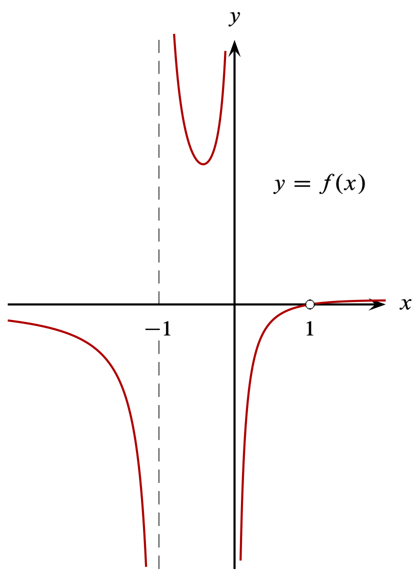
Para hallar las asíntotas horizontales calculamos

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{1-\dfrac{1}{x^2}} = \frac{0-0+0}{1-0} = \frac{0}{1} = 0\,.$$

Entonces $y = 0$ es asíntota horizontal.

4. El bosquejo de la gráfica de la función $f$ es:




□

**Ejemplo 4.3.4** *Determinar los valores de las constantes $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función $h$ definida por*

$$h(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \notin [-2,2]; \\ ax^2+bx & \text{si } x \in [-2,2], \end{cases}$$

*sea continua en todos los reales.*

▼ La función $h(x)$ es continua en todos los reales excepto posiblemente en $x = -2$ & $x = 2$. Para que la función sea continua en $x = -2$ se debe cumplir que:

$$\lim_{x\to -2} h(x) = h(-2),$$

por lo que

$$\lim_{x\to -2^-} h(x) = \lim_{x\to -2^+} h(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2^-}(2x+1) = \lim_{x\to -2^+}(ax^2+bx) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4+1 = 4a-2b\,;$$

o sea,

$$4a - 2b = -3;$$

y para que sea continua en $x = 2$ se debe cumplir que:

$$\lim_{x \to 2} h(x) = h(2),$$

por lo que

$$\begin{gathered}\lim_{x \to 2^-} h(x) = \lim_{x \to 2^+} h(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{x \to 2^-} (ax^2 + bx) = \lim_{x \to 2^+} (2x + 1) \Rightarrow \\ \Rightarrow 4a + 2b = 4 + 1\,,\end{gathered}$$

o sea,

$$4a + 2b = 5\,.$$

Así para que $h(x)$ tenga límite en $x = -2$ y en $x = 2$ se deben cumplir las condiciones

$$\begin{aligned} 4a - 2b &= -3\,; \\ 4a + 2b &= 5\,. \end{aligned}$$

Éste es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Sumando las ecuaciones obtenemos:

$$8a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{4}\,.$$

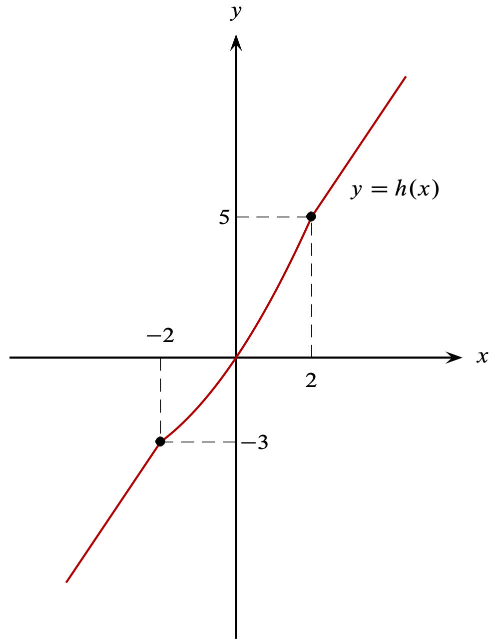
Sustituyendo este valor en la primera ecuación, tenemos

$$4\left(\frac{1}{4}\right) - 2b = 1 - 2b = -3 \Rightarrow 2b = 1 + 3 = 4 \Rightarrow b = 2\,.$$

Con estos valores de $a, b$ la función que resulta es

$$h(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < -2; \\ \frac{1}{4}x^2 + 2x & \text{si } x \in [-2, 2]; \\ 2x + 1 & \text{si } x > 2\,, \end{cases}$$

cuya gráfica es




Por la forma en que ha sido construida la gráfica se cumple que:

$$\lim_{x \to -2} h(x) = -3 \;\&\; \lim_{x \to 2} h(x) = 5\,.$$

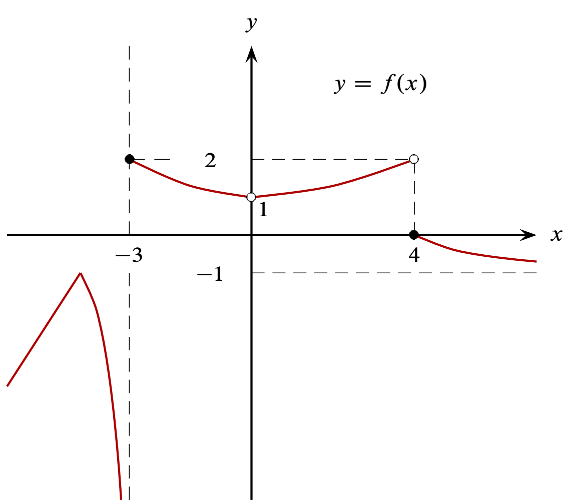
Además

$$h(-2) = \frac{1}{4}(-2)^2 + 2(-2) = 1 - 4 = -3 \;\&\; \lim_{x \to -2} h(x) = h(-2) \;\Rightarrow\; h(x) \text{ es continua en } x = -2\,;$$

$$h(2) = \frac{1}{4}(2)^2 + 2(2) = 1 + 4 = 5 \;\&\; \lim_{x \to 2} h(x) = h(2) \;\Rightarrow\; h(x) \text{ es continua en } x = 2\,.$$

□

**Ejemplo 4.3.5** *A partir de la gráfica de una función $f$*




*obtener lo que se solicita a continuación:*

1. *Los intervalos de continuidad de la función $f$.*
2. *Las ecuaciones de las asíntotas de $f$.*
3. *Los límites siguientes:*

*a.* $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$;
*b.* $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$;
*c.* $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$;
*d.* $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$;
*e.* $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$;
*f.* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$;
*g.* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

▼

1. La función $f$ es continua en: $(-\infty, -3)$, $[-3, 0)$, $(0, 4)$ y en $[4, \infty)$.
2. La asíntota vertical es $x = -3$ y la horizontal es $y = -1$.
3. a. $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = -\infty$;
   b. $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = 2$;
   c. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$;
   d. $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 2$;
   e. $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 0$;
   f. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$;
   g. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -1$.

□

**Ejemplo 4.3.6** *Para la curva* $y = f(x) = \dfrac{-3x^2}{x^2 - 4}$*, obtener: dominio, raíces y paridad; intervalos de continuidad, discontinuidades y su clasificación; asíntotas verticales y horizontales.*

▼ Dominio: $D_y = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 - 4 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; (x+2)(x-2) \neq 0 \right\} = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$.

Raíz: $x = 0$ cuando $-3x^2 = 0$.

Es par, pues $\dfrac{-3(-x)^2}{(-x^2) - 4} = \dfrac{-3x^2}{x^2 - 4}$.

Como es una función racional es continua en todo su dominio y discontinua en $x = \pm 2$ donde tiene discontinuidades infinitas ya que:

$$\lim_{x \to 2^{\pm}} f(x) = \lim_{x \to 2^{\pm}} \frac{-3x^2}{(x+2)(x-2)} = \mp\infty \;\&\; \lim_{x \to -2^{\pm}} \frac{-3x^2}{(x+2)(x-2)} = \pm\infty\,.$$

Comprobamos por esto que $x = \pm 2$ son asíntotas verticales y como

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-3}{1 - \dfrac{4}{x^2}} = \frac{-3}{1} = -3,$$

tenemos que $y = -3$ es asíntota horizontal.

□

## Funciones continuas en intervalos cerrados

Las funciones continuas en intervalos cerrados tienen algunas propiedades importantes las cuales iremos viendo paulatinamente.

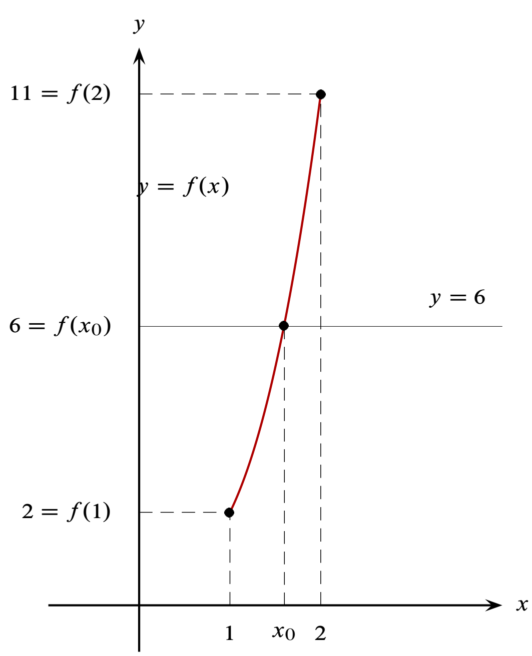
- **Teorema del Valor Intermedio.** Sea $f$ una función continua en cierto intervalo $I$ y sean $a, b$ números en $I$. Si $y_0$ es un número que está entre $f(a)$ & $f(b)$ entonces existe al menos un $x_0$ entre $a$ & $b$ tal que $f(x_0) = y_0$.

**Ejemplo 4.3.7** *Usar el teorema del Valor Intermedio para probar que la curva $y = x^3 + x^2 - x + 1$ se interseca con la recta $y = 6$ en el intervalo $[1, 2]$.*

▼ La función polinomial $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ es continua en todo $\mathbb{R}$, por lo tanto es continua en el intervalo $[1, 2]$. Además,

$$f(1) = 1^3 + 1^2 - 1 + 1 = 2 \quad \text{y también} \quad f(2) = 2^3 + 2^2 - 2 + 1 = 11\,.$$

Como $y_0 = 6$ está entre $2 = f(1)$ & $11 = f(2)$, entonces, por el teorema del Valor Intermedio, existe al menos un $x_0 \in (1, 2)$ tal que $f(x_0) = 6$. Como esto sucede, las curvas $y = x^3 + x^2 - x + 1$ & $y = 6$ se intersecan.




Nota: al intersecarse las curvas $y = x^3 + x^2 - x + 1$ & $y = 6$ sucede que

$$x^3 + x^2 - x + 1 = 6 \;\Leftrightarrow\; x^3 + x^2 - x + 1 - 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^3 + x^2 - x - 5 = 0\,.$$

Igualdad que se cumple cuando $x$ es solución de la ecuación $x^3 + x^2 - x - 5 = 0$ o bien cuando $x$ es raíz de la función $g(x) = x^3 + x^2 - x - 5$.

□

- El teorema de Valor Intermedio garantiza la existencia de ceros o raíces de funciones continuas:

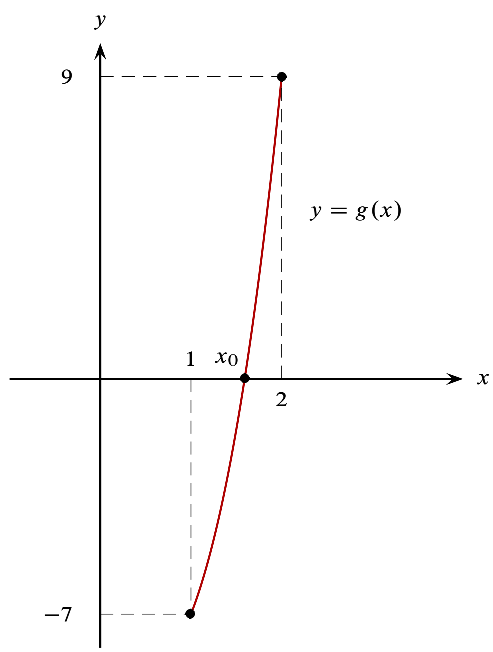
  Si $f$ es continua en $[a, b]$ & $f(a) \times f(b) < 0$, es decir, si $f(a)$ & $f(b)$ tienen signos diferentes [0 está entonces entre $f(a)$ y $f(b)$], existe una raíz $c \in (a, b)$ de $f$, esto es, $f(c) = 0$.

**Ejemplo 4.3.8** *Mostrar que la ecuación* $2x^3+x^2-x-9=0$ *tiene al menos una solución en el intervalo* $[1,2]$.

▼ La función polinomial $g(x) = 2x^3 + x^2 - x - 9$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y por lo tanto es continua en el intervalo $[1,2]$.

$$g(1) = 2(1)^3 + 1^2 - 1 - 9 = -7 \quad \& \quad g(2) = 2(2)^3 + 2^2 - 2 - 9 = 9\,.$$

Como $g(1) = -7 < 0$ y como $g(2) = 9 > 0$, entonces $y_0 = 0$ está entre $g(1)$ & $g(2)$. Por lo tanto por el teorema del Valor Intermedio existe al menos un $x_0 \in (1,2)$ tal que $g(x_0) = 0$. Entonces, en el intervalo $(1,2)$ existe al menos una solución de la ecuación: $2x^3 + x^2 - x - 9 = 0$.




□

- También, por el teorema del Valor Intermedio, si una función continua en un intervalo cerrado no tiene raíces en él, entonces $f(x) > 0$ para toda $x$ en el intervalo o bien $f(x) < 0$ para toda $x$ en el intervalo.

**Ejemplo 4.3.9** *Aplicación del teorema del Valor Intermedio a la función* $f(x) = ax^2 + bx + c$.

▼ La función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ es continua en $\mathbb{R}$.

Si $b^2 - 4ac < 0$, la función no tiene raíces en $\mathbb{R}$, luego $f(x) > 0$ o bien $f(x) < 0$ en $\mathbb{R}$, como habíamos adelantado ya.

Basta evaluar la cuadráticas en un punto, para conocer su signo en todos los reales. Por ejemplo en $x = 0$.

1. $f(0) = c > 0$, entonces $f(x) > 0$ para $x \in \mathbb{R}$.

2. $f(0) = c < 0$, entonces $f(x) < 0$ para $x \in \mathbb{R}$.

□

- Asimismo entre dos raíces consecutivas de una función polinomial la función es positiva siempre o bien es negativa siempre.

- Igualmente, una función polinomial de grado impar tiene al menos una raíz real.

  En efecto:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = \\
&= x^n\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n}\right).
\end{aligned}
$$

  Cuando $x \to +\infty$ o bien $x \to -\infty$, el segundo factor tiende a $a_0 \neq 0$.

  Tenemos que:

  1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ tiene el mismo signo que $a_0$, luego hay puntos donde $f(x)$ tiene el mismo signo que $a_0$.
  2. Por otro lado, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ tiene el signo contrario al de $a_0$, luego también hay puntos donde $f(x)$ tiene el signo contrario al de $a_0$.

  Por lo que entre ambos tipos de puntos por lo menos hay una raíz real.

**Ejemplo 4.3.10** *Demostrar que la ecuación $3x^5 - 4x^2 + 5x - 6 = 0$ tiene al menos una solución real.*

▼ La función polinomial $g(x) = 3x^5 - 4x^2 + 5x - 6$ es continua en toda la recta real.
Y considerando que

$$
\begin{aligned}
&g(x) = 3x^5 - 4x^2 + 5x - 6 = x^5\left(3 - \frac{4}{x^3} + \frac{5}{x^4} - \frac{6}{x^5}\right);\\
&\lim_{x\to-\infty} x^5 = -\infty \;\&\; \lim_{x\to-\infty}\left(3 - \frac{4}{x^3} + \frac{5}{x^4} - \frac{6}{x^5}\right) = 3 > 0;\\
&\lim_{x\to+\infty} x^5 = +\infty \;\&\; \lim_{x\to+\infty}\left(3 - \frac{4}{x^3} + \frac{5}{x^4} - \frac{6}{x^5}\right) = 3 > 0.
\end{aligned}
$$

Podemos afirmar lo que sigue:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^5\left(3 - \frac{4}{x^3} + \frac{5}{x^4} - \frac{6}{x^5}\right)\right] = -\infty$.

   Y se puede asegurar entonces la existencia de un número $a < 0$ tal que $g(a) < 0$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^5\left(3 - \frac{4}{x^3} + \frac{5}{x^4} - \frac{6}{x^5}\right)\right] = +\infty$.

   Existe entonces un número $b > 0$ tal que $g(b) > 0$.

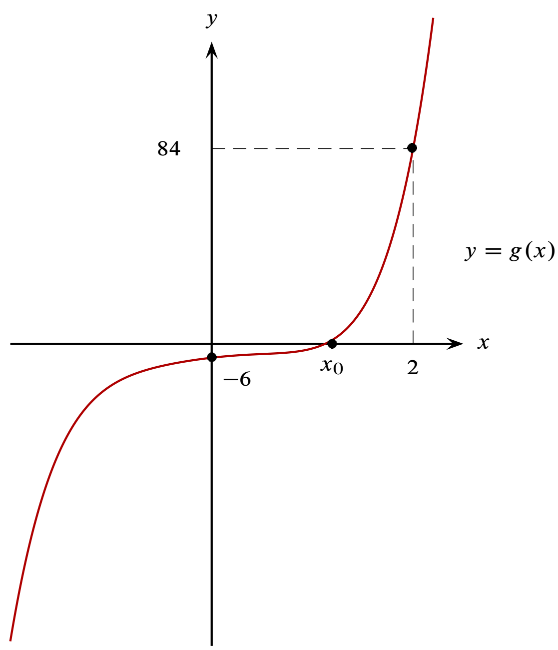
3. Como $g(a) < 0$ y como $g(b) > 0$, entonces $y_0 = 0$ está entre $g(a)$ & $g(b)$. Por lo tanto, por el teorema del Valor Intermedio, existe al menos un $a < x_0 < b$ tal que $g(x_0) = 0$.

   Entonces, existe al menos una solución real de la ecuación $3x^5 - 4x^2 + 5x - 6 = 0$.

   Este mismo resultado también se puede obtener directamente observando que:

$$g(0) = -6 < 0 \;\&\; g(2) = 84 > 0\,;$$

   luego, $3x^5 - 4x^2 + 5x - 6 = 0$ tiene al menos una solución $x_0$ entre 0 y 2.




□

**Ejemplo 4.3.11** *Verifique que la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ tiene una raíz entre 0 y 1. Proporcione un intervalo de longitud 1/4 que contenga dicha raíz.*

▼ La función $f(x) = x^3 + x - 1$ es continua en $\mathbb{R}$ y en particular en $[0, 1]$.
Se tiene que $f(0) = -1 < 0$ y que $f(1) = 1 > 0$, por lo que en el intervalo $(0, 1)$ la función $f$ tiene al menos una raíz, según el teorema del Valor Intermedio.
Además

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{8} < 0.$$

Por lo que $f(x)$ tiene una raíz en el intervalo $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.
Por otro lado

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \frac{3}{4} - 1 = \frac{27}{64} + \frac{3}{4} - 1 = \frac{11}{64} > 0.$$

Por lo tanto $f(x)$ tiene una raíz $c$ en el intervalo $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ que es de longitud $\frac{1}{4}$.

□

**Ejemplo 4.3.12** *Sea* $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ *la función definida por*

$$f(x) = 48 - 98x - 343x^2 + 287x^3 - 343x^4 + 287x^5 - 391x^6 + 385x^7 .$$

*Evalúe* $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.
*¿Cuántas raíces reales tiene al menos el polinomio* $f(x)$ *en el intervalo* $[-3, 3]$*?*

▼ Evaluando tenemos que

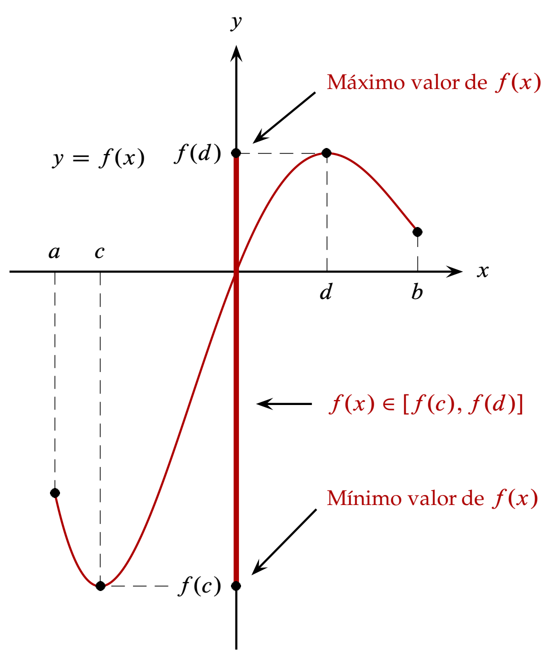
1. $f(-2) = -92\,400$;
2. $f(-1) = -1\,890$;
3. $f(0) = 48$;
4. $f(1) = -168$;
5. $f(2) = 28\,728$.

Ya que $f$ es una función continua en todo $\mathbb{R}$, por ser polinomial, entonces $f$ es continua en el intervalo $[-3, 3]$.
Por ser $f(-2) < 0$, $f(-1) < 0$, $f(0) > 0$, $f(1) < 0$ & $f(2) > 0$, según el teorema del Valor Intermedio, la función $f$ tiene al menos una raíz en los intervalos $(-1, 0)$, $(0, 1)$ & $(1, 2)$.
Luego la función $f$ tiene al menos 3 raíces reales en el intervalo $[-3, 3]$.

□

- **Teorema de los Valores Extremos.** Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces:
  Existen $c$ & $d \in [a, b]$ tales que $f(c) \le f(x) \le f(d)$ para $x \in [a, b]$.

- Por el teorema de los Valores Extremos y el teorema del Valor Intermedio, tenemos que el rango de una función continua definida en un intervalo cerrado es otro intervalo cerrado, a saber, $[f(c), f(d)]$.




**Ejercicios 4.3.1** *Soluciones en la página* **??**

1. Sea $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9$; demuestre que hay, al menos, un número $a$ entre 0 & 10 tal que $f(a) = 500$.

2. El costo de fabricación de $q$ automóviles eléctricos, en miles de pesos, es de
$$C(q) = 5q^3 + 13q^2 + 14\,;$$
mientras que el ingreso, también en miles de pesos, es de
$$I(q) = q^4 - 5q\,.$$
Demostrar que existe un valor entre 2 & 10, de la variable $q$, donde la fábrica ni gana ni pierde.

3. Sea $f\colon [1, 3] \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 - 2x^2 - 10x$ . ¿Existe un punto $a \in [1, 3]$ tal que $f(a) = -15$? Justifique su respuesta.

4. La temperatura $T$ (en °C) a la que el agua hierve está dada por la fórmula
$$T(h) = 100.862 - 0.0415\sqrt{h + 431.03}\,,$$
donde $h$ es la altura sobre el nivel del mar (medida en metros).

   Use el teorema del Valor Intermedio y diga si entre los 4 000 y 4 500 metros sobre el nivel del mar hay una altitud a la cual hierve a 98°C. Justifique su respuesta.

5. Verifique que la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ tiene una raíz entre 0 & 1. Dé un intervalo de longitud $\dfrac{1}{4}$ que contenga a dicha raíz.

6. Determinar un intervalo de longitud 0.5 que contenga a una raíz de la ecuación $x^3 + 2x + 4 = 0$.

7. Dada la función
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } -2 \le x < 0; \\ -(x^2 + 2) & \text{si } 0 \le x \le 2\,. \end{cases}$$
   a. Calcular $f(-2)$ & $f(2)$.
   b. ¿Existe $c \in (-2, 2)$ tal que $f(c) = 0$?

8. Sea el polinomio $p(x) = x^3 - 4x + 2$ . Aproxime en el intervalo $[1, 2]$ una raíz del polinomio con error menor que $\dfrac{1}{4}$.

9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(-10) = -4$, $f(-3) = 2$, $f(1) = 0$, $f(2) = 8$ y que $f(4) = -5$.

   Determine el número de raíces que, al menos, tiene la función $f$ y en qué intervalos se encuentran.

10. Verifique que la ecuación $x^3 - 4x - 2 = 0$ tiene una raíz real en el intervalo $[2, 3]$ y determine un intervalo de longitud $1/4$ que contenga a dicha raíz.

11. Determine un intervalo de longitud $1/4$ en el que la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tenga una raíz.

12. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^4}{4} - x^2 - 1$. Pruebe que esa función tiene al menos una raíz positiva y otra negativa.

13. Encuentre un intervalo en donde la función $h(x) = -2x^5 - 7x + 1$ tiene una raíz.

14. Un polinomio pasa por los puntos $(-5, 10)$, $(2, 3)$ y $(17, -1)$.
¿Cuántas raíces tiene como mínimo? Justifique su respuesta.

15. Muestre que la función $h(x) = x^5 + x - 5$ tiene al menos una raíz en los números reales.

16. Halle un intervalo de longitud no mayor que 0.1 donde se encuentre una raíz del polinomio:
$$\rho(x) = -x^4 + 16x^3 - 60x^2 + 1.$$

17. Dada la función $f(x) = x^5 + x - 1$, verifique que existe un número $c$ tal que $f(c) = 0$. Es decir, justifique que la función tiene una raíz.

18. Dada la función $f(x) = -x^3 + 4x + 2$, obtener un intervalo en donde la función tenga al menos una raíz. Justifique su respuesta.

19. Considere la función
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2 - 6x + 8} & \text{si } x \neq 2 \text{ y } x \neq 4; \\ 1 & \text{si } x = 2\,; \end{cases}$$
determinar:
    a. Dominio y raíces.
    b. Intervalos de continuidad y clasificación de discontinuidades.
    c. Ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.
    d. Bosquejo gráfico.

20. Considere la función:
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-4}{2-x} & \text{si } x \neq 2; \\ 3 & \text{si } x = 2\,; \end{cases}$$
determine:
    a. Dominio y raíces.
    b. Intervalos de continuidad y clasificación de sus discontinuidades.
    c. Ecuaciones de sus asíntotas verticales y horizontales.
    d. Bosquejo gráfico.

21. Para la función $f(x) = \dfrac{3x^2 - 12}{x^2 + x - 2}$, determine:
    a. Los puntos de discontinuidad y su clasificación.
    b. Los intervalos de continuidad.

c. Las asíntotas verticales y horizontales.

d. Por último esboce su gráfica.

22. Considere la función $g(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x^2 - 4}$ .

a. Obtener las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales de esta función $g$.

b. Encontrar el dominio, las raíces y los intervalos de continuidad de la función.

c. Bosquejar su gráfica.

23. Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + x - 2}$.

a. Determinar dominio y raíces.

b. Hallar intervalos de continuidad y clasificar las discontinuidades.

c. Encontrar las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.

d. En base a lo anterior, hacer el esbozo gráfico de $f$.

24. Sea la función $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 12}{x^2 - 8x + 15}$. Encuentre: raíces, discontinuidades y su clasificación, asíntotas e intervalos de continuidad. Bosqueje su gráfica.

25. Considere la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 7x + 12}$ .

a. Proporcione dominio, raíces e intervalos de continuidad.

b. Determine las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.

c. Haga un esbozo gráfico de la función $f$.

26. Considere la función $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$ .

a. Proporcione dominio, raíces e intervalos de continuidad de la función $f$.

b. Obtenga las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales de la función $f$.

c. Dibuje la gráfica y halle el rango de la función $f$.

27. Sea $f(x) = \dfrac{6x^3 + 3x^2 - 3x}{2x^3 + 3x^2 - 2x}$, hallar:

a. Dominio y raíces.

b. Intervalos de continuidad, clasificando las discontinuidades.

c. Ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.

d. Esbozo gráfico de $f$.

28. Considere la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{9 - x^2}$.

a. Proporcione dominio, raíces e intervalos de continuidad de la función $f$.
b. Obtenga las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales de la función $f$.
c. Dibuje la gráfica y halle la imagen de la función $f$.

29. Considere la función $h(x) = \dfrac{2x^2 - 18}{x^2 - 25}$.
    a. Obtener el dominio, raíces e intervalos de continuidad.
    b. Hallar las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.
    c. Bosquejar la gráfica de la función $h$.
30. De la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 12}{x^2 - 7x + 10}$, encontrar:
    a. Dominio, raíces, puntos de discontinuidad y su clasificación.
    b. Las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.
    c. El bosquejo de su gráfica.
31. De la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 3x + 2}$, encontrar:
    a. Dominio, raíces, puntos de discontinuidad y su clasificación.
    b. Las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.
    c. El bosquejo de su gráfica.
32. Para la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - x - 2}$, determinar:
    a. Dominio, raíces e intervalos de continuidad.
    b. Discontinuidades y su clasificación.
    c. Asíntotas verticales y horizontales.
    d. Un esbozo de la gráfica.
33. Para la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$, determine:
    a. Dominio, raíces y paridad.
    b. Ecuaciones de las asíntotas verticales y de las asíntotas horizontales.
    c. Discontinuidades y su clasificación.
    d. Esbozo gráfico y rango.
34. Para la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x}$, determine:
    a. Los puntos de discontinuidad y su clasificación.
    b. Las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.

c. Un esbozo de la gráfica.

35. Dada $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x^2 + x - 2}$.

a. Determinar su dominio y sus raíces.

b. Clasifique sus puntos de discontinuidad.

c. Encuentre las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.

d. Haga un bosquejo de su gráfica.

36. Para la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{4 - x^2}$, obtener:

a. Dominio y puntos de intersección con el eje $x$.

b. Intervalos de continuidad.

c. Ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.

d. Bosquejo gráfico.

37. Sea la función $f(x) = \dfrac{3x^3 - 3x}{x^4 + x^3}$.

Encontrar el dominio y las raíces, clasificar sus discontinuidades, encontrar sus asíntotas verticales y horizontales y hacer un bosquejo de la gráfica.

38. Para la función $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 + 4x + 3}$, determine:

a. Dominio y raíces.

b. Intervalos de continuidad. Puntos de discontinuidad y su clasificación.

c. Asíntotas verticales y horizontales.

d. Esbozo gráfico y rango.

39. Para la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 - 4}$, determine:

a. Dominio y raíces.

b. Puntos de discontinuidad y su clasificación.

c. Asíntotas verticales y horizontales.

d. Esbozo gráfico de $f$.

40. Para la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + 6x}{x^2 + 5x + 6}$, determinar:

Dominio y raíces; intervalos de continuidad y tipo de discontinuidades; asíntotas verticales y horizontales; dibujar la gráfica.

41. Para la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$, determine:

a. Dominio, raíces y paridad.

b. Clasificación de discontinuidades.

c. Ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.

d. Esbozo gráfico y rango de $f$.

42. Para la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4}$, determinar: dominio y raíces; intervalos de continuidad y tipo de discontinuidades; asíntotas verticales y horizontales; su gráfica.

43. Sea la función $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2}{x^3 - x^2}$. Encontrar el dominio y las raíces; clasificar sus discontinuidades, encontrar sus asíntotas verticales y horizontales; además hacer un bosquejo de la gráfica.

44. Para la función $f(x) = \dfrac{4x^2 - 8x}{x^2 - 4}$, realice lo siguiente:

a. Determine su dominio y raíces.

b. Mencione sus tipos de discontinuidad.

c. Encuentre las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.

d. Haga un esbozo de la gráfica de $f$.

45. Para la curva $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$, obtener: dominio, raíces y paridad; intervalos de continuidad, discontinuidades y su clasificación; asíntotas verticales y horizontales.

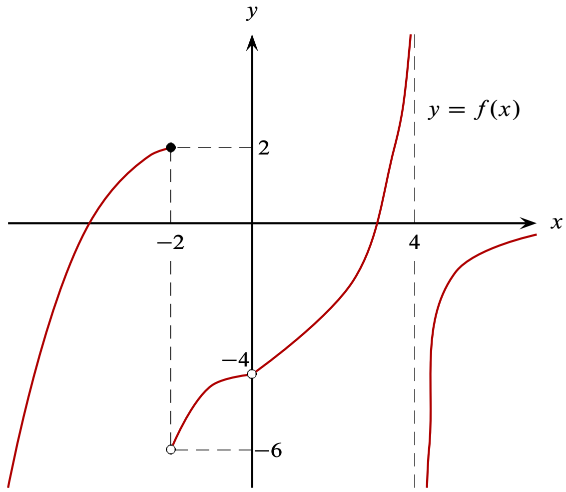
46. Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + 7x + 6}{2x^2 + x - 3}$, obtenga:

Dominio y raíces; intervalos de continuidad y puntos de discontinuidad (clasificados); asíntotas verticales y horizontales.

47. Hallar dónde es continua la función

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2\sqrt{x} + 3x - 2x\sqrt{x} - 3}{x - 1} & \text{si } x \neq 1, x \geq 0; \\ 5 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

48. Si la representación gráfica de una función $f$ es:




a. Hallar su dominio.

b. Encontrar además los siguientes límites:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$;

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$;

iii. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$;

iv. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$;

v. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Para $a = -2$, 0 y 4.

c. Obtener las asíntotas horizontales y verticales, los intervalos de continuidad y la clasificación de las discontinuidades

49. a. Dar una posible gráfica para una función $f$ que sea continua en su dominio $\mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$ y que satisfaga las condiciones:

i. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$;

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;

iii. $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = 1$;

iv. $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = 3$;

v. $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = +\infty$;

vi. $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$;

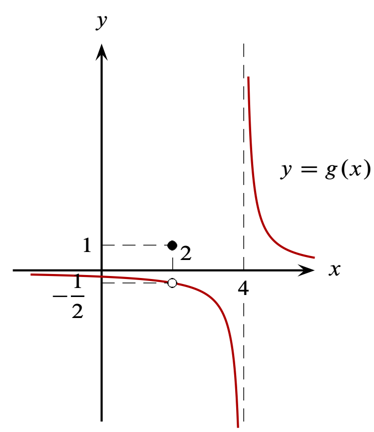
vii. $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 0$;

viii. $\lim\limits_{x\to2} f(x) = 3$;

ix. $f(1) = 0$.

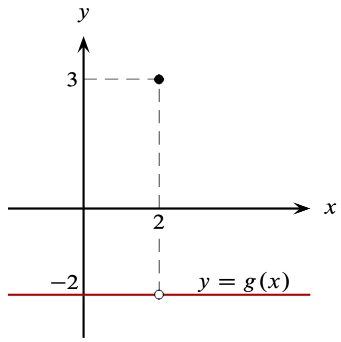
b. Clasifique sus discontinuidades.

**Ejercicios 4.3.1** *Continuidad en intervalos, página* **??**

1. $f(0) = -9 \quad ; f(10) = 561$;
   existe $a \in (0, 10)$, tal que $f(a) = 500$.
2. La ganancia de la fábrica cuando se fabrican $q$ automóviles:
   $G(q) = q^4 - 5q^3 - 13q^2 - 5q - 14$;
   $G(2) = -100 \quad G(10) = 3\,636$;
   existe $q \in [2, 10]$ tal que $G(q) = 0$.
3. Existe al menos un punto $a \in (1, 3)$
   tal que $f(a) = -15$.
4. Existe $h \in (4\,000, 4\,500)$ tal que $T(h) = 98\,°C$.
5. La raíz podría estar en $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$;
   este intervalo tiene longitud $= \frac{1}{4}$.
6. $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$.
7. a. $f(-2) = 6; \quad f(2) = -6$;
   b. no existe tal $c$.
8. Éste es uno de los posibles intervalos: $[1.6, 1.8]$.
9. La función $f$ tiene al menos tres raíces en $(-10, 4)$.
10. $f(2) < 0$ y $f(3) > 0$, existe al menos un $c \in (2, 3)$ tal que $f(c) = 0$;
    en $\left[2, \frac{9}{4}\right]$ de longitud $\frac{1}{4}$ existe al menos una raíz.
11. $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$.
12. $f(0) = -1 < 0; \quad f(2) = \dfrac{32 - 3}{3} > 0$;
    entre 0 y 2 existe una raíz;
    entre $-2$ y 0 hay otra raíz .
13. Entre 0 y 1 existe una raíz de la función.
14. Entre 2 y 17 la función tiene al menos una raíz.
15. Existe una valor $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 0$.
16. $\left(\frac{1}{8}, \frac{3}{16}\right)$.
17. $(0, 1)$.
18. $[-1, 0]$.
19. a. $D_g = \mathbb{R} - \{4\}$. No tiene raíces;
    b. en $x = 2$ $g(x)$ tiene una discontinuidad removible;
       en $x = 4$ $g(x)$ tiene una discontinuidad esencial infinita;
       $g(x)$ es continua en
       $\mathbb{R} - \{2, 4\} = (-\infty, 2) \bigcup (2, 4) \bigcup (4, +\infty)$;
    c. $x = 4$ es una asíntota vertical;
       $y = 0$ es una asíntota horizontal.
    d. 

20. a. $D_g = \mathbb{R}$; $g(x)$ no tiene raíces;
    b. hay una discontinuidad removible en $x = 2$;
       la función es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$;
    c. la función no tiene asíntotas verticales;
       $y = -2$ es asíntota horizontal.

d.




21. a. $f(x)$ no es continua en $x = 1$ ni en $x = -2$;

en $x = 1$ hay una discontinuidad esencial;

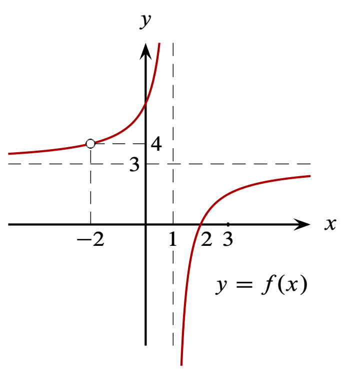
en $x = -2$ hay una discontinuidad removible;

b. $f(x)$ es continua en $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, \infty)$;

c. $y = 3$ es una asíntota horizontal;

$x = 1$ es una asíntota vertical.

d.




22. a. La recta $y = 2$ es asíntota horizontal;

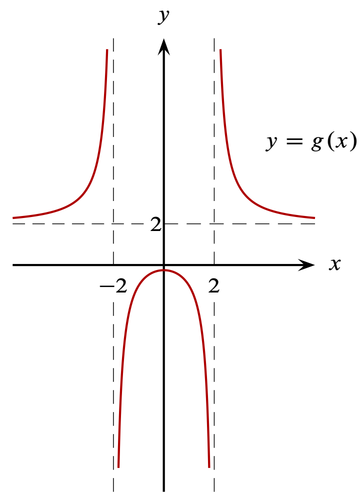
las rectas $x = 2$ & $x = -2$ son asíntotas verticales;

b. $D_g = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$;

no tiene raíces;

$g$ es continua en $(-\infty, -2) \bigcup (-2, 2) \bigcup (2, +\infty)$.

c.




23. a. $D_f = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$;

$f$ tiene sólo una raíz, que es $x = 4$;

b. $f$ es continua en $(-\infty, -2) \bigcup (-2, 1) \bigcup (1, +\infty)$;

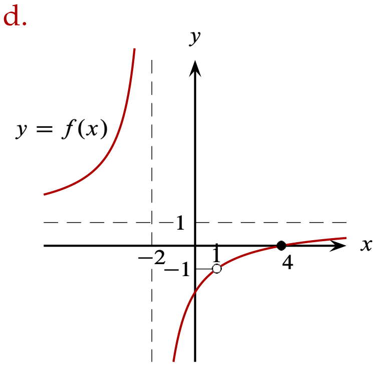
$f$ tiene en $x = 1$ una discontinuidad removible;

$f$ tiene en $x = -2$ una discontinuidad esencial infinita;

c. la recta $x = -2$ es una asíntota vertical;

la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de $f$.

d.




24. La única raíz de $g(x)$ es $x = -4$;

$g(x)$ es continua en $(-\infty, 3) \bigcup (3, 5) \bigcup (5, +\infty)$;

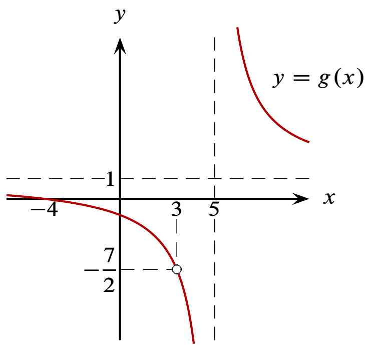
la discontinuidad en $x = 3$ es removible;

en $x = 5$ la discontinuidad es esencial;

$x = 5$ es asíntota vertical;

$y = 1$ es asíntota horizontal;

la gráfica es:




25. a. $D_f = \mathbb{R} - \{-4, -3\}$; raíces: $x = 1$;

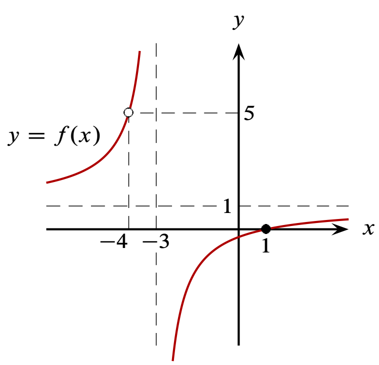
la función es continua en todo su dominio;

existe una discontinuidad removible en $x = -4$ y una discontinuidad esencial (infinita) en $x = -3$;

b. $y = 1$ es una asíntota horizontal;

la ecuación de la asíntota vertical es $x = -3$.

c.



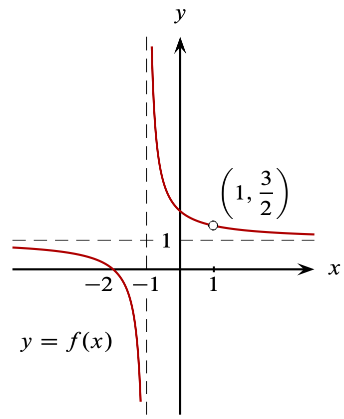

26. a. $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$; $f$ tiene sólo una raíz: $x = -2$;

$f$ es continua en $(-\infty, -1) \bigcup (-1, 1) \bigcup (1, \infty)$;

b. la recta $x = -1$ es la única asíntota vertical;

la recta $y = 1$ es la única asíntota horizontal;

c.




$R_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

27. a. $D_f = \mathbb{R} - \left\{-2, 0, \dfrac{1}{2}\right\}$;

la única raíz de $f$ es $x = -1$;

b. intervalos de continuidad: $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ y $\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$;

la discontinuidad en $x = -2$ es infinita;

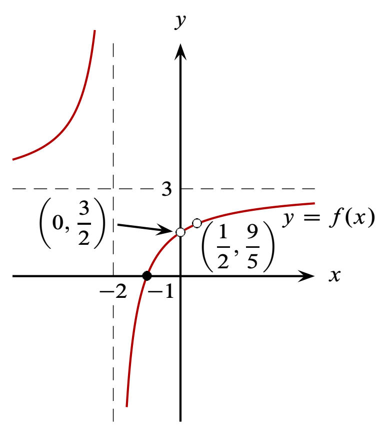
la discontinuidad en $x = 0$ es removible;

la discontinuidad en $x = \dfrac{1}{2}$ también es removible;

c. la única asíntota vertical es la recta $x = -2$;

$y = 3$ es la única asíntota horizontal.

d.




28. a. $D_f = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$;

sólo hay una raíz: $x = -1$;

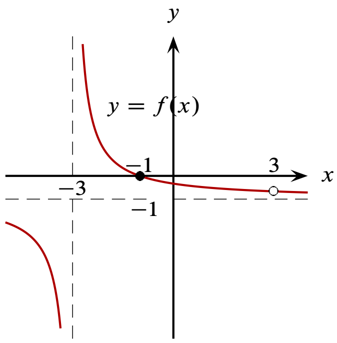
es continua en todo su dominio;

$D_f = (-\infty, -3) \bigcup (-3, 3) \bigcup (3, +\infty)$;

b. $x = -3$ es una asíntota vertical;

$y = -1$ es una asíntota horizontal;

c.




$R_f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

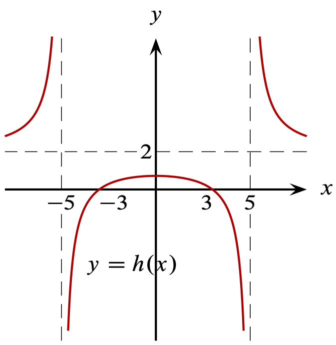
29. a. $D_h = \mathbb{R} - \{-5, 5\}$; raíces: $x = \pm 3$;

$h$ es continua en $(-\infty, -5) \cup (-5, 5) \cup (5, \infty)$;

b. $x = -5$ & $x = 5$ son asíntotas verticales;

la recta $y = 2$ es la única asíntota horizontal.

c.



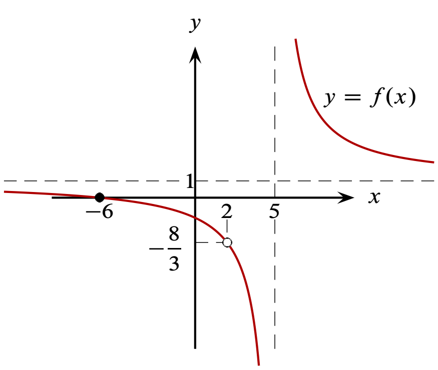

30. a. $D_f = \mathbb{R} - \{5, 2\}$; la raíz es: $x = -6$;

en $x = 2$ hay una discontinuidad removible;

en $x = 5$ hay una discontinuidad esencial infinita;

b. $y = 1$ es una asíntota horizontal;

$x = 5$ es una asíntota vertical.



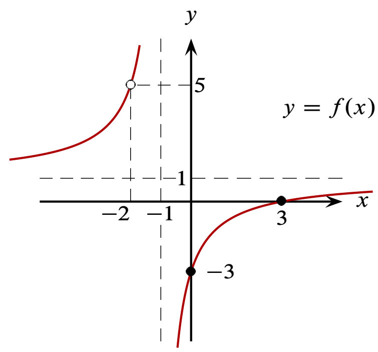

31. a. $D_f = \mathbb{R} - \{-1, -2\}$; raíces: $x = 3$;

en $x = -2$ se tiene una discontinuidad removible;

en $x = -1$ se tiene una discontinuidad esencial infinita;

b. $y = 1$ es una asíntota horizontal;

$x = -1$ es una asíntota vertical.




32. a. $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$;

$x = -3$ es la única raíz de $f(x)$;

$f(x)$ es continua en su dominio:

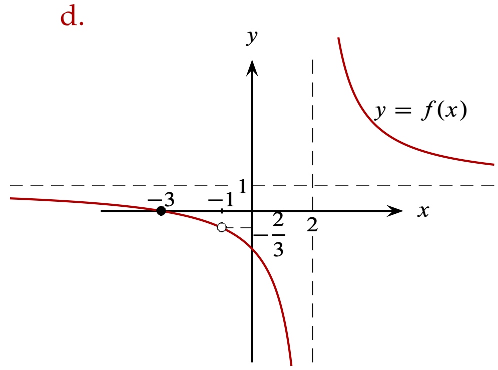
$D_f = (-\infty, -1) \bigcup (-1, 2) \bigcup (2, \infty)$;

b. en $x = 2$ la función tiene una discontinuidad infinita;

c. $x = 2$ es la única asíntota vertical de la función;

$y = 1$ es asíntota horizontal .

d.




33. a. $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$;

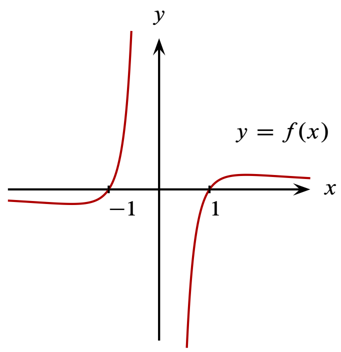
raíces: $x = \pm 1$;   es impar;

b. $x = 0$ es asíntota vertical;

$y = 0$ es asíntota horizontal;

c. en $x = 0$ la discontinuidad es infinita.

d.




El rango de $f$ es $\mathbb{R}$ .

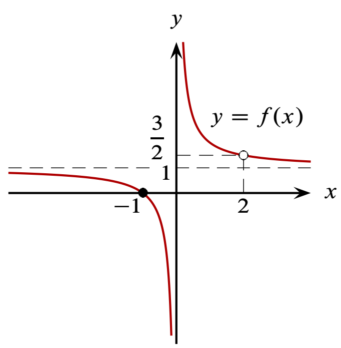
34. a. En $x = 2$ hay una discontinuidad removible;

en $x = 0$ hay una discontinuidad infinita;

b. $x = 0$ es una asíntota vertical;

$y = 1$ es la asíntota horizontal.

c.




35. a. $D_f = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$; la raíz es $x = -\dfrac{3}{2}$;

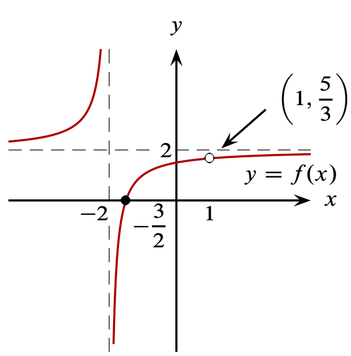
b. en $x = -2$ hay una discontinuidad infinita;

en $x = 1$ la discontinuidad es removible;

c. $x = -2$ es la asíntota vertical;

$y = 2$ es la asíntota horizontal.

d.




36. a. $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$;

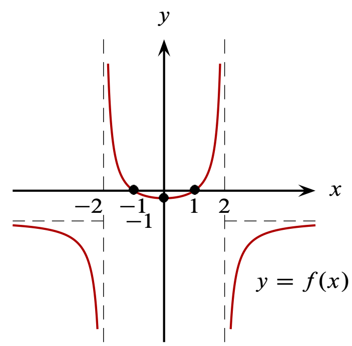
la gráfica interseca al eje $x$ cuando $x = \pm 1$;

b. en $(-\infty, -2) \bigcup (-2, 2) \bigcup (2, +\infty)$ $f(x)$ es continua;

c. $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales;

$y = -1$ es asíntota horizontal .

d.



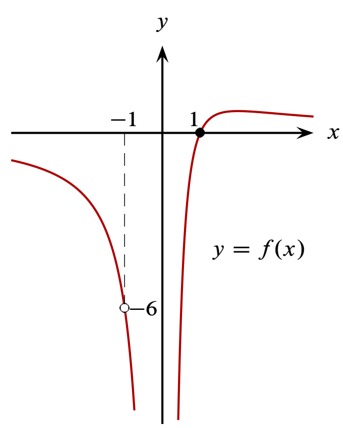

37. $D_f = \mathbb{R} - \{0, -1\}$; la única raíz de $f$ es $x = 1$;

$f$ es continua en su dominio;

en $x = 0$ la discontinuidad es infinita y en $x = -1$ es removible;

$x = 0$ es una asíntota vertical;

$y = 0$ es asíntota horizontal .




38. a. $D_f = \mathbb{R} - \{-3, -1\}$;

$f$ tiene una raíz: $x = 2$;

b. $f$ es continua en

$(-\infty, -3)$ , $(-3, -1)$ y en $(-1, +\infty)$;

$f$ tiene discontinuidades en $x = -3$ y en $x = -1$;

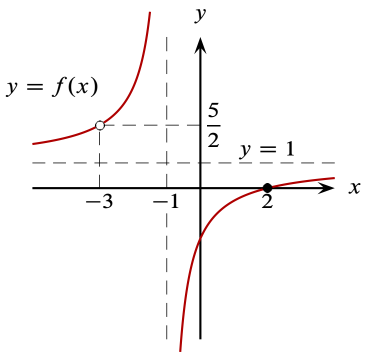
$f$ tiene en $x = -3$ una discontinuidad removible;

$f$ tiene en $x = -1$ una discontinuidad esencial;

c. $x = -1$ es una asíntota vertical y es la única;

$y = 1$ es la única asíntota horizontal de $f$ .

d.




El rango es $R_f = \mathbb{R} - \left\{1, \frac{5}{2}\right\}$.

39. a. $D_f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$; la raíz de $f$ es $x = 1$;

b. $f$ tiene discontinuidades en $x = -2$ y en $x = 2$;

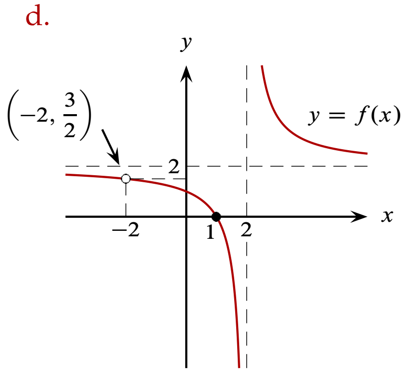
en $x = -2$ $f$ tiene una discontinuidad removible;

$f$ tiene en $x = 2$ una discontinuidad esencial infinita;

c. $x = 2$ es una asíntota vertical;

$y = 2$ es una asíntota horizontal.

d.




40. $D_f = \mathbb{R} - \{-3, -2\}$; $f$ tiene sólo una raíz: $x = 0$;

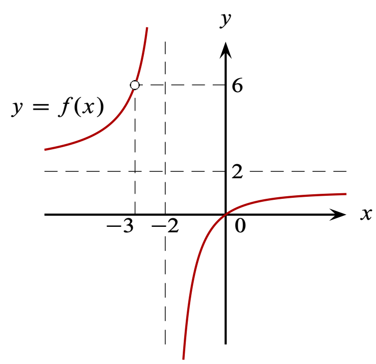
$f$ es continua en $(-\infty, -3) \bigcup (-3, -2) \bigcup (-2, +\infty)$;

la discontinuidad en $x = -3$ es removible;

la discontinuidad en $x = -2$ es esencial infinita;

$x = -2$ es una asíntota vertical;

$y = 2$ es una asíntota horizontal.




41. a. $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$; raíz $x = -1$; $f$ no es par ni impar;

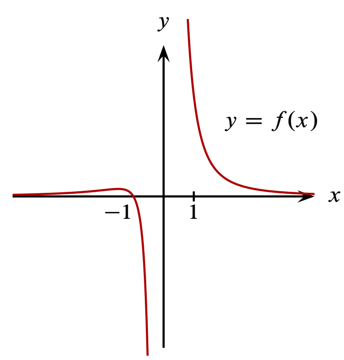
b. $f$ es continua en $(-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty)$;

$f$ tiene una discontinuidad en $x = 0$, esencial;

c. $x = 0$ es una asíntota vertical;

$y = 0$ es una asíntota horizontal;

d. El rango de $f$ es $\mathbb{R}$.




42. $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$;

la única raíz de $f$ es $x = -4$;

la función es continua en

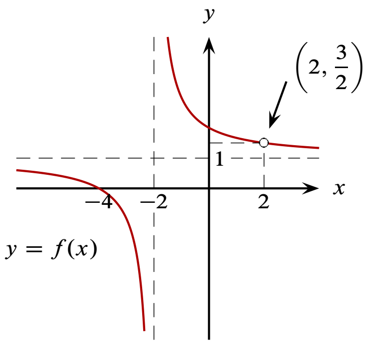
$(-\infty, -2) \bigcup (-2, 2) \bigcup (2, +\infty)$;

la discontinuidad en $x = -2$ es esencial;

la recta $x = -2$ es una asíntota vertical;

la discontinuidad en $x = 2$ es removible;

la recta $y = 1$ es asíntota horizontal .




43. $D_f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$; $x = -3$ es raíz;

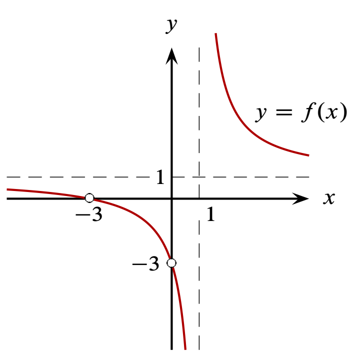
$f$ es discontinua en $x = 0$ y en $x = 1$;

$f$ tiene en $x = 0$ una discontinuidad removible;

$f$ tiene en $x = 1$ una discontinuidad esencial infinita;

$x = 1$ es una asíntota vertical;

$y = 1$ es una asíntota horizontal.




44. a. $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$; la única raíz es $x = 0$;

b. la función es discontinua en $x = 2$ y en $x = -2$;

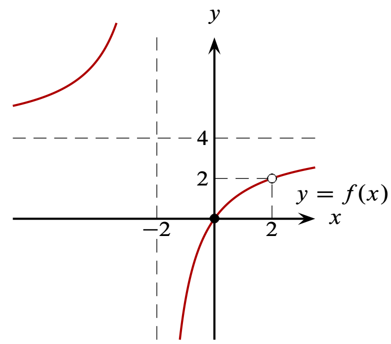
en $x = 2$ existe una discontinuidad removible;

la discontinuidad en $x = -2$ es esencial infinita;

c. $x = -2$ es una asíntota vertical;

$y = 4$ es una asíntota horizontal.

d.




45. $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$; raíz: $x = 0$;

$f$ es una función par;

$f$ es continua en $(-\infty, -1) \bigcup (-1, 1) \bigcup (1, +\infty)$;

$f$ tiene dos discontinuidades, $x = -1$ & $x = 1$. Son esenciales;

$x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales;

$y = 2$ es una asíntota horizontal.

46. $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}, 1\right\}$;

la función es continua en su dominio;

$D_f = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \bigcup \left(-\frac{3}{2}, 1\right) \bigcup (1, +\infty)$;

es discontinua en $x = -\frac{3}{2}$ y en $x = 1$;

en $x = -\frac{3}{2}$ la discontinuidad es removible;

la discontinuidad en $x = 1$ es esencial infinita;

$x = 1$ es asíntota vertical;

$y = 1$ es asíntota horizontal.

47. $h(x)$ es continua en todo su dominio: $[0, +\infty)$ .

48. a. $D_f = \mathbb{R} - \{0, 4\}$;

b. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$;
$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -6$;
$\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ no existe;
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -4$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -4$;
$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -4$;
$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$;
$\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ no existe;

c. $y = 0$ es la única asíntota horizontal;

$x = 4$ es la única asíntota vertical;

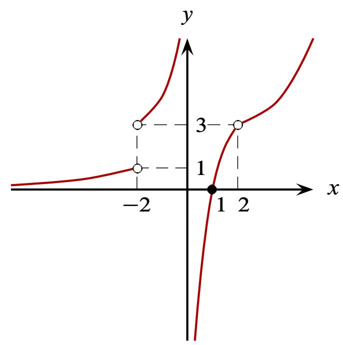
la función $f(x)$ es continua en $(-\infty, -2]$, $(-2, 0)$, $(0, 4)$ y en $(4, +\infty)$;

en $x = -2$ hay una discontinuidad (esencial) de salto;

en $x = 0$ la discontinuidad es removible;

y en $x = 4$ la discontinuidad también es esencial infinita.

49.




en $x = -2$ hay una discontinuidad esencial de salto;

en $x = 0$ hay una discontinuidad esencial infinita;

en $x = 2$ hay una discontinuidad removible.