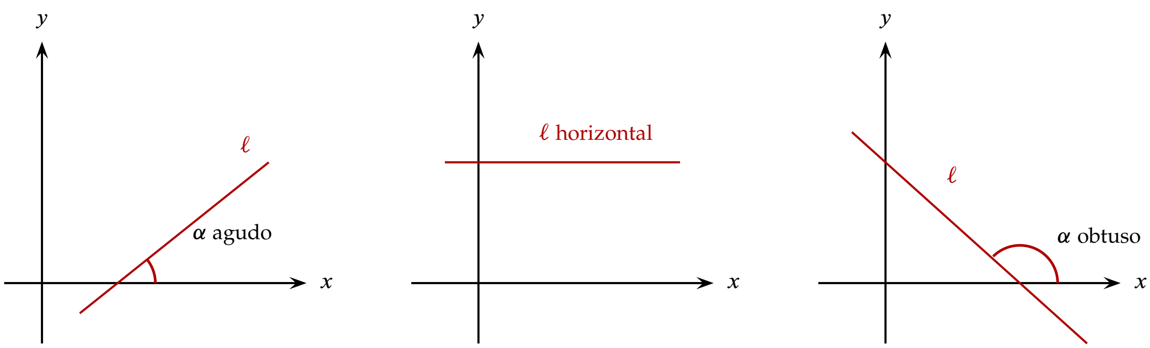
CAPÍTULO

8 Aplicaciones de la derivada

[1]

8.1 Derivabilidad y monotonía

Como se sabe, si f es una función derivable en x_0, entonces la derivada de f en x_0 es un número real fijo $f'(x_0)$, el cual puede ser $f'(x_0) > 0$ o bien $f'(x_0) < 0$, o bien $f'(x_0) = 0$.
Sabemos también que si f es una función derivable en x_0, entonces existe una única recta tangente t a la curva $y = f(x)$ en el punto $P[x_0, f(x_0)]$, la cual tiene pendiente $m_t = f'(x_0)$.
Recordemos ahora que, si l es una recta con ángulo de inclinación α y pendiente m, entonces $m = \tan\alpha$, lo cual se presenta en las siguientes gráficas:



$m > 0 \Leftrightarrow 0 < \alpha < 90^\circ$ $\quad$ $m = 0$ si $\alpha = 0^\circ$ o bien $\alpha = 180^\circ$ $\quad$ $m < 0 \Leftrightarrow 90^\circ < \alpha < 180^\circ$

Considerando los comentarios anteriores, podemos hacer algunas afirmaciones que relacionan el signo de la derivada $f'(x_0)$ con el ángulo de inclinación α_t de la recta tangente t y con el comportamiento de las imágenes $f(x)$ alrededor del punto de tangencia $P[x_0, f(x_0)]$.

- $f'(x_0) > 0 \Rightarrow m_t > 0 \Rightarrow 0^\circ < \alpha_t < 90^\circ$ (α_t es agudo.)

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

Además si $f'(x_0) > 0$, entonces

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

por lo cual

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) > 0 \; \& \; \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) > 0\,.$$

Ahora bien,

1. Si $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$, entonces existe $x_1 \in \mathbb{R}$, con $x_1 < x_0$ tal que para cada $x \in [x_1, x_0)$ ocurre que $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$;
   pero $x_1 \leq x < x_0 \;\Rightarrow\; x < x_0 \;\Rightarrow\; x - x_0 < 0$, por lo que
   $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \;\Leftrightarrow\; f(x) - f(x_0) < 0 \;\Leftrightarrow\; f(x) < f(x_0)\,.$$
   Con lo cual, para x suficientemente cerca de x_0
   $$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \;\Rightarrow\; x < x_0 \;\&\; f(x) < f(x_0)\,.$$

2. Si $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$, entonces existe $x_2 \in \mathbb{R}$, con $x_0 < x_2$ tal que para cada $x \in (x_0, x_2]$ ocurre que $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$;
   pero $x_0 < x \leq x_2 \;\Rightarrow\; x > x_0 \;\Rightarrow\; x - x_0 > 0$, por lo que
   $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \;\Leftrightarrow\; f(x) - f(x_0) > 0 \;\Leftrightarrow\; f(x) > f(x_0)\,.$$
   Entonces, para x suficientemente cerca de x_0
   $$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \;\Rightarrow\; x > x_0 \;\&\; f(x) > f(x_0)\,.$$

Resumiendo, si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) > 0$, entonces existen x_1 & x_2 con $x_1 < x_0 < x_2$ tales que $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

- Así también $f'(x_0) < 0 \;\Rightarrow\; m_t < 0 \;\Rightarrow\; 90° < \alpha_t < 180°$ (α_t es obtuso.)

Si $f'(x_0) < 0$, entonces

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0\,,$$

por lo que

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) < 0 \;\&\; \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) < 0\,.$$

Ahora bien,

1. Si $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$, entonces existe $x_1 \in \mathbb{R}$, con $x_1 < x_0$ tal que para cada $x \in [x_1, x_0)$ ocurre que $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$,
   pero $x_1 \leq x < x_0 \;\Rightarrow\; x < x_0 \;\Rightarrow\; x - x_0 < 0$, por lo que
   $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \;\Leftrightarrow\; f(x) - f(x_0) > 0 \;\Leftrightarrow\; f(x) > f(x_0)\,.$$
   Obtenemos que, para x suficientemente cerca de x_0
   $$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \;\Rightarrow\; x < x_0 \;\&\; f(x) > f(x_0)\,.$$

2. Si $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$, entonces existe $x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_0 < x_2$, tal que para cada $x \in (x_0, x_2]$ ocurre que $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$,
   pero $x_0 < x \leq x_2 \;\Rightarrow\; x > x_0 \;\Rightarrow\; x - x_0 > 0$, por lo que
   $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \;\Leftrightarrow\; f(x) - f(x_0) < 0 \;\Leftrightarrow\; f(x) < f(x_0)\,.$$
   Entonces, para x suficientemente cerca de x_0
   $$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \;\Rightarrow\; x > x_0 \;\&\; f(x) < f(x_0)\,.$$

Resumiendo, si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) < 0$, entonces existen x_1 & x_2 con $x_1 < x_0 < x_2$ tales que $f(x_1) > f(x_0) > f(x_2)$.

De lo anterior se puede afirmar lo siguiente:

Teorema. Sea una función derivable en el número x_0. Si $f'(x_0) \neq 0$, entonces existen números x_1 & x_2 alrededor de x_0 y suficientemente cerca de x_0 tales que:

- Si $f'(x_0) > 0$, entonces $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

- Si $f'(x_0) < 0$, entonces $f(x_1) > f(x_0) > f(x_2)$.

Utilizamos este resultado para demostrar el siguiente teorema:

Teorema de Rolle. Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el abierto (a, b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

▼ Si $f(x) = f(a) = f(b)$ para cada $x \in [a, b]$, entonces f es una función constante en todo $[a, b]$, por lo cual $f'(x) = 0$ para cada $x \in [a, b]$, en cuyo caso c es cualquier $x \in (a, b)$.

Si f no es una función constante en $[a, b]$, entonces por ser continua f alcanza en $[a, b]$ sus valores mínimo $m = f(c)$ y máximo $M = f(d)$, donde al menos uno de ellos es diferente de $f(a) = f(b)$.

Aquí se entiende que $f(c) = m \le f(x) \le M = f(d)$ para $x \in [a, b]$.

Suponiendo que el mínimo $m = f(c)$ es dicho número, entonces $c \in (a, b)$. Por ser f derivable en (a, b), se puede asegurar la existencia del número $f'(c)$.

Demostraremos que $f'(c) = 0$ por reducción al absurdo:

Si $f'(c) \ne 0$, se podría asegurar por el teorema anterior la existencia de números x_1 & x_2 cerca de c tales que:

- Si $f'(c) > 0$, entonces $f(x_1) < f(c) < f(x_2)$.

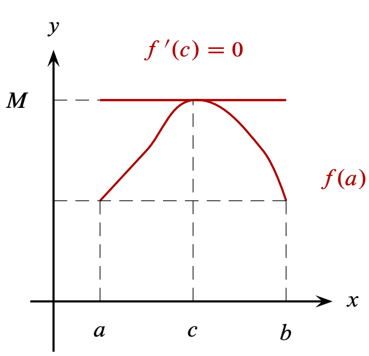
- Si $f'(c) < 0$, entonces $f(x_1) > f(c) > f(x_2)$.

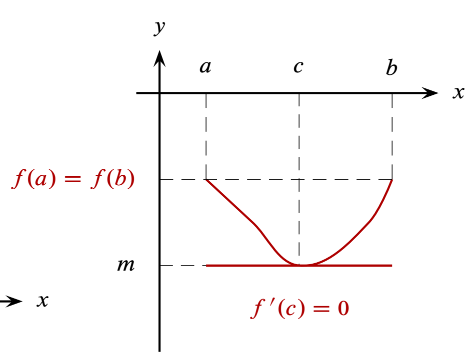
Por lo cual $f(c) = m$ no sería el mínimo de f en $[a, b]$.

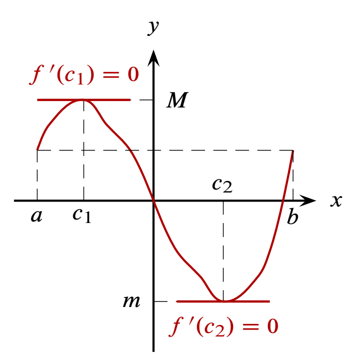
Entonces $f'(c) \ne 0$ no puede ser.
Lo que asegura la existencia de al menos un número $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

□

Geométricamente, el teorema de Rolle puede ser ilustrado de la manera siguiente:

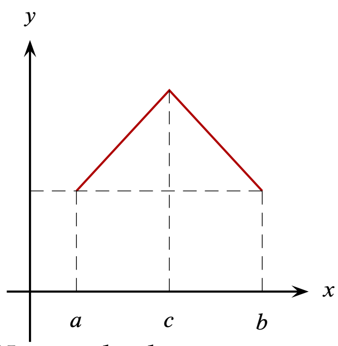


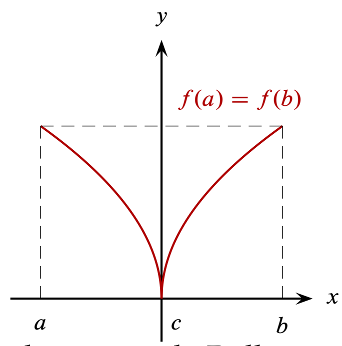


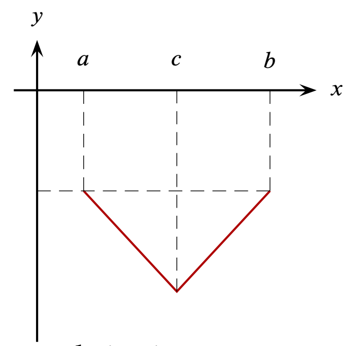


Por lo tanto el teorema de Rolle asegura la existencia de al menos un punto $P[c, f(c)]$ en la curva $y = f(x)$ donde la recta tangente es horizontal $[\, f'(c) = 0\,]$.
Es importante resaltar que la derivabilidad de la función f en todo el intervalo (a, b) es determinante para la existencia de dicha recta tangente horizontal.

Basta con que f no sea derivable en algún punto del intervalo (a, b) para que pueda ocurrir una situación como las siguientes, en donde no se cumple el teorema de Rolle.





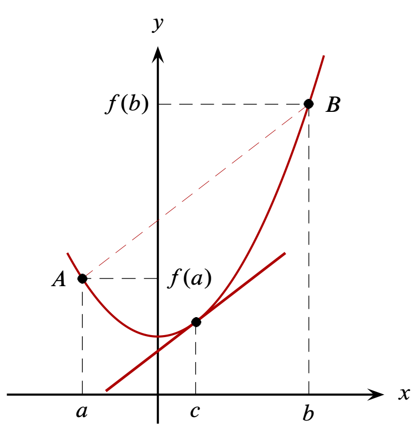


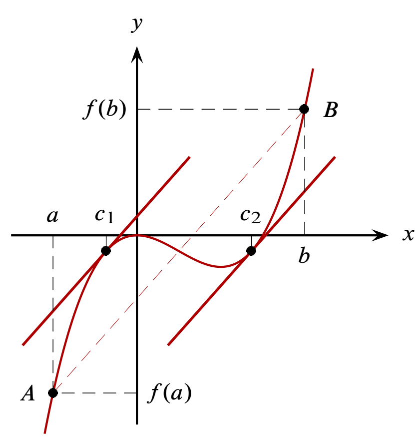
Un resultado más general que el teorema de Rolle está dado en el siguiente teorema:

Teorema del Valor Medio. Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces existe al menos un número $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ o bien } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)\,.$$

Geométricamente este teorema asegura la existencia de al menos un punto $P[c, f(c)]$ de la curva $y = f(x)$, donde su recta tangente tiene pendiente $f'(c)$ igual a la pendiente $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ de la recta secante a la curva que pasa por los puntos $A[a, f(a)]$ y $B[b, f(b)]$.





▼ La ecuación de la recta secante $y = g(x)$ que pasa por los puntos $A[a, f(a)]$ y $B[b, f(b)]$ es

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

o sea,

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

por lo que

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\,.$$

Sea ϕ la función definida como la diferencia $f-g$. Es decir,

$$\phi(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\,.$$

Por ser f & g funciones continuas, también la función ϕ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$. Por ser f & g funciones derivables, también la función ϕ es derivable en el intervalo abierto (a,b):

$$\phi'(x) = f'(x) - g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,.$$

Por otra parte $\phi(a) = \phi(b)$, ya que

$$\phi(a) = f(a) - g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = 0\,;$$
$$\phi(b) = f(b) - g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = 0\,.$$

Hallamos que ϕ es una función que cumple con las condiciones del teorema de Rolle. Por lo tanto se asegura la existencia de al menos un número c tal que $\phi'(c) = 0$. Pero:

$$\phi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

por lo que:

$$\phi'(c) = 0 \;\Leftrightarrow\; f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \;\Leftrightarrow\; f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,.$$

Lo cual demuestra el teorema del Valor Medio.

□

Aplicamos a continuación este último teorema para el estudio de la monotonía de una función derivable en un intervalo.

- Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el abierto (a,b), y sean x_1, x_2 en $[a,b]$ tales que $a \le x_1 < x_2 \le b$.

  ◊ Si $f'(x) > 0$ para cada $x \in (a,b)$, entonces (por el teorema del Valor Medio) para algún $c \in (x_1, x_2)$:

  $$f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0\,.$$

  Pero $x_2 > x_1 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$, por lo cual

  $$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0 \;\Leftrightarrow\; f(x_2)-f(x_1) > 0 \;\Leftrightarrow\; f(x_2) > f(x_1)\,.$$

  Entonces

  $$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)\,.$$

  Lo que implica que f es una función estrictamente creciente en el intervalo $[a,b]$.

◇ Si $f'(x) < 0$, para cada $x \in (a,b)$ entonces (por el teorema del Valor Medio) para algún $c \in (x_1, x_2)$:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0\,.$$

Pero $x_2 > x_1 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$, por lo cual

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0 \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)\,.$$

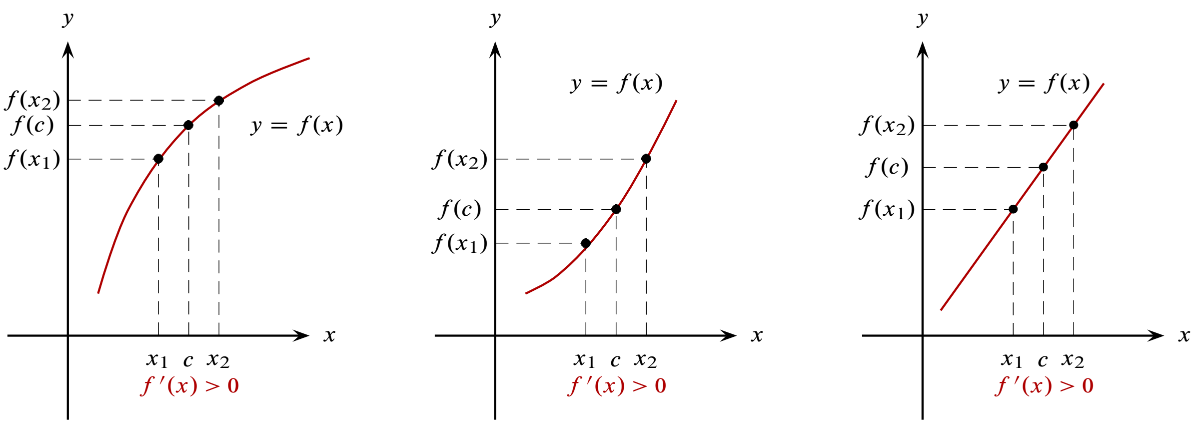
Entonces

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)\,.$$

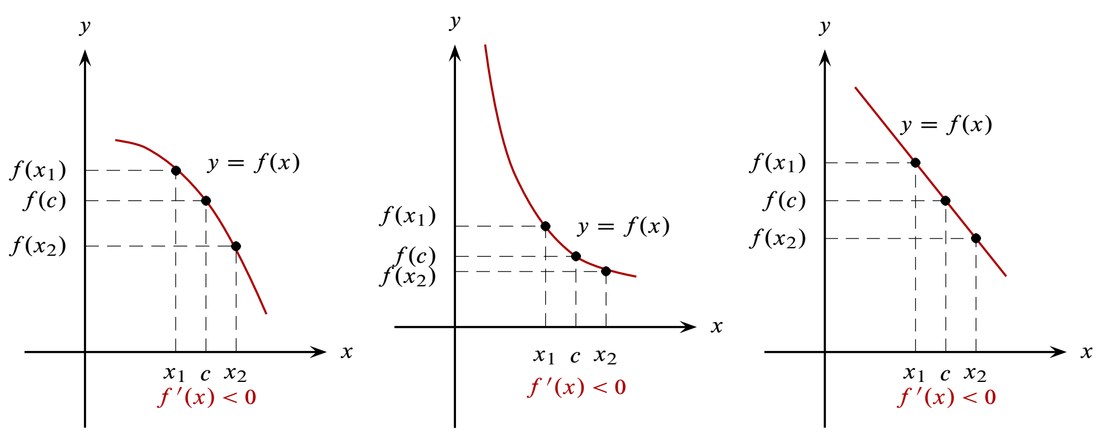
Lo que implica que f es una función estrictamente decreciente en el intervalo $[a,b]$.

Lo anterior, según el caso, puede ilustrarse como sigue:

- Si $f'(x) > 0$, entonces la función f es estrictamente creciente.



- Si $f'(x) < 0$, entonces la función f es estrictamente decreciente.



De aquí que:

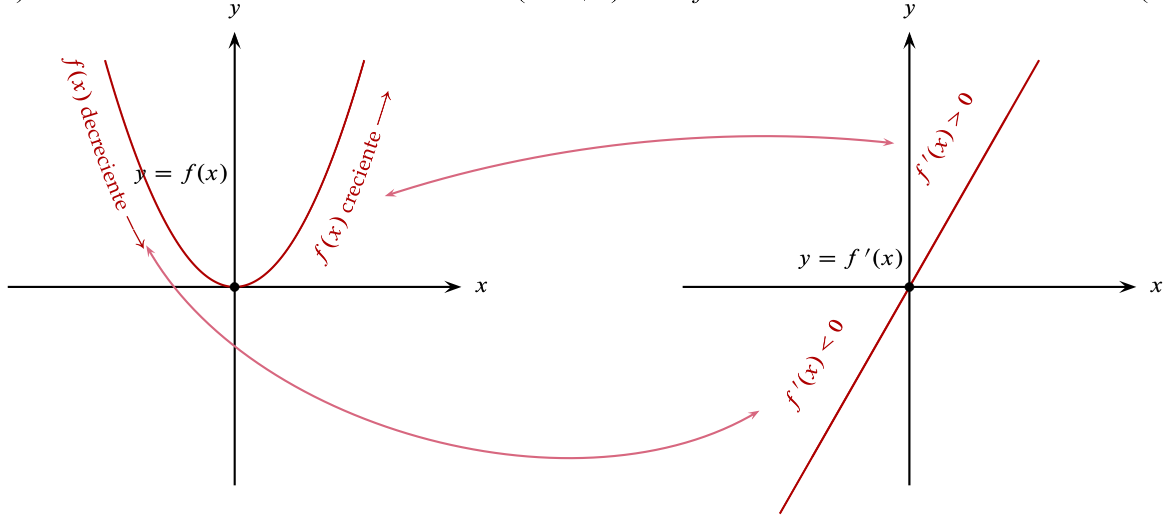
- Si f está definida en un intervalo y f' es continua con un número finito de raíces entonces f es monótona por partes.

Las funciones polinomiales y las racionales son monótonas por partes.

Ejemplo 8.1.1 *Sea la función* $f(x) = x^2$.

▼ Calculamos la derivada, $f'(x) = 2x$, entonces:

- $f'(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; 2x > 0 \;\Leftrightarrow\; x > 0 \;\Leftrightarrow\; x \in (0, +\infty) \;\Rightarrow\; f$ es creciente en el intervalo $(0, +\infty)$.
- $f'(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; 2x < 0 \;\Leftrightarrow\; x < 0 \;\Leftrightarrow\; x \in (-\infty, 0) \;\Rightarrow\; f$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$.

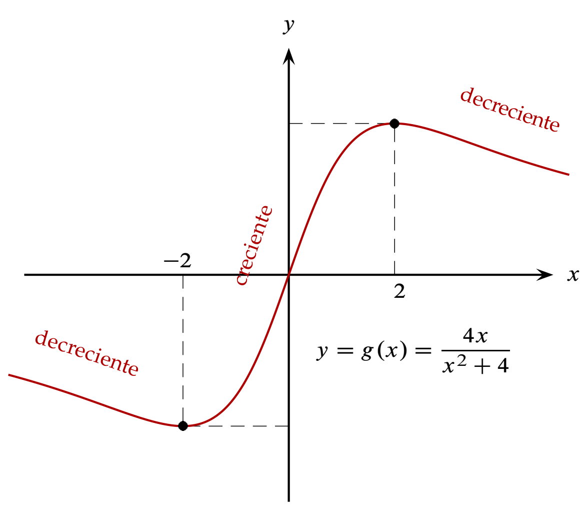


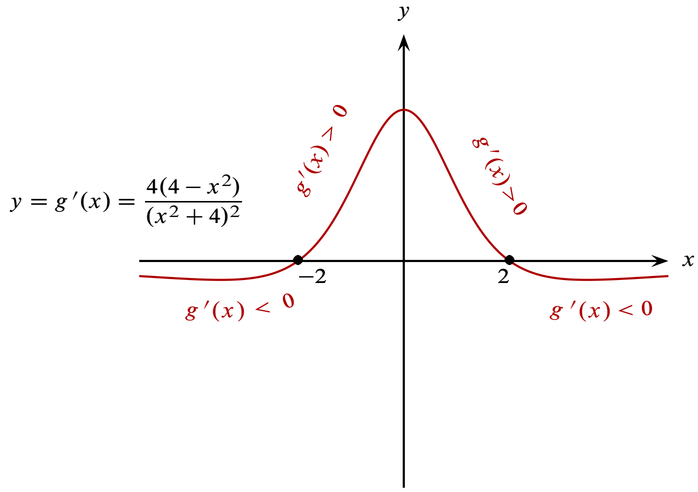
□

Ejemplo 8.1.2 *Dada la función* $g(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$.

▼ Tenemos que

$$g'(x) = \frac{(x^2+4)4 - 4x(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{4x^2+16-8x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{16-4x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{4(4-x^2)}{(x^2+4)^2}\,.$$





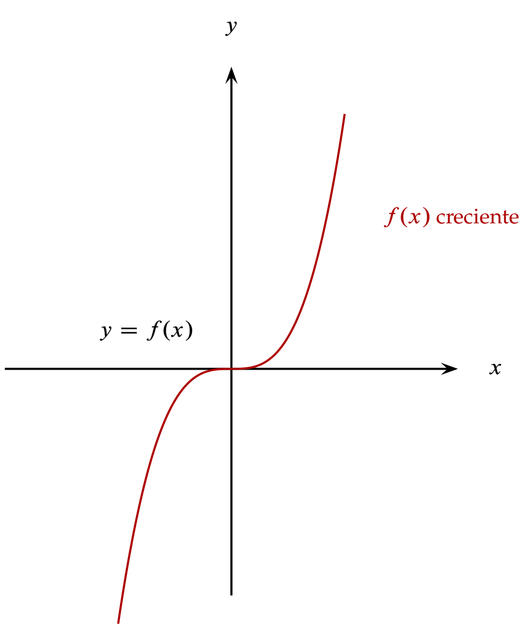
Puesto que $4 > 0$ y que $(x^2 + 4) > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$, se puede afirmar lo siguiente:

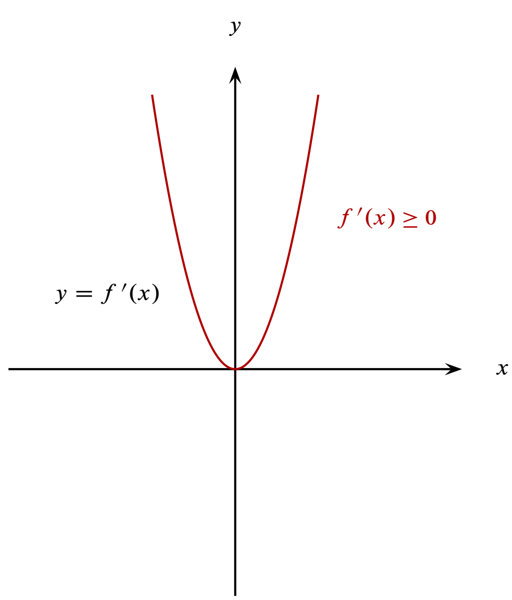
1. $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2 \Leftrightarrow g$ es creciente en el intervalo $(-2, 2)$.
2. $g'(x) < 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow |x| > 2 \Leftrightarrow x < -2$ o bien $x > 2 \Leftrightarrow g$ es decreciente en $(-\infty, -2)$ y en $(2, +\infty)$. Lo cual concuerda con que $g'(x)$ es par.

□

Ejemplo 8.1.3 *Sea* $\phi(x) = x^3$.

▼ Puesto que $\phi' = 3x^2 \Rightarrow \phi' > 0$ para cada $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces ϕ es una función creciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, +\infty)$ pero de hecho como $x^3 < 0$ si $x < 0$, $x^3 = 0$ si $x = 0$ & $x^3 > 0$ si $x > 0$, entonces $f(x) = x^3$ es creciente en $\mathbb{R}$.





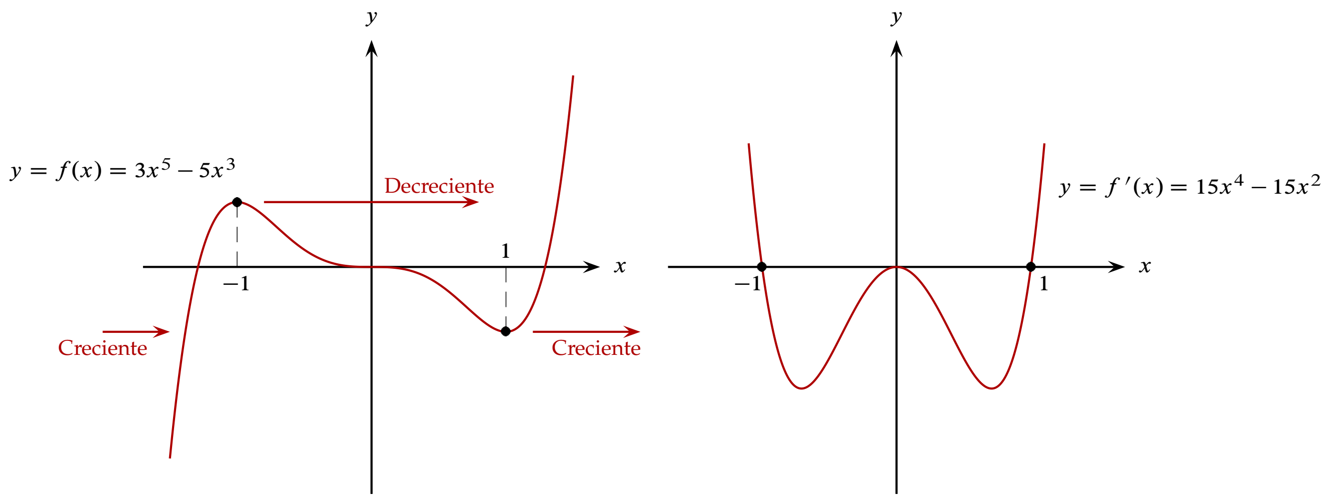
□

Ejemplo 8.1.4 *Sea la función* $f(x) = 3x^5 - 5x^3$.

▼ Calculamos la derivada, $f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1)$, entonces:

1. $f'(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; x \neq 0 \;\&\; x^2 - 1 > 0 \;\Leftrightarrow\; x \neq 0 \;\&\; x^2 > 1 \;\Leftrightarrow\; x \neq 0 \;\&\; |\,x\,| > 1 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; x \neq 0 \;\&\; x > 1$ o bien $x < -1 \;\Rightarrow\; f$ es creciente en $(-\infty, -1) \bigcup (1, \infty)$.

2. $f'(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; x \neq 0 \;\&\; x^2 - 1 < 0 \;\Leftrightarrow\; x \neq 0 \;\&\; x^2 < 1 \;\Leftrightarrow\; x \neq 0 \;\&\; |\,x\,| < 1 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; x \neq 0 \;\&\; -1 < x < 1 \;\Rightarrow\; f$ es decreciente en $[-1, 1]$.



□

Ejercicios 8.1.1 *Soluciones en la página 11*

Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las siguientes funciones.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
2. $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.
3. $h(x) = -2x^3 + 6x - 1$.
4. $f(x) = x^4 - 4x^3$.
5. $g(x) = (x^2 - 1)^2$.
6. $h(x) = x^2 + \dfrac{16}{x}$.
7. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$.
8. $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$.
9. $h(x) = \sqrt[3]{x^4} - 4\sqrt[3]{x}$.
10. $f(x) = x^3 + \dfrac{48}{x}$.

Ejercicios 8.1.1 *Derivabilidad y monotonía, página 10*

1. a. f es creciente en $(2, +\infty)$;
   b. f es decreciente en $(-\infty, 2)$.
2. a. g es creciente en $(-\infty, 1)$ y en $(3, +\infty)$;
   b. g es decreciente en $(1, 3)$.
3. a. h es creciente en $(-1, 1)$;
   b. h es decreciente en $(-\infty, -1)$ y en $(1, +\infty)$.
4. a. f es creciente en $(3, +\infty)$;
   b. f es decreciente en $(-\infty, 3)$.
5. a. g es creciente en $(-1, 0)$ y en $(1, +\infty)$;
   b. g es decreciente en $(-\infty, -1)$ y en $(0, 1)$.
6. a. h es creciente en $(2, +\infty)$;
   b. h es decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, 2)$.
7. a. f es creciente en $(-\infty - 2)$ y en $(-2, 0)$;
   b. f es decreciente en $(0, 2)$ y en $(2, +\infty)$.
8. a. g es creciente en $(-3, 0)$;
   b. g es decreciente en $(0, 3)$.
9. a. h es creciente en $(1, +\infty)$;
   b. h es decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, 1)$.
10. a. f es creciente en $(-\infty, -2)$ y en $(2, +\infty)$;
    b. f es decreciente en $(-2, 0)$ y en $(0, 2)$.