CAPÍTULO

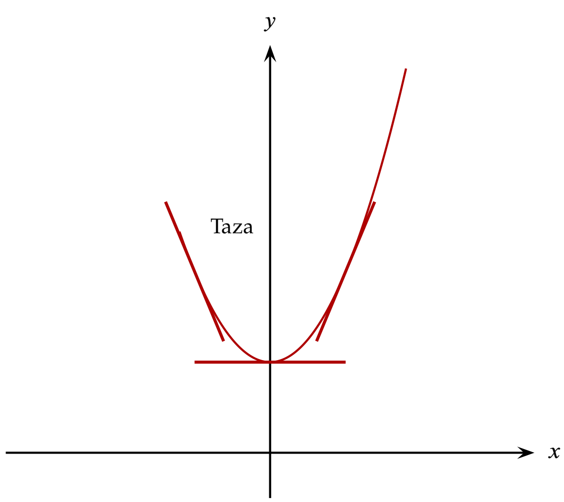
8

Aplicaciones de la derivada

[1]

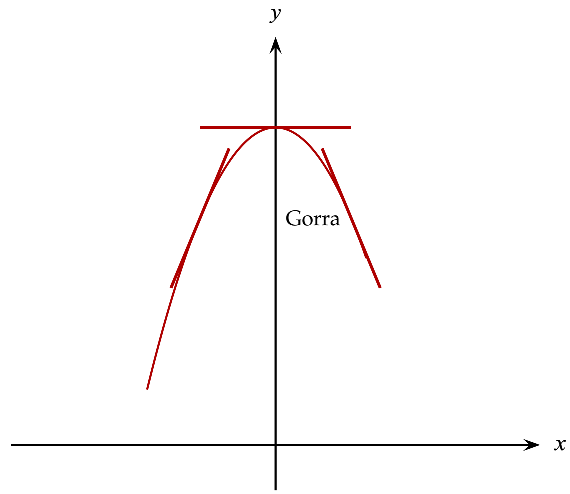
8.3 Concavidad y convexidad

- Observemos que $f''(x) > 0$ en un intervalo $\Rightarrow$ $f'(x)$ es creciente en dicho intervalo, por lo tanto, al recorrer la gráfica de la función f de izquierda a derecha, debe presentar forma de taza. Ya que la inclinación de la tangente crece en sentido directo diremos que la función es <u>cóncava</u>. En este caso la gráfica está encima de sus tangentes y debajo de sus secantes.



- Observemos que $f''(x) < 0$ en un intervalo $\Rightarrow$ $f'(x)$ es decreciente en dicho intervalo; entonces al recorrer la gráfica de la función f de izquierda a derecha, debe presentar forma de gorra. Ya que la inclinación de la tangente decrece en sentido directo diremos que la función es <u>convexa</u>. En este caso la gráfica está debajo de sus tangentes y encima de sus secantes.

[1]canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008



Concretando:

- La función (curva) $y = f(x)$ es cóncava en el intervalo I si $f''(x) > 0$ para cada $x \in I$.
- La función (curva) $y = f(x)$ es convexa en el intervalo I si $f''(x) < 0$ para cada $x \in I$.

- De aquí surge el criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos locales:

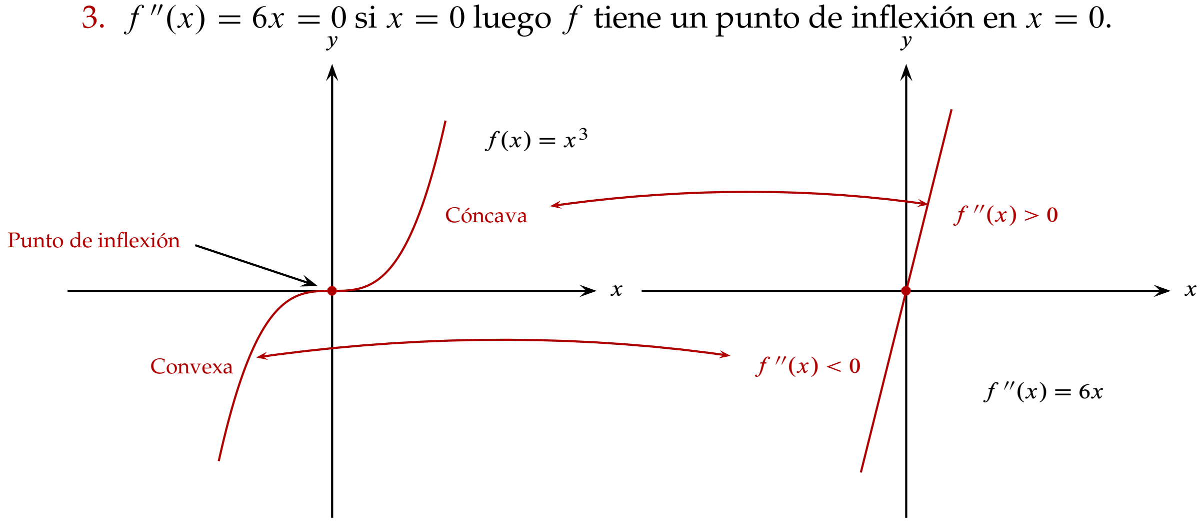
  1. Si $f'(x_0) = 0$ y si $f''(x_0) > 0$, en x_0 hay un mínimo local.
  2. Si $f'(x_0) = 0$ y si $f''(x_0) < 0$, en x_0 hay un máximo local.

Se llama punto de inflexión de f a un punto donde la segunda derivada de la función es cero y en el punto cambia de signo, esto es, la segunda derivada pasa de ser positiva antes del punto a ser negativa después del punto, o viceversa, siendo continua la funció en dicho punto. En ellos la función pasa de ser cóncava a convexa, o viceversa.

Ejemplo 8.3.1 *Para la función* $f(x) = x^3$

▼ Calculamos $f'(x) = 3x^2$, entonces

1. $f''(x) = 6x > 0$ si $x > 0$ luego f es cóncava en el intervalo $(0, +\infty)$.
2. $f''(x) = 6x < 0$ si $x < 0$ luego f es convexa en el intervalo $(-\infty, 0)$.
3. $f''(x) = 6x = 0$ si $x = 0$ luego f tiene un punto de inflexión en $x = 0$.



□

Otra nomenclatura usual es la siguiente:

- Si f es una función cóncava, entonces f es cóncava hacia arriba, $(f''(x) > 0)$.
- Si f es una función convexa, entonces f es cóncava hacia abajo, $(f''(x) < 0)$.
- Podemos decir que la curva (función) $y = f(x)$ en x_0 tiene un punto de inflexión si en x_0 hay un cambio de concavidad y si hay continuidad.

Ejemplo 8.3.2 *Determine los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de la función* $g(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$ *(del ejemplo **??**).*

▼

$$
\begin{aligned}
& g(x) = \frac{4x}{x^2+4} \;\Rightarrow\; g'(x) = \frac{4(4-x^2)}{(x^2+4)^2} \;\Rightarrow \\
\Rightarrow\; & g''(x) = 4\frac{(x^2+4)^2(-2x) - (4-x^2)2(x^2+4)(2x)}{[(x^2+4)^2]^2} = 4\frac{(-2x)(x^2+4)^2 - (4x)(x^2+4)(4-x^2)}{(x^2+4)^4} = \\
& = 4\frac{(-2x)(x^2+4)[(x^2+4)+2(4-x^2)]}{(x^2+4)(x^2+4)^3} = \frac{4(-2x)[x^2+4+8-2x^2]}{(x^2+4)^3} = \\
& = \frac{-8x(-x^2+12)}{(x^2+4)^3} = \frac{8x(x^2-12)}{(x^2+4)^3} \;\Rightarrow \\
\Rightarrow\; & g''(x) = \frac{8x(x^2-12)}{(x^2+4)^3}.
\end{aligned}
$$

Ahora bien, debido a que $8 > 0$ y a que $(x^2+4)^3 > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
g''(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{8x(x^2-12)}{(x^2+4)^3} > 0 \;\Leftrightarrow\; x(x^2-12) > 0 \text{ y} \\
g''(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{8x(x^2-12)}{(x^2+4)^3} < 0 \;\Leftrightarrow\; x(x^2-12) < 0\,.
\end{aligned}
$$

Pero $x(x^2-12) = 0 \;\Leftrightarrow\; x(x+\sqrt{12})(x-\sqrt{12}) = 0$. Esto se cumple si

1. $x = 0$ o bien
2. $x + \sqrt{12} = 0 \;\Rightarrow\; x = -\sqrt{12}$ o bien
3. $x - \sqrt{12} = 0 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{12}$.

Con los números $x_1 = -\sqrt{12}$, $x_2 = 0$ & $x_3 = \sqrt{12}$ generamos los intervalos:

$$
\left(-\infty, -\sqrt{12}\right),\; \left(-\sqrt{12}, 0\right),\; \left(0, \sqrt{12}\right) \text{ y } \left(\sqrt{12}, = \infty\right).
$$

Como $g''(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, en cada uno de esos intervalos tomaremos una x fija (valor de prueba) para determinar el signo de $g''(x)$.

Para	*valor de prueba*	*$g''(x)$ es*	*entonces g es cóncava*
$-\infty < x < -\sqrt{12}$	$x = -4$	$-$	hacia abajo o convexa
$-\sqrt{12} < x < 0$	$x = -1$	$+$	hacia arriba
$0 < x < \sqrt{12}$	$x = 1$	$-$	hacia abajo o convexa
$\sqrt{12} < x < +\infty$	$x = 4$	$+$	hacia arriba

Por lo tanto,

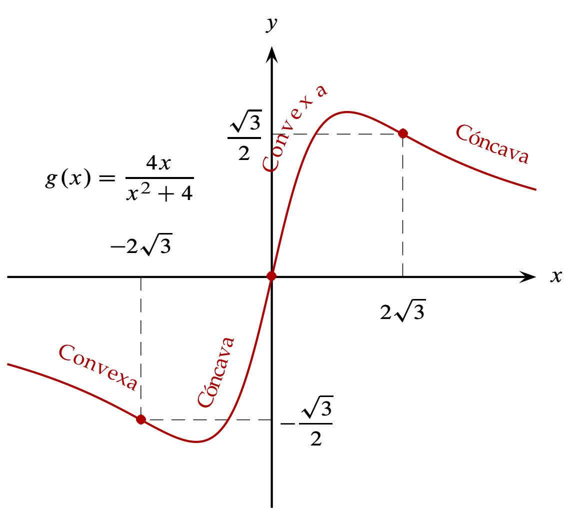
- la curva (función) $y = f(x)$ es cóncava hacia arriba en los intervalos: $\left(-\sqrt{12}, 0\right)$ y $\left(\sqrt{12}, +\infty\right)$;
- la función (curva) $y = f(x)$ es cóncava hacia abajo o convexa en los intervalos: $\left(-\infty, -\sqrt{12}\right)$ y $\left(0, \sqrt{12}\right)$;
- la curva (función) $y = f(x)$ tiene puntos de inflexión en $x_1 = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3} \approx -3.464$, $x_2 = 0$ y en $x_3 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

  Concretamente, en:

$$P_1[x_1, f(x_1)] = P_1[-\sqrt{12}, f(-\sqrt{12})] = P_1\left(-2\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx (-3.464, -0.866)\,;$$

$$P_2[x_2, f(x_2)] = P_2[0, f(0))] = P_2(0, 0) \text{ y en}$$

$$P_3[x_3, f(x_3)] = P_3[\sqrt{12}, f(\sqrt{12})] = P_3\left(2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx (3.464, 0.866)\,.$$



Nuevamente todos los resultados son congruentes con el hecho de que $g(x)$ es impar.

□

Ejemplo 8.3.3 *Determinar los intervalos de concavidad y puntos de inflexión de la función* $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ *(del ejemplo* **??***).*

▼

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3 \Rightarrow f'(x) = 15x^4 - 15x^2 \Rightarrow f''(x) = 60x^3 - 30x = 30x(2x^2 - 1)\,.$$

Entonces

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x(2x^2 - 1) > 0 \ \&\ f''(x) < 0 \Leftrightarrow x(2x^2 - 1) < 0\,.$$

Ahora bien $x(2x^2 - 1) = 0$. Esto ocurre cuando:

1. $x = 0$.
2. $2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Con los números $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = 0$ y con $x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ generamos los intervalos

$$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ y } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)\,.$$

Como $f''(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ en cada uno de esos intervalos, tomamos un x fijo (valor de prueba) para determinar el signo de f''.

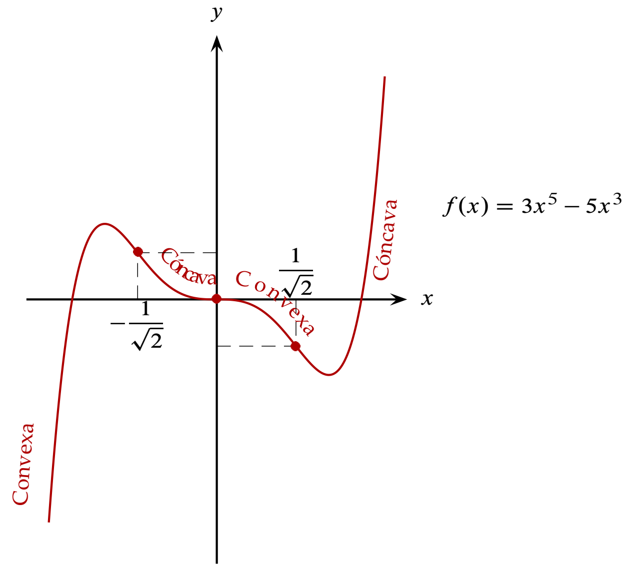
Para	*valor de prueba*	*$f''(x)$ es*	*entonces f es cóncava hacia*
$x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$x = -1$	$-$	abajo o convexa
$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 0$	$x = -\frac{1}{2}$	$+$	arriba
$0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$	$x = \frac{1}{2}$	$-$	abajo o convexa
$\frac{1}{\sqrt{2}} < x$	$x = 1$	$+$	arriba

Por lo tanto

- La función $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ es cóncava hacia arriba en los intervalos: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$.
- La curva $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ es cóncava hacia abajo o convexa en los intervalos: $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

- La función f tiene puntos de inflexión en:

$$P_1\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, f(-\frac{1}{\sqrt{2}})\right] = P_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1.2374\right);$$
$$P_2[0, f(0)] = P_2(0,0) \text{ y en}$$
$$P_3\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, f(\frac{1}{\sqrt{2}})\right] = P_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1.2374\right).$$



Nuevamente vemos que todo es consistente con el hecho de ser $f(x)$ impar.

□

Ejemplo 8.3.4 *Sea la función*

$$f(x) = \frac{x}{(1+x)^2},$$

diga en qué intervalos es cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo y determine los puntos de inflexión.

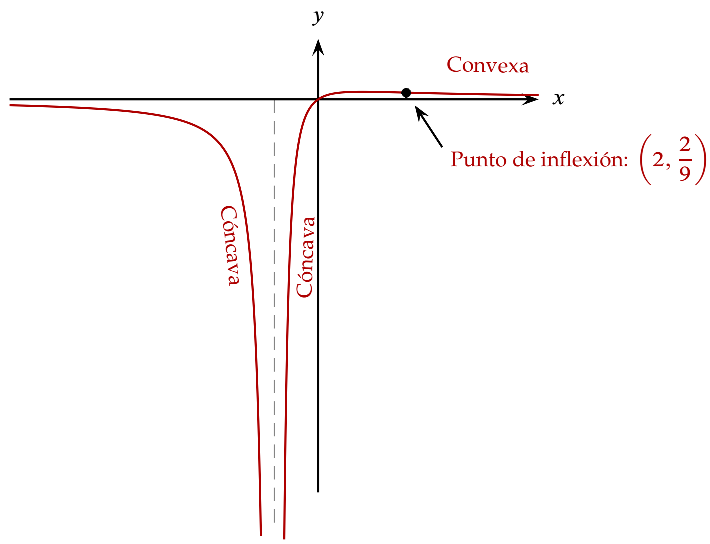
▼ Calculemos la segunda derivada de f

$$f'(x) = \frac{(1+x)^2 - 2(1+x)x}{(1+x)^4} = \frac{1+x-2x}{(1+x)^3} = \frac{1-x}{(1+x)^3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f''(x) = \frac{-(1+x)^3 - 3(1+x)^2(1-x)}{(1+x)^6} = \frac{-1-x-3+3x}{(1+x)^4} = \frac{2x-4}{(1+x)^4}.$$

El signo de esta segunda derivada nos lo da el numerador $2x - 4$, pues el denominador es siempre positivo:

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 4 > 0 \Leftrightarrow 2x > 4 \Leftrightarrow x > \frac{4}{2} = 2.$$

Entonces, la función $f(x)$ es cóncava hacia arriba en el intervalo $(2, +\infty)$.
Y cóncava hacia abajo en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(-1, 2)$, pues $-1 \notin D_f$.
Para $x = 2$ (raíz de f'') se tiene un punto de inflexión, ya que ahí la gráfica de f cambia el sentido de la concavidad.
El punto de inflexión es $[2, f(2)] = \left(2, \frac{2}{9}\right)$.



□

Ejemplo 8.3.5 *Para la función* $f(x) = (x^2 - 4)^3$, *determine:*

1. *Los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento. Los extremos relativos.*

2. *Los intervalos de concavidad hacia arriba y los de concavidad hacia abajo. Los puntos de inflexión.*

3. *La gráfica.*

▼ Calculemos:

1. $f'(x) = 3(x^2 - 4)^2 2x = 6x(x + 2)^2(x - 2)^2$.

   Los puntos críticos están en $x = -2$, 0 y en 2.

   $f'(x) > 0$ si $x > 0$ & $x \neq 2$; luego, $f(x)$ es creciente en $(0, 2)$, en $(2, +\infty)$ y también en $[0, +\infty)$.

   $f'(x) < 0$ si $x < 0$ & $x \neq -2$; luego, $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2)$, en $(-2, 0)$ y también en $(-\infty, 0)$.

   Entonces el único extremo relativo es $(0, -64)$, donde la función pasa de ser decreciente a ser creciente; por lo tanto es un mínimo.

2. Calculemos la derivada de $f'(x) = 6x(x^2 - 4)^2$:

$$f''(x) = 6(x^2 - 4)^2 + 6x \times 2(x^2 - 4) \times 2x = 6(x^2 - 4)(x^2 - 4 + 4x^2) =$$
$$= 6(x^2 - 4)(5x^2 - 4) = 6(x + 2)(x - 2)(\sqrt{5}x + 2)(\sqrt{5}x - 2)\,.$$

La segunda derivada es 0 en ± 2 y en $\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}} \approx \pm 0.89$, y su signo está dado en la tabla siguiente:

	Signo de					
Intervalo	$x+2$	$\sqrt{5}x+2$	$\sqrt{5}x-2$	$x-2$	$f''(x)$	*$f(x)$ es cóncava hacia*
$x < -2 \left(< -\dfrac{2}{\sqrt{5}} < \dfrac{2}{\sqrt{5}} < 2 \right)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	arriba
$-2 < x < -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \left(< \dfrac{2}{\sqrt{5}} < 2 \right)$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	abajo
$(-2 <) -\dfrac{2}{\sqrt{5}} < x < \dfrac{2}{\sqrt{5}} (< 2)$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	arriba
$\left(-2 < -\dfrac{2}{\sqrt{5}} < \right) \dfrac{2}{\sqrt{5}} < x < 2$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	abajo
$\left(-2 < -\dfrac{2}{\sqrt{5}} < \dfrac{2}{\sqrt{5}} < \right) 2 < x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	arriba

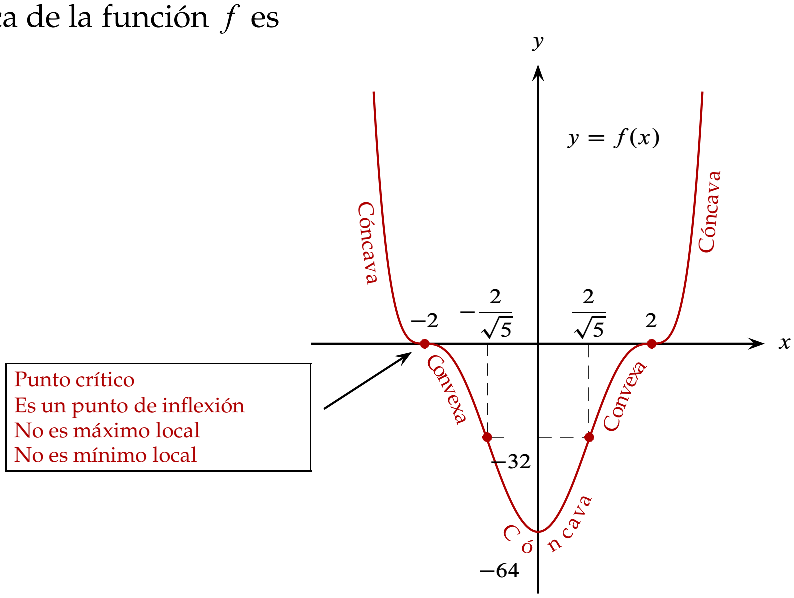
Vemos entonces que en $\left(-2, -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ y en $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, 2\right)$ la función es cóncava hacia abajo.

Vemos también que en $(-\infty, -2)$, en $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ y en $(2, +\infty)$ lo es hacia arriba.

Los puntos $(\pm 2, 0)$ & $\left(\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{-16^3}{125}\right) \approx (\pm 0.89, -32.77)$ son de inflexión.

Tenemos además que $f(0) = -64$ & $f(\pm 2.8) = 56.62$.

3. La gráfica de la función f es



Todo concuerda con que f es par; $(0, -64)$ resulta ser mínimo absoluto y f no tiene máximo absoluto.

□

Ejercicios 8.3.1 *Soluciones en la página 11*

Determinar los intervalos de concavidad y convexidad, así como los puntos de inflexión de las siguientes funciones.

1. $g(x) = 4 - 3x^2$.
2. $f(x) = (x-1)^3$.
3. $h(x) = x^4 - 6x^2 + 9$.
4. $\phi(x) = x^6 - 3x^4$.
5. $f(x) = \dfrac{-2x}{x^2+1}$.
6. $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$.
7. $h(x) = x^2 + \dfrac{8}{x}$.
8. $\phi(x) = x^{5/3} - x^{2/3}$.
9. $f(x) = x^4 - 2x^3$.
10. $g(x) = 2 - \sqrt{4 - x^2}$.

Ejercicios 8.3.2 *Soluciones en la página 11*

Utilizando el criterio de la segunda derivada, determinar los máximos y/o mínimos locales de las anteriores funciones.

1. $g(x) = 4 - 3x^2$.
2. $f(x) = (x-1)^3$.
3. $h(x) = x^4 - 6x^2 + 9$.
4. $\phi(x) = x^6 - 3x^4$.
5. $f(x) = \dfrac{-2x}{x^2+1}$.
6. $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$.
7. $h(x) = x^2 + \dfrac{8}{x}$.
8. $\phi(x) = x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$.
9. $f(x) = x^4 - 2x^3$.
10. $g(x) = 2 - \sqrt{4-x^2}$.

Ejercicios 8.3.1 *Concavidad y convexidad, página 9*

1. g es convexa en todo su dominio.
2. f es cóncava en $(1, +\infty)$;

   f es convexa en $(-\infty, 1)$;

   f tiene en $x = 1$ un punto de inflexión.
3. h es cóncava en $(-\infty, -1) \bigcup (1, +\infty)$;

   h es convexa en $(-1, 1)$;

   h tiene puntos de inflexión en $x = -1$ y en $x = 1$.
4. ϕ es cóncava en $(-\infty, -1.1)$ y en $(1.1, +\infty)$;

   ϕ es convexa en $(-1.1, 1.1)$;

   ϕ tiene puntos de inflexión en $x = -1.1$ y en $x = 1.1$.
5. f es cóncava en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$ y en $\left(0, \sqrt{3}\right)$;

   f es convexa en $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$ y en $\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$;

   f tiene puntos de inflexión en $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ y en $x = \sqrt{3}$.
6. g es cóncava en $(-\infty, -2)$ y en $(2, +\infty)$;

   g es convexa en $(-2, 2)$;

   no tiene puntos de inflexión.
7. h es cóncava en $(-\infty, -2)$ y en $(0, +\infty)$;

   h es convexa en $(-2, 0)$;

   h tiene un punto de inflexión en $x = -2$.
8. ϕ es convexa en $\left(-\infty, -\dfrac{1}{5}\right)$;

   ϕ es cóncava en $\left(-\dfrac{1}{5}, 0\right)$ y en $(0, +\infty)$;

   tiene un cambio de concavidad en $x = -\dfrac{1}{5}$;

   ϕ tiene un sólo punto de inflexión.
9. f es cóncava en $(-\infty, 0)$ y en $(1, +\infty)$;

   f es convexa en $(0, 1)$;

   f tiene puntos de inflexión en $x = 0$ y en $x = 1$.
10. g es cóncava en todo su dominio;

    no tiene puntos de inflexión.

Ejercicios 8.3.2 *Concavidad y convexidad, página 10*

1. g tiene en $x = 0$ un máximo local.
2. Un punto crítico en $x = 1$;

   no es un máximo local ni un mínimo local.
3. Puntos críticos en $x = 0$ y en $x = \pm\sqrt{3}$. En el primero hay un máximo local estricto y en los otros dos mínimos absolutos.
4. Tres puntos críticos: en $x = 0$ y en $x = \pm\sqrt{2}$. En el primero hay un máximo local estricto y en los otros mínimos absolutos.
5. Dos puntos críticos: en $x = \pm 1$. En -1 hay máximo absoluto y en 1 mínimo absoluto.
6. $x = 0$ es máximo local estricto.
7. h tiene un punto crítico en $x = \sqrt[3]{4}$;

   es un mínimo local.
8. ϕ tiene dos puntos críticos en:

   $x = \dfrac{2}{5}$ (mínimo local);

   $x = 0$ (máximo local).
9. ϕ tiene dos puntos críticos en:

   $x = 0$ (ni mínimo local ni máximo local);

   $x = \dfrac{3}{2}$ (mínimo local).
10. g tiene un punto crítico en:

    $x = 0$ (mínimo local).