CAPÍTULO

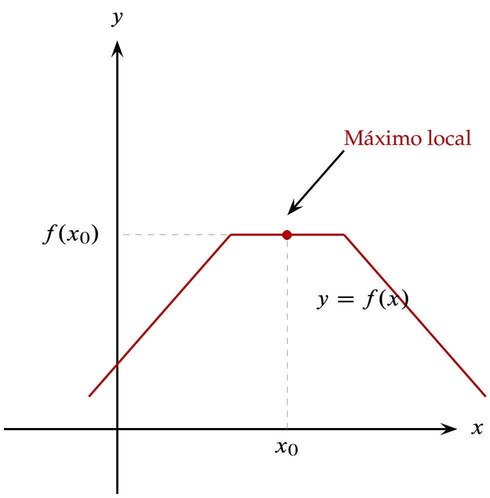
8

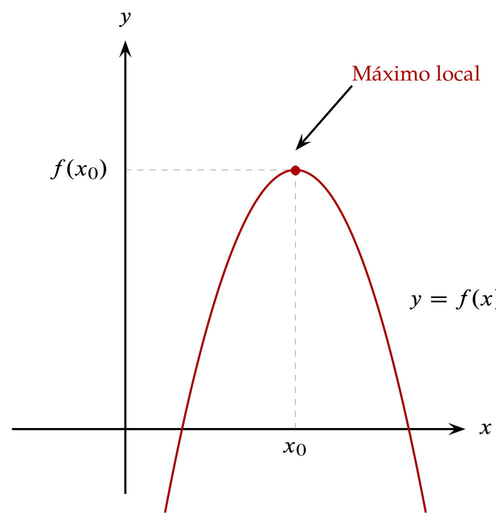
Aplicaciones de la derivada

[1]

8.2 Máximos y mínimos locales

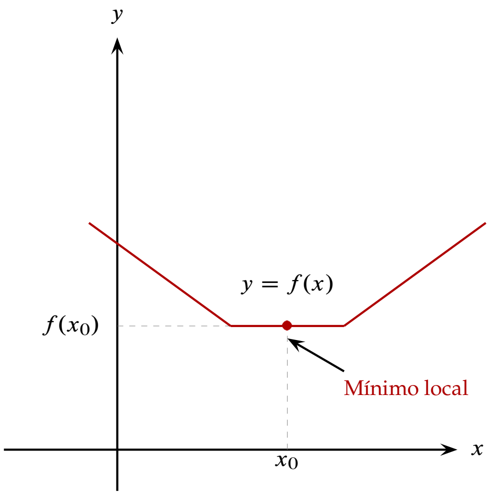
- Si $f(x_0) \geq f(x)$ para cada x cerca de x_0, es decir, en un intervalo abierto que contenga a x_0, diremos que f alcanza un máximo local o un máximo relativo en x_0.

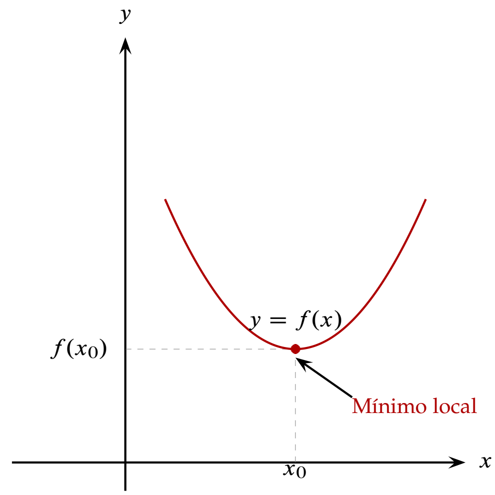




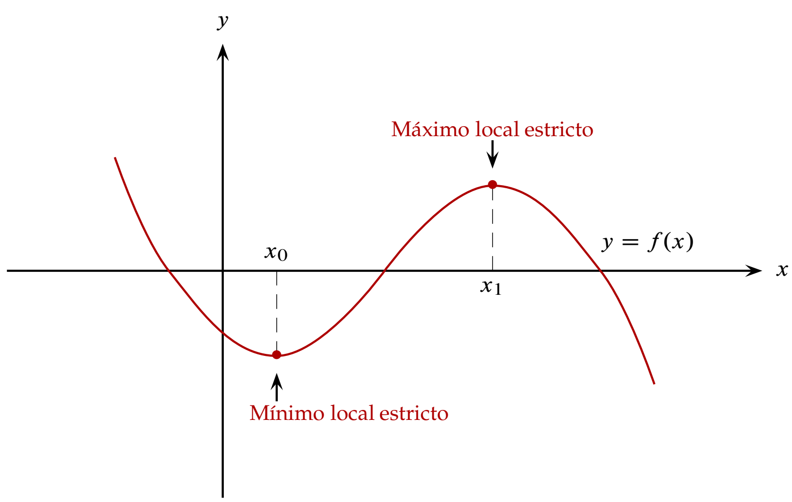
- Si $f(x_0) \leq f(x)$ para cada x cerca de x_0, es decir, en un intervalo abierto que contenga a x_0, diremos que f alcanza un mínimo local o un mínimo relativo en x_0.

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008





- Si $f(x_0) > f(x)$ para cada x cerca de x_0, entonces el máximo local es estricto.
- Si $f(x_0) < f(x)$ para cada x cerca de x_0, entonces el mínimo local es estricto.
- A un máximo y a un mínimo local se les llaman valores extremos.



Si f es continua en un intervalo que contiene a x_0 y si f' cambia de signo en x_0, es decir, si en un intervalo de la forma (x_1, x_0) f' tiene un signo y en (x_0, x_2) el otro, entonces en x_0 hay un valor extremo, de hecho:

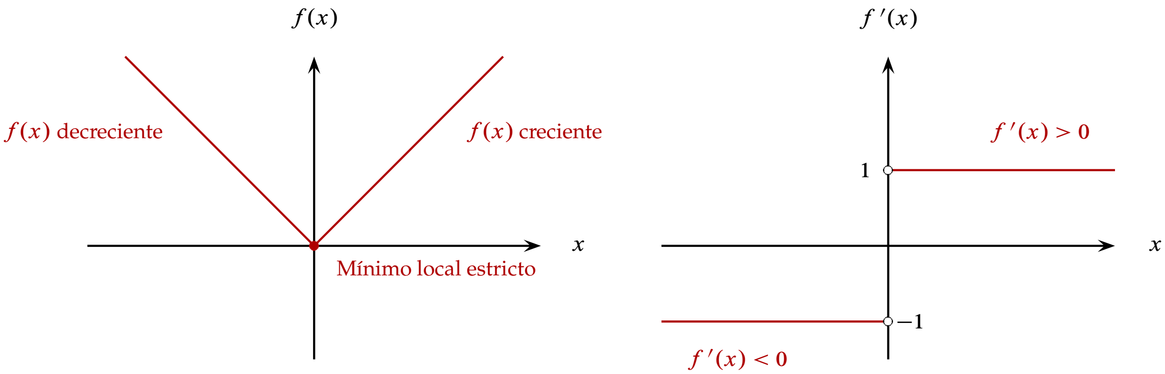
- Si f' pasa de positiva a negativa, hay un máximo local estricto. Es claro pues la función pasa de ser creciente a ser decreciente.
- Si f' pasa de negativa a positiva, hay un mínimo local estricto. Es claro pues la función pasa de ser decreciente a ser creciente.

Si no cambia de signo la derivada, entonces la función no tiene valor extremo.

Ejemplo 8.2.1 *La función* $f(x) = |x|$ *es continua en* $\mathbb{R}$*, pero no derivable en* $x = 0$.

▼ También

$$f(x) = |\,x\,| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{0 es un mínimo estricto.}$$



□

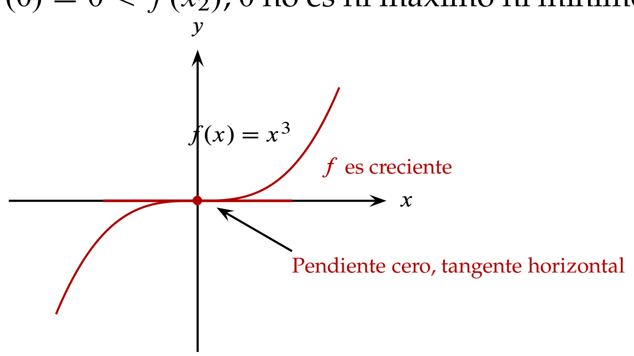
Por otro lado, es claro que (véase el teorema de Rolle):

- Si f tiene un valor extremo en x_0 y es derivable en x_0 entonces $f'(x_0) = 0$.

El recíproco no es verdadero; veamos un contraejemplo: una función f derivable en x_0 con $f'(x_0) = 0$, pero tal que f no tiene un valor extremo en x_0.

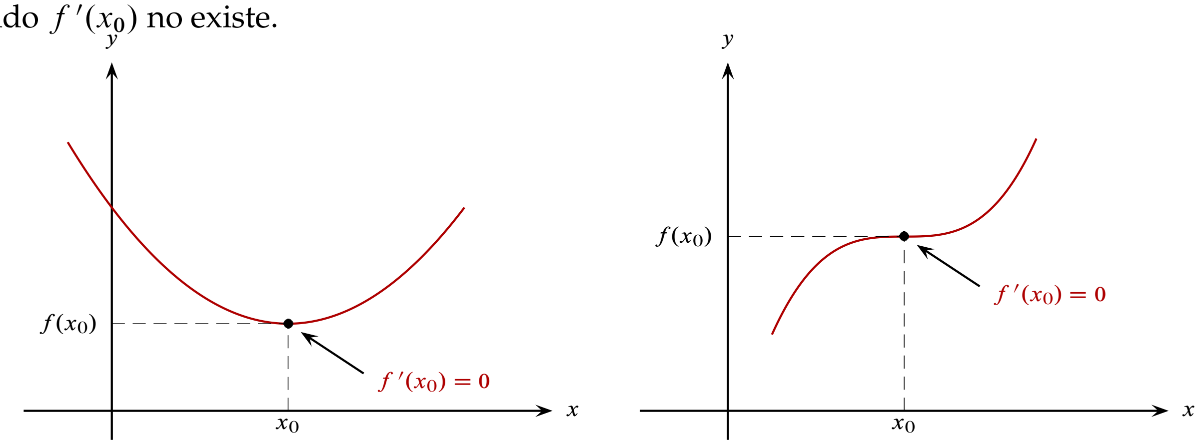
Ejemplo 8.2.2 *Sea* $f(x) = x^3$.

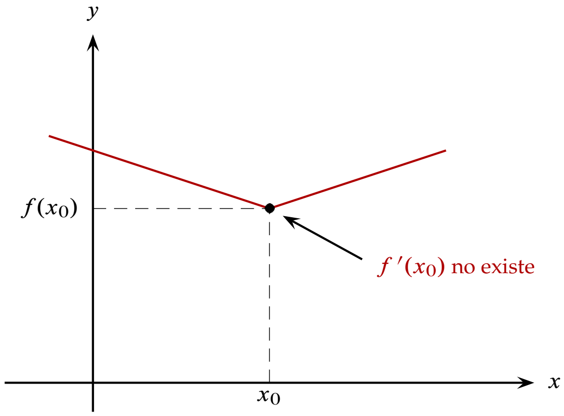
▼ La derivada de f es $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$; en 0 no hay valor extremo pues f es creciente. Entonces $x_1 < 0 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(0) = 0 < f(x_2)$; 0 no es ni máximo ni mínimo local.

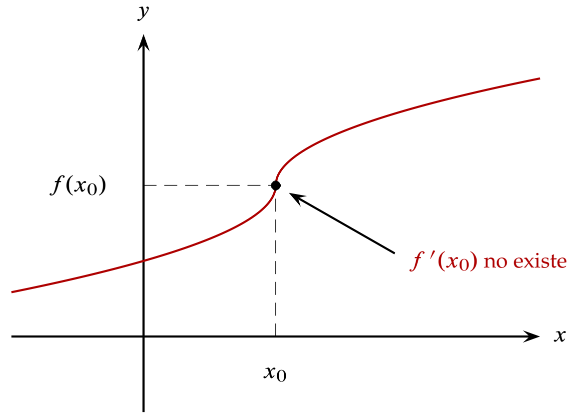


□

- <u>Punto crítico.</u> Una función f tiene un punto crítico en $x_0 \in D_f$ cuando $f'(x_0) = 0$ o bien cuando $f'(x_0)$ no existe.







Geométricamente es claro que un punto crítico puede ser, o bien no puede ser, un máximo local o un mínimo local.
Para decidir si un punto crítico es un máximo o un mínimo local se cuenta con el siguiente criterio:

- Criterio de la primera derivada si f tiene en x_0 un punto crítico y además:

Para $x < x_0$	*y para $x_0 < x$*	*entonces, f tiene en x_0 un*
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	máximo local estricto
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	miníno local estricto

Ejemplo 8.2.3 *Obtener y clasificar los puntos críticos de la función* $g(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$.

▼ Por el ejemplo **??** anterior sabemos que $g'(x) = \dfrac{4(4-x^2)}{(x^2+4)^2}$. Entonces

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4(4-x^2)}{(x^2+4)^2} = 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2\,.$$

Esto implica que la función g tiene dos puntos críticos, uno en $x_1 = -2$ y otro en $x_2 = 2$.
Para clasificarlos, utilizamos la información que se tiene en el mismo ejemplo **??** sobre crecimiento y decrecimiento de g.

Para	*f' es*	*f es*	*entonces, f tiene*
$x < -2$	$-$	decreciente $\searrow$	
$x_1 = -2$	0		un mínimo local estrictro
$-2 < x < 2$	$+$	creciente $\nearrow$	
$x_2 = 2$	0		un máximo local estricto
$2 < x$	$-$	decreciente $\searrow$	

Esto es, la función $g(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$ tiene

1. un punto minímo local estricto en $x_1 = -2$, y
2. un punto máximo local estricto en $x_2 = 2$.

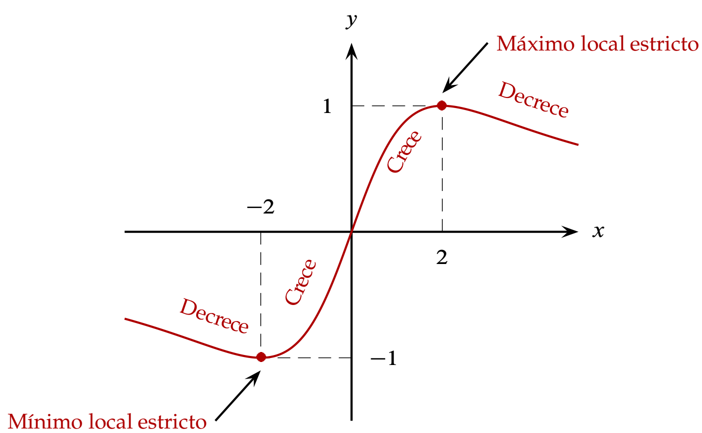
El punto mínimo local estricto está en

$$P[-2, g(-2)] = P\left(-2, \frac{-8}{4+4}\right) = P(-2, -1)\,.$$

El punto máximo local estricto está en

$$Q[-2, f(2)] = Q\left(2, \frac{8}{4+4}\right) = Q(2, 1)\,.$$

Todo ello sigue concordando, naturalmente, con que $g(x)$ es impar.



□

Ejemplo 8.2.4 *Obtener y clasificar los puntos críticos de la función* $f(x) = 3x^5 - 5x^3$.

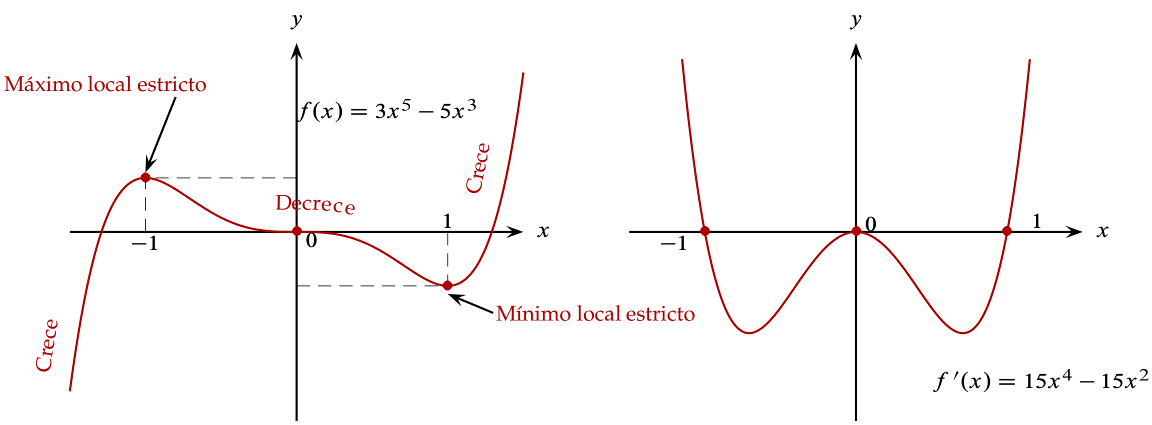
▼
$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2-1) = 15x^2(x+1)(x-1)$;
$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 15x^2(x+1)(x-1) = 0$ esto se cumple si:

$$\begin{aligned} x^2 = 0 \;&\Rightarrow\; x = 0 \text{ o bien} \\ x+1 = 0 \;&\Rightarrow\; x = -1 \text{ o bien} \\ x-1 = 0 \;&\Rightarrow\; x = 1\,. \end{aligned}$$

Esto implica que la función f tiene tres puntos críticos: en $x_1 = -1$, en $x_2 = 0$ y en $x_3 = 1$.
Para clasificarlos, utilizamos la información que se tiene en el ejemplo **??** anterior sobre crecimiento

y decrecimiento de f.

Para	*$f\,'$ es*	*f es*	*entonces, f tiene*
$x < -1$	$+$	creciente $\nearrow$	
$x_1 = -1$	0		un máximo local estricto
$1 < x < 0$	$-$	decreciente $\searrow$	
$x_2 = 0$	0		ni mínimo, ni máximo
$0 < x < 1$	$-$	decreciente $\searrow$	
$x_3 = 1$	0		un mínimo local estricto
$1 < x$	$+$	creciente $\nearrow$	



El punto máximo local estricto está en $P[-1, f(-1)] = P(-1, 2)$.
El punto mínimo local estricto está en $Q[1, f(1)] = Q(1, -2)$.
Todo ello concuerda con que $f(x)$ es impar. □

Ejemplo 8.2.5 *Sea $f(x)$ una función cuya derivada es*

$$f\,'(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x}{(3 + 2x)\sqrt{50 + 6x}}$$

y con dominio igual al de su derivada. Determine los intervalos de monotonía de $f(x)$ y sus puntos extremos.

▼ Para determinar el dominio de $f\,'$ observemos que

$$50 + 6x > 0 \;\Leftrightarrow\; 6x > -50 \;\Leftrightarrow\; x > -\frac{50}{6} = -\frac{25}{3}$$

y también que

$$3 + 2x = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x = -3 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{3}{2};$$

entonces,

$$D_f = D_{f\,'} = \left(-\frac{25}{3}, -\frac{3}{2}\right) \bigcup \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right) = \left(-\frac{25}{3}, +\infty\right) - \left\{-\frac{3}{2}\right\}.$$

Por otra parte

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 4x = x(x^2 - 3x - 4) = x(x+1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = -1, 0 \,\&\, 4.$$

Veamos el signo de f' en los distintos intervalos, tomando en cuenta que $\sqrt{50+6x} > 0$ siempre.

Intervalo	*Signo de* $3+2x$	$x+1$	x	$x-4$	$f'(x)$	$f(x)$ *es*
$-\frac{25}{3} < x < -\frac{3}{2} (< -1 < 0 < 4)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	creciente
$\left(-\frac{25}{3} <\right) -\frac{3}{2} < x < -1 (< 0 < 4)$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	decreciente
$\left(-\frac{25}{3} < -\frac{3}{2} <\right) -1 < x < 0 (< 4)$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	creciente
$\left(-\frac{25}{3} < -\frac{3}{2} < -1\right) < 0 < x < 4$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	decreciente
$\left(-\frac{25}{3} < -\frac{3}{2} < -1 < 0 <\right) 4 < x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	creciente

Luego $f(x)$ tiene los siguientes puntos extremos: en $x = -\frac{3}{2}$ un máximo local estricto pues f pasa de ser creciente a ser decreciente; en $x = -1$ un mínimo local estricto pues f pasa de ser decreciente a ser creciente; en $x = 0$ un máximo local estricto pues f pasa de ser creciente a ser decreciente y en $x = 4$ un mínimo local estricto pues f nuevamente pasa de ser decreciente a ser creciente.

□

Ejemplo 8.2.6 *Dada la siguiente función:* $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x-2}$ *, determine los intervalos de monotonía de* $f(x)$*, los puntos extremos y grafique esa función.*

▼ Como $f(x) = x + 1 + (x-2)^{-1}$, entonces:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-2)^2} < 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 > 1 \Leftrightarrow |x-2| > 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x - 2 > 1 \text{ o bien } x - 2 < -1 \Leftrightarrow x > 3, \text{ o bien } x < 1.$$

Luego, f es creciente en

$$(-\infty, 1) \text{ y en } (3, +\infty)$$

y decreciente en

$$(1, 2) \text{ y en } (2, 3)\,.$$

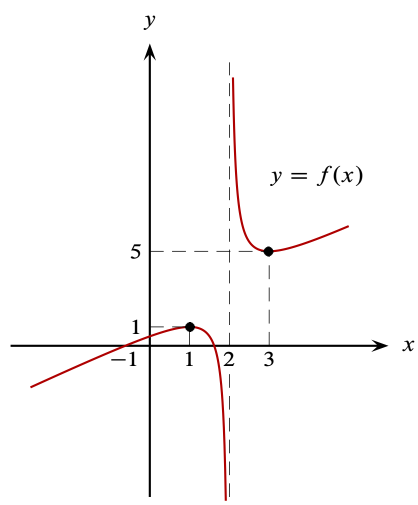
(Observe que $x = 2 \notin D_f$.)
Los puntos críticos aparecen cuando

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-2)^2} = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x-2| = 1 \Leftrightarrow x - 2 = \pm 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ o bien } x = 3.$$

Como en $x = 1$ la función pasa de ser creciente a ser decreciente, en el punto $[1, f(1)] = \left(1, 1 + 1 + \frac{1}{1-2}\right) = (1, 1)$ la función tiene un máximo relativo.
Y en $x = 3$, un mínimo relativo pues la función pasa de ser decreciente a ser creciente;
El mínimo es $f(3) = 3 + 1 + \frac{1}{3-2} = 5$.
También tenemos que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ y que $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$.
Además

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-2} = \frac{x^2 - 2x + x - 2 + 1}{x-2} = \frac{x^2 - x - 1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \approx \begin{cases} 1.6 \\ -0.6 \end{cases} \quad \text{son las raíces.}$$

La gráfica es



□

- Si $f(x_0) \geq f(x)$ para cualquier $x \in D_f$ diremos que $f(x_0)$ es el máximo absoluto de la función f.
- Si $f(x_0) \leq f(x)$ para cualquier $x \in D_f$ diremos que $f(x_0)$ es el mínimo absoluto de la función f.

Ya sabemos que como $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, existen el máximo y el mínimo absolutos de f.

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y derivable en (a, b), el máximo y el mínimo absolutos los toma la función en los extremos del intervalo o bien con el mayor de los máximos locales o con el menor de los mínimos locales respectivamente.

Ejercicios 8.2.1 *Soluciones en la página 10*

Utilizando el criterio de la primera derivada, determinar los máximos y mínimos locales o relativos de las siguientes funciones.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
2. $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.
3. $h(x) = -2x^3 + 6x - 1$.
4. $f(x) = x^4 - 4x^3$.
5. $g(x) = (x^2 - 1)^2$.
6. $h(x) = x^2 + \dfrac{16}{x}$.
7. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$.
8. $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$.
9. $h(x) = \sqrt[3]{x^4} - 4\sqrt[3]{x}$.
10. $f(x) = x^3 + \dfrac{48}{x}$.

Nótese que estas funciones son las mismas que están en los ejercicios 8.1.1. Esto se hace con el propósito de utilizar la información obtenida, sobre crecimiento y decrecimiento, en cada una de las funciones.

Ejercicios 8.2.1 *Máximos y mínimos locales, página 9*

1. f tiene un mínimo local $A(2, -1)$.
2. g tiene un máximo local $A(1, 2)$;
   g tiene un mínimo local $B(3, -2)$.
3. h tiene un mínimo en $A(-1, -5)$;
   h tiene un máximo en $B(1, 3)$.
4. f tiene un mínimo local en $P(3, -27)$;
   f no tiene máximos locales.
5. En $x = -1$ un mínimo local;
   en $x = 0$ un máximo local;
   en $x = 1$ un mínimo local.
6. h tiene un mínimo local en $P(2, 12)$.
7. f tiene en $P(0, 0)$ un máximo local.
8. g tiene en $A(0, 3)$ un máximo local.
9. h tiene en $Q(1, -3)$ un mínimo local.
10. Máximo local en $P(-2, -32)$;
    mínimo local en $Q(2, 32)$.