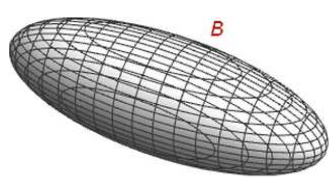
CAPÍTULO

3

Aplicaciones de la integral

3.1 Volumen de sólidos

Lo que dio origen a la integral en el cálculo de áreas (hacer una partición de un intervalo, obtener aproximación del área, refinar la partición, tomar límites, entre otros) puede ahora aplicarse para calcular el volumen de un sólido, teniendo en cuenta ciertas suposiciones generales. Imaginemos un sólido B en el espacio cuyo volumen $V(B)$ deseamos calcular.



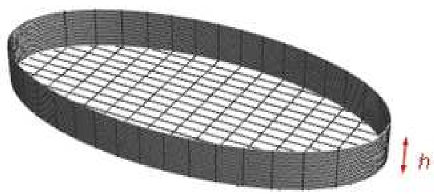
Este volumen es una medida de la extensión del sólido, y al igual que el área satisface las propiedades:

1. $V(B) \ge 0$.

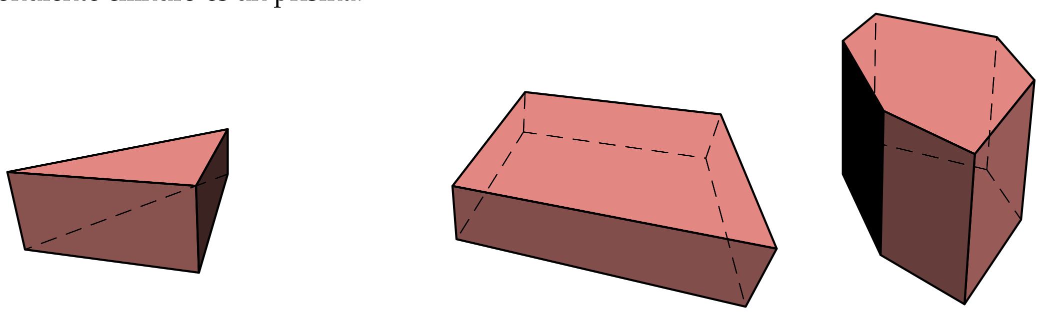
2. $V(B_1 \bigcup B_2) = V(B_1) + V(B_2)$, siempre que $B_1 \bigcap B_2 = \emptyset$.

Un cilindro es un sólido que tiene una cara plana que llamaremos base y altura constante h. Además, La base tiene exactamente la misma forma que la tapa superior y que cualquier corte o sección transversal paralela a la base.

canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017



El sólido que usualmente llamamos cilindro es en realidad un cilindro circular recto. El cilindro como lo acabamos de definir puede tener base de cualquier forma R, en particular cuando R es un polígono el correspondiente cilindro es un prisma:



Una vez aclarado lo que entendemos por cilindro, enunciamos la propiedad de normalización del volumen:

3. Si B es un cilindro cuya base es la figura plana R y con altura h, entonces su volumen es

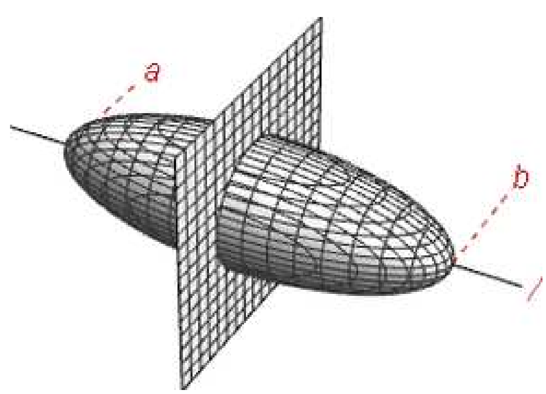
$$V(B) = A(R) \cdot h,$$

es decir, es el producto del área de su base por su altura.

Observación. La propiedad anterior concuerda con las ideas previamente adquiridas en geometría, por ejemplo, si el cilindro es un prisma, su volumen se calcula exactamente como el área de la base por la altura.

Para calcular el volumen de sólidos que no necesariamente sean cilindros utilizamos un razonamiento parecido al que aplicamos para el cálculo de áreas, basado en rectángulos; pero ahora calcularemos basándonos en el volumen de cilindros, esto es:

- Supongamos que para el sólido B cuyo volumen queremos calcular hay una línea recta ℓ de tal forma que podemos hacer cortes del sólido B con planos perpendiculares a ℓ, como sucede en las máquinas que se usan para rebanar alimentos.



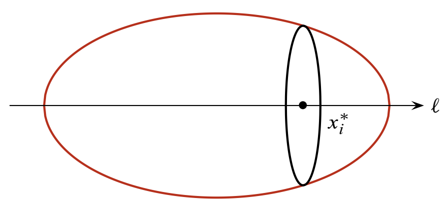
Para que nuestro argumento avance, tenemos que suponer algo más: que la línea ℓ está graduada o tiene escala, de manera que podemos hacer un corte perpendicular a ℓ a cualquier distancia x dentro de cierto rango $[a, b]$.

- Suponemos también que ese corte a la distancia x es una cara plana, digamos $R(x)$, cuya área debe ser posible calcular; denotemos dicha área por

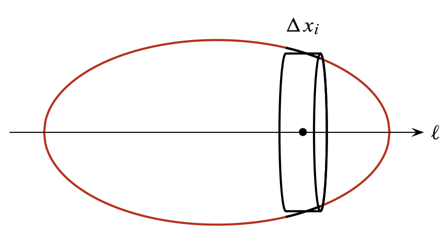
$$A(x) = \text{área de } R(x).$$

- Con los anteriores supuestos, podemos calcular el volumen de un sólido B por medio de los pasos siguientes:

  - ⋆ Tomamos una partición del intervalo $[a, b]$, esto es, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.
  - ⋆ Para cada subintervalo de la partición $[x_{i-1}, x_i]$ tomamos un punto $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$.
  - ⋆ Hacemos un corte perpendicular a la línea ℓ que pase por el punto x_i^*. Este corte determina una región plana del sólido cuya área $A(x_i^*)$ se calcula.

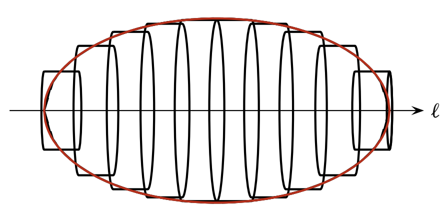


  - ⋆ Se construye un cilindro recto cuya área de la base es $A(x_i^*)$ y la altura es $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.



  - ⋆ Obtenemos así, una aproximación al volumen del sólido mediante la fórmula

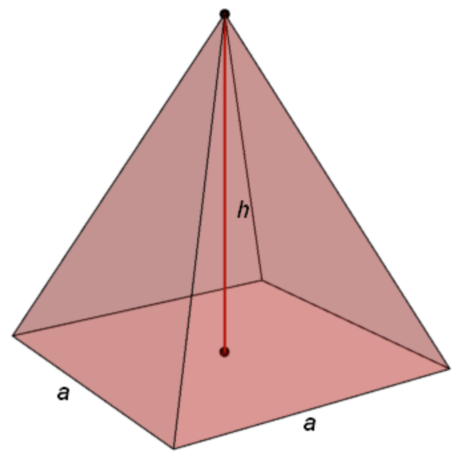
$$\mathrm{Vol}(B) \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x_i,$$



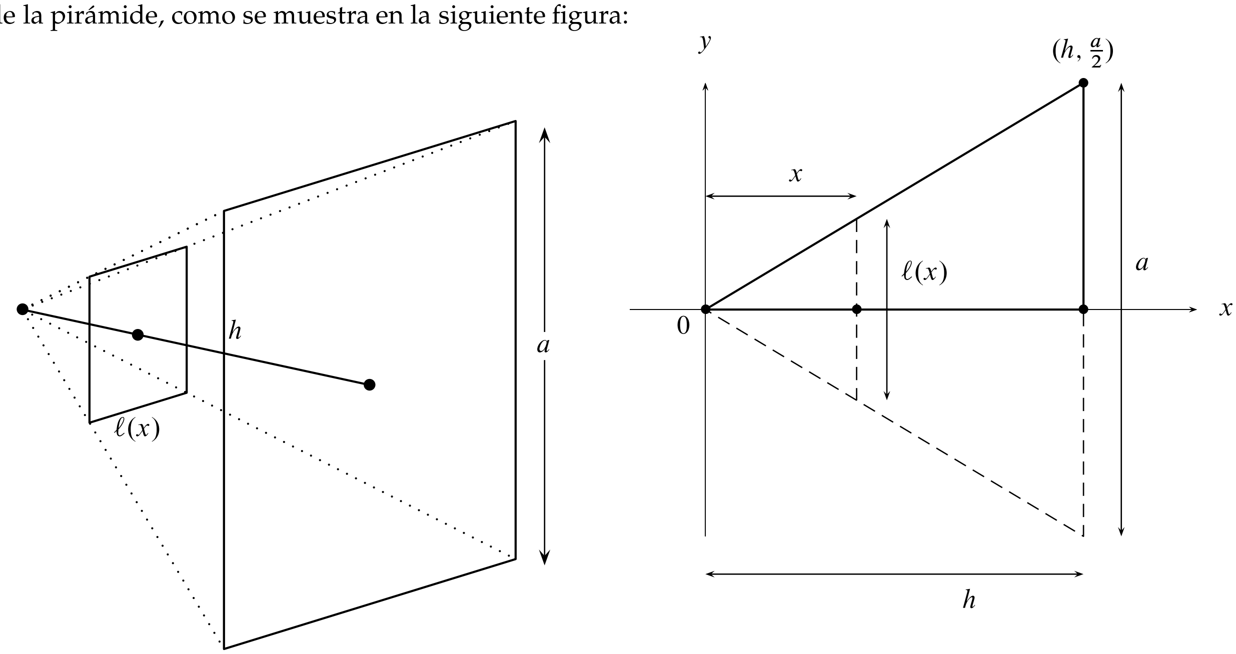
  - ⋆ La aproximación será mejor a medida que tomamos particiones más finas, con n tendiendo a ∞ y con Δx_i tendiendo a cero. El método así esbozado producirá, en el límite, el volumen del sólido:

$$\mathrm{Vol}(B) = \int_a^b A(x)\, \mathrm{d}x.$$

Ejemplo 3.1.1 *Calcular el volumen de una pirámide de base cuadrada con lado a & altura h.*



▼ Pongamos en el eje x la línea que une los centros de los cuadrados que forman las secciones transversales de la pirámide, como se muestra en la siguiente figura:



De esta forma el vértice de las caras triangulares de la pirámide coincide con el origen, y los cortes con planos perpendiculares al eje son todos cuadrados; hay un cuadrado para cada x desde 0 hasta h. El lado de esos cuadrados crece linealmente, desde 0 cuando $x = 0$ hasta a cuando $x = h$; por tanto, el lado $\ell(x)$ del cuadrado en el corte por x es $\ell(x) = \dfrac{ax}{h}$, para $0 \le x \le h$. El área correspondiente a dicho cuadrado será entonces:

$$A(x) = [\ell(x)]^2 = \left(\frac{ax}{h}\right)^2 = \frac{a^2x^2}{h^2}.$$

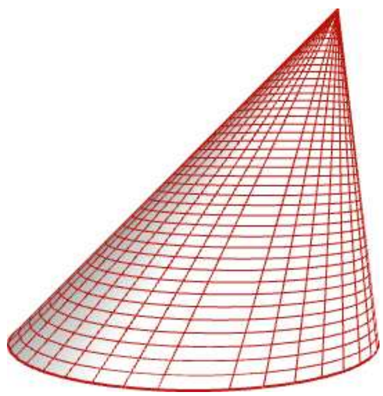
De acuerdo con la discusión previa, el volumen de la pirámide es

$$V = \int_0^h A(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^h \frac{a^2x^2}{h^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^h = \frac{a^2}{h^2}\left(\frac{h^3}{3}\right) = \frac{a^2h}{3},$$

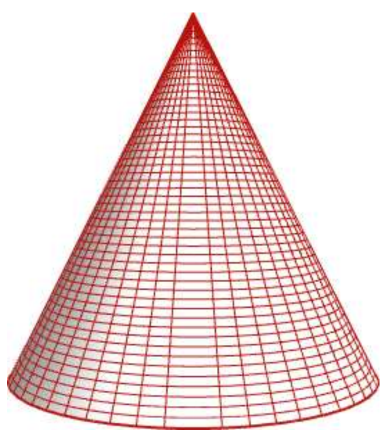
es decir, el volumen de una pirámide es $\frac{1}{3}$ del producto del área de la base por la altura. Vale la pena comentar que esta fórmula ya era conocida por culturas antiguas, como la egipcia.

□

- Generalizando el ejemplo anterior, si R es una región plana acotada, llamamos cono sobre R de altura h al sólido que resulta de unir todos los puntos de la región con un punto P del espacio, situado a una distancia h del plano que contiene a la región.



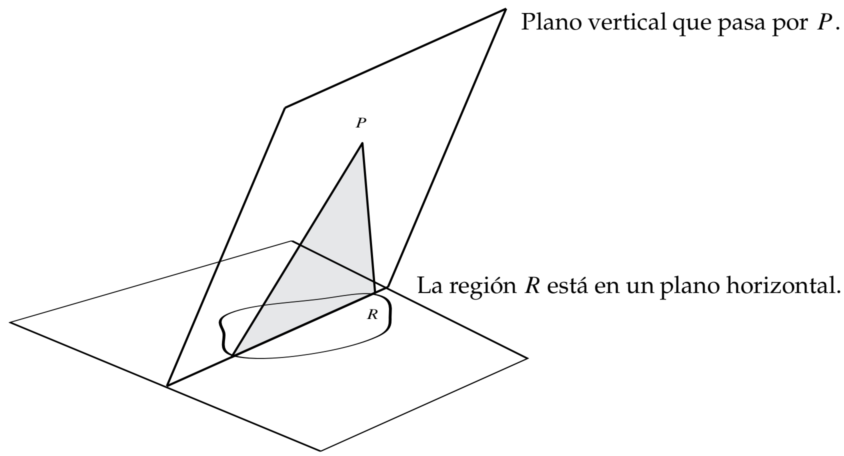
Por supuesto, el cono circular recto (que es a lo que comúnmente llamamos cono) es un caso particular de lo que acabamos de definir.



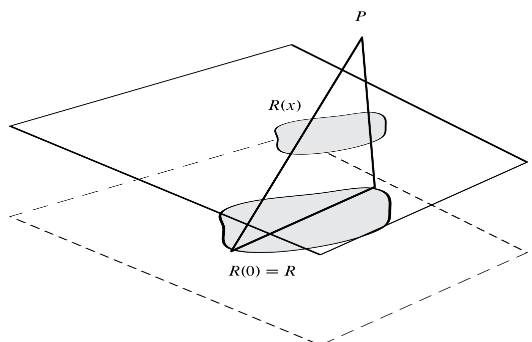
Ejemplo 3.1.2 *Demostrar que el volumen de cualquier cono sobre una región R de altura h es*

$$Vol = \frac{1}{3} \acute{a}rea(R) \cdot h$$

▼ Es necesario hacer la siguiente observación: si se interseca el cono sobre la región R de altura h con un plano perpendicular a la base que pase por el vértice P el resultado será siempre un triángulo de altura h con vértice P (veáse figura):



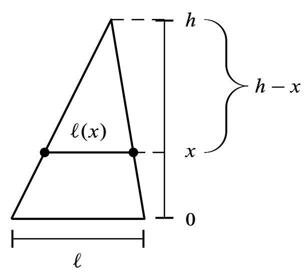
Por otro lado, las intersecciones del sólido que estamos considerando con planos paralelos al plano que contiene a la región R son todas semejantes a la región R:



Es decir, el corte a la altura x, con $0 \le x \le h$, es una región $R(x)$ semejante a la base $R(0)$, mientras que $R(h)$ degenera en el punto P.

Ahora bien, ¿cómo cambia el área $A(x)$ de la región $R(x)$?

Llamamos cuerda a cualquier segmento de recta que une dos puntos de la frontera de R. Supongamos que una cuerda tiene longitud ℓ.



Queremos calcular la longitud de la cuerda asociada, $\ell(x)$, a la altura x.
De la figura anterior, por semejanza de triángulos:

$$\frac{\ell(x)}{\ell} = \frac{h - x}{h} = 1 - \frac{x}{h} \Rightarrow \ell(x) = \ell\left(1 - \frac{x}{h}\right).$$

Por lo tanto:

- Cualquier cuerda ℓ en la base disminuye con la altura a razón de $\ell(x) = \ell\left(1 - \dfrac{x}{h}\right)$.
- Las secciones horizontales del cono $R(x)$ son semejantes a la base $R(0)$.

Una última observación: si las dimensiones lineales disminuyen como $\left(1-\dfrac{x}{h}\right)$ a la altura x, entonces el área de $R(x)$ debe disminuir como su cuadrado, es decir:

$$A(x)=A(R)\left(1-\frac{x}{h}\right)^2,$$

puesto que las áreas varían como el cuadrado de las dimensiones lineales.
Como constatamos, el volumen del cono sobre R de altura h es

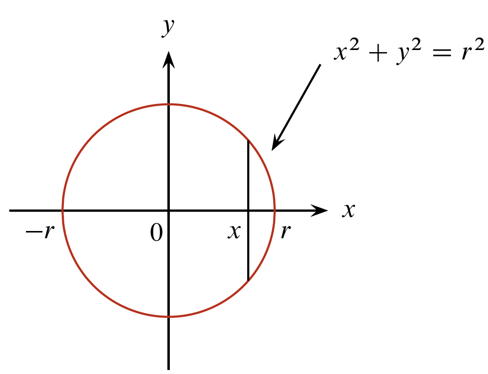
$$\begin{aligned} V &= \int_0^h A(R)\left(1-\frac{x}{h}\right)^2 \mathrm{d}x = A(R)\int_0^h \left(1-\frac{x}{h}\right)^2 \mathrm{d}x = \\ &\boxed{u=1-\frac{x}{h} \Rightarrow \mathrm{d}u=-\frac{1}{h}\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x=-h\,\mathrm{d}u.} \\ &= A(R)\int_1^0 u^2(-h\ \mathrm{d}u) = A(R)\int_0^1 hu^2\ \mathrm{d}u = \\ &= A(R)\cdot h\cdot \left.\frac{u^3}{3}\right|_0^1 = \frac{A(R)\cdot h}{3}. \end{aligned}$$

Esto es lo que se deseaba probar.

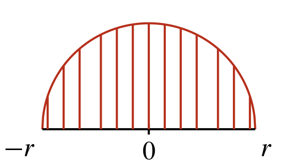
□

Ejemplo 3.1.3 *Un sólido tiene como base un círculo de radio r, y todas las intersecciones del sólido con planos verticales paralelos a una dirección fija son rectángulos con altura igual a la mitad de lo que mide su base. Determinar su volumen.*

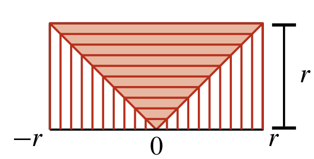
▼ Tal vez lo más difícil en estos problemas es imaginarse el sólido cuyo volumen calcularemos a partir de una descripción verbal, como el enunciado de este ejemplo. Para fijar ideas, supongamos que la base del mismo está en el plano xy, como un circulo de radio r y centro en el origen.



De hecho, visto desde arriba, este círculo es todo lo que veríamos del sólido. Supongamos que las intersecciones del sólido con planos verticales y paralelos al eje y son los rectángulos que dice el enunciado. Entonces la línea marcada en la figura anterior sería la base de uno de esos rectángulos; observe que esa línea tiene una longitud $\ell(x)=2\sqrt{r^2-x^2}$. Por otro lado, si vemos el sólido de perfil desde el eje y o desde el eje x, veríamos algo así:

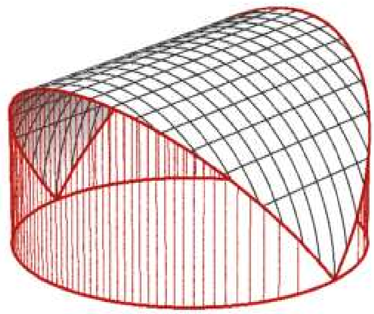


Vista desde el eje y.



Vista desde el eje x.

Un bosquejo del sólido es



Una vez que visualizamos el sólido, para el cálculo de su volumen podemos elegir el eje x para integrar la función del área $A(x)$, donde $-r \leq x \leq r$. Como observamos antes, la longitud de la base del rectángulo que resulta al intersecar el sólido con el plano vertical paralelo al eje y y que pasa por el punto x es

$$\ell(x) = 2\sqrt{r^2 - x^2};$$

su altura es la mitad de $\ell(x)$; por lo tanto, tenemos:

$$A(x) = (2\sqrt{r^2 - x^2})(\sqrt{r^2 - x^2}) = 2(r^2 - x^2),$$

donde el volumen es

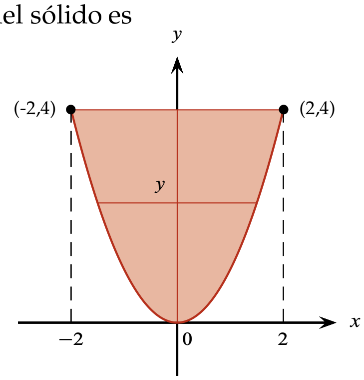
$$V = \int_{-r}^{r} A(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-r}^{r} 2(r^2 - x^2)\ \mathrm{d}x \overset{\alpha}{=} 2 \cdot 2 \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)\ \mathrm{d}x = 4\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{r} =$$
$$= 4\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{8}{3}r^3.$$

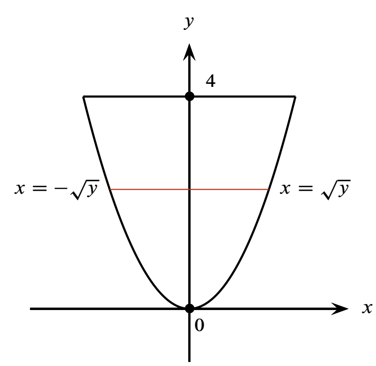
Observe que en la igualdad α se hizo uso de la paridad del integrando para reducir la integral de $-r$ a r al doble de la integral de 0 a r.

□

Ejemplo 3.1.4 *Un sólido tiene base en el sector de parábola comprendido entre $y = x^2$ y la recta $y = 4$, y las intersecciones con planos perpendiculares a la base y paralelos al eje x son cuadrados. Determinar su volumen.*

▼ La base del sólido es





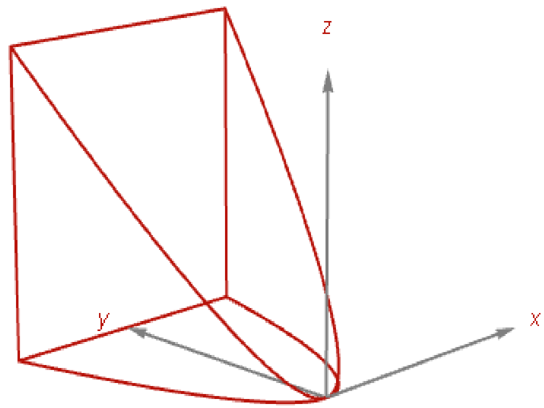
Donde la región se representa como:

$$R = \left\{ (x, y) \,\middle|\, -2 \leq x \leq 2 \qquad \& \qquad x^2 \leq y \leq 4 \right\}$$

o bien

$$R = \left\{ (x, y) \,\middle|\, 0 \le y \le 4 \quad \& \quad -\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y} \right\}.$$

Las dos formas de describir la base R del sólido son igualmente válidas, sin embargo, la segunda es más adecuada al propósito de calcular el volumen del sólido. La línea marcada a la altura y será la base del cuadrado que resulta de cortar al sólido con un plano vertical paralelo al eje x, como se muestra:



Si escogemos como eje de rotación al eje y para calcular el volumen, vemos que $0 \le y \le 4$ y que el lado del cuadrado en la base mide $\ell(y) = 2\sqrt{y}$, por lo que su área es

$$A(y) = (2\sqrt{y})^2 = 4y.$$

El cálculo del volumen es

$$V = \int_0^4 A(y)\ \mathrm{d}y = \int_0^4 4y\ \mathrm{d}y = 4\frac{y^2}{2}\bigg|_0^4 = 32\ \mathrm{u}^3.$$

□

Ejercicios 3.3.1 *Volúmenes.* *Soluciones en la página 52*

1. Un sólido tiene como base un círculo de radio 5 en el plano xy. Calcular, en cada caso, el volumen del sólido si todas sus intersecciones con planos verticales, paralelos a una dirección fija son
   a. Cuadrados.
   b. Triángulos equiláteros (con base en el plano xy).
   c. Rectángulos de altura 1.
2. La región R del plano entre las curvas $y = x^2 - 3x - 2$ & $y = x - 1$ es la base de un sólido. Calcular, en cada caso, el volumen del sólido si todas las intersecciones con planos paralelos al eje y son
   a. Cuadrados.
   b. Rectángulos de altura 1.
   c. Rectángulos con perímetro 10.
3. La región R del plano entre las curvas $y = x^2$ & $y = \sqrt{x}$ es la base de un sólido. Calcular, en cada caso, el volumen del sólido si todas las intersecciones con planos paralelos al eje y son
   a. Cuadrados.
   b. Hipotenusas de triángulos rectángulos isósceles.
   c. Diámetros de círculos.

4. La región R del plano entre la curva $y = \cos x$ & el eje x entre $x = -\dfrac{\pi}{2}$ & $x = \dfrac{\pi}{2}$ es la base de un sólido. Calcular, en cada caso, el volumen del sólido si todas las intersecciones con planos perpendiculares al eje x son

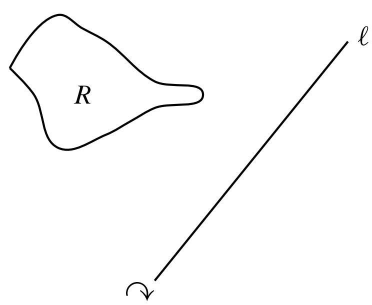
   a. Cuadrados.

   b. Rectángulos de perímetro 2.

   c. Diámetros de semicírculos.

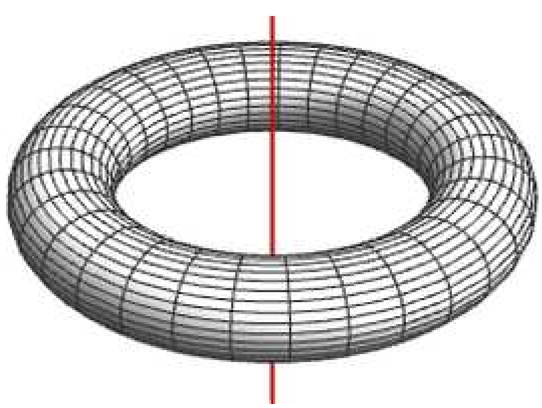
3.3.1 Volúmenes de sólidos de revolución

Un caso especial de volumen de un sólido es el de los sólidos de revolución. Estos sólidos se obtienen al hacer girar una región plana alrededor de un eje (recta) que está en el mismo plano que la región, sin atravesarla:



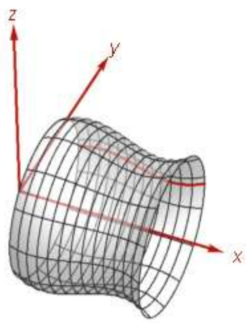
Ejemplos de este tipo de sólidos en la vida cotidiana: vasos, copas, botellas, entre otros, al igual que muchas piezas mecánicas, tienen forma de sólidos de revolución. Los conos y cilindros circulares rectos, las esferas, elipsoides y muchos sólidos más son de este tipo.

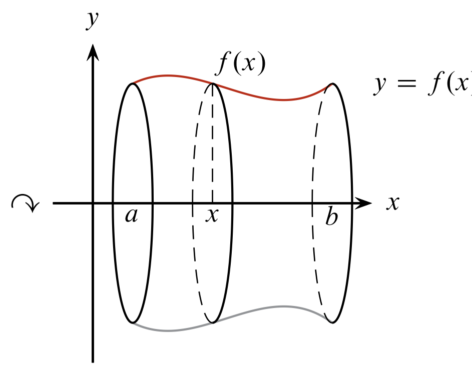
Por ejemplo, un toro se genera al girar un círculo alrededor de una recta



El resultado es esta figura que tiene la forma de una dona o rosquilla. Ahora bien, ¿cómo se calcula el volumen de un sólido de revolución? Empezaremos por un caso sencillo.

Consideremos una función $f(x) \geq 0$ definida y continua en un intervalo $[a, b]$ y el sólido generardo al girar la región bajo la gráfica de $y = f(x)$, sobre el eje x y entre las rectas $x = a$ & $x = b$ alrededor del eje x:





En este caso conviene tomar como eje para el cálculo del volumen al propio eje x (que es el eje de revolución) y no olvidar que cualquier sección transversal obtenida al intersecar al sólido con un plano perpendicular al eje x por un punto x entre a, b es un círculo. El área de ese círculo es

$$A(x) = \pi[\text{radio en } x]^2,$$

pero se puede ver, por la figura anterior, que el radio en x es $f(x)$, por lo que

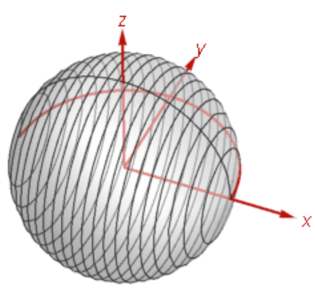
$$A(x) = \pi[f(x)]^2.$$

Así que el volumen del sólido de revolución es

$$\text{Volumen} = \int_a^b A(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b \pi[f(x)]^2\ \mathrm{d}x. \tag{3.1}$$

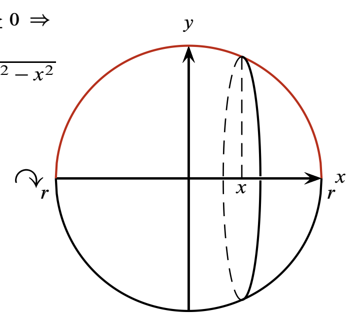
Ejemplo 3.3.5 *Calcular el volumen de una esfera de radio r.*

▼ Podemos considerar la esfera como el sólido de revolución generado al girar el semicírculo de radio r con centro en el origen alrededor del eje x:



$x^2 + y^2 = r^2,\ y \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$



Como $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, entonces

$$A(x) = \pi[f(x)]^2 = \pi\left[\sqrt{r^2 - x^2}\right]^2 = \pi(r^2 - x^2);$$

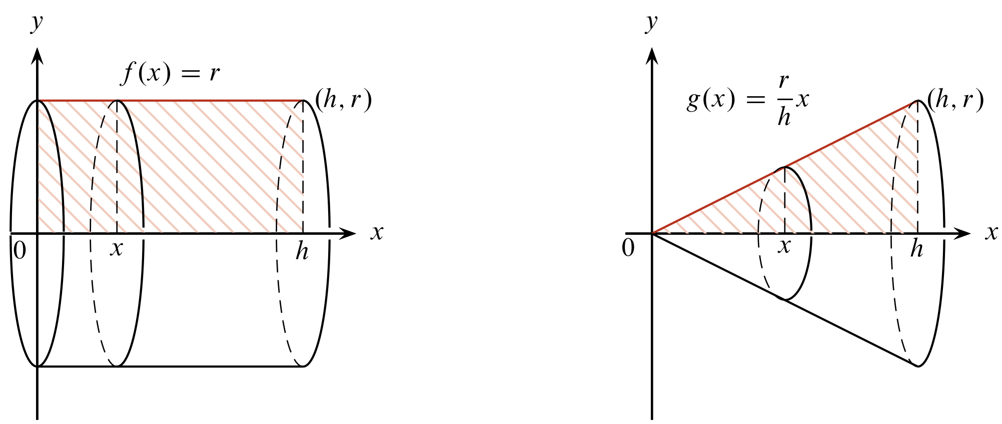
el volumen es

$$V(x) = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^r (r^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = 2\pi\left(r^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^r = 2\pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi r^3\ \mathrm{u}^3.$$

□

Ejemplo 3.3.6 *Calcular el volumen de un cilindro y de un cono, ambos circulares rectos, con radio r en la base y altura h, considerados como sólidos de revolución.*

▼ Tanto el cilindro como el cono se generan como sólidos de revolución al girar un rectángulo y un triángulo, respectivamente, alrededor del eje x como se muestra en la figura:



Utilizamos la fórmula (3.1) de la pág. 11 para el cálculo del volumen de revolución con $f(x) = r$ para el cilindro así como $g(x) = \frac{r}{h}x$ para el cono (puesto que $y = \frac{r}{h}x$ es la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0, 0)$ y (h, r), obtenemos:

Para el cilindro,

$$\text{volumen } = \int_0^h \pi[f(x)]^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^h r^2\,\mathrm{d}x = \pi r^2 x\Big|_0^h = \pi r^2 h\ \mathrm{u}^3.$$

Para el cono,

$$\text{volumen } = \int_0^h \pi[g(x)]^2\,\mathrm{d}x = \int_0^h \pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2 = \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi r^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2}\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 h\ \mathrm{u}^3.$$

Esto es:

1. El volumen del cilindro es el área de su base (πr^2) por la altura h.
2. El volumen del cono es $\frac{1}{3}$ del volumen del cilindro.

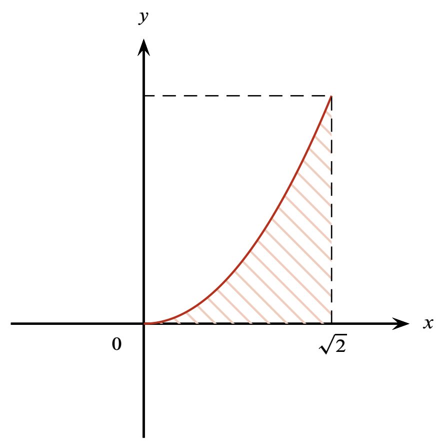
Como vimos en el ejemplo (3.1.2).

□

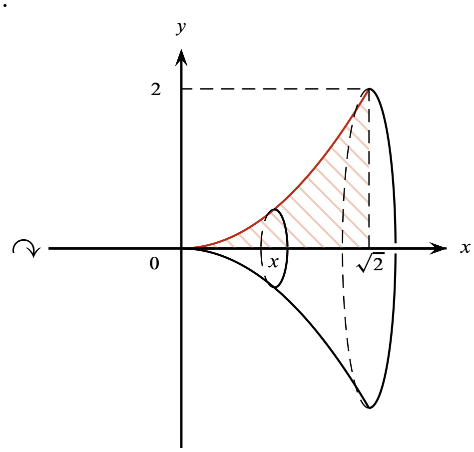
Ejemplo 3.3.7 *Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al girar la región comprendida entre la curva $y = x^2$, el eje x y la recta vertical $x = \sqrt{2}$ alrededor de:*

1. *El eje x.*
2. *El eje y.*

▼
La región que gira, tiene dos lados rectos (el eje x & la recta $x = \sqrt{2}$) y un tercer lado curvo, la parábola $y = x^2$.



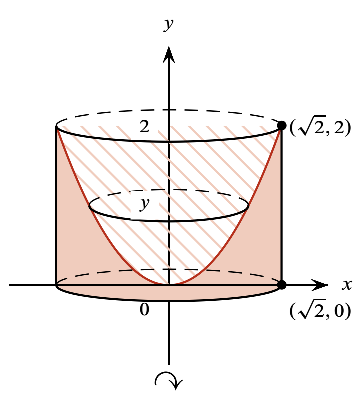
1. Eje de giro o rotación: el eje x.



Aplicando la fórmula (3.1) de la pág. 11 para volúmenes de revolución y usando $f(x) = x^2$:

$$\text{Volumen } = \int_0^{\sqrt{2}} \pi [f(x)]^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^{\sqrt{2}} (x^2)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^{\sqrt{2}} x^4 \, \mathrm{d}x = \pi \frac{x^5}{5} \bigg|_0^{\sqrt{2}} = \pi \frac{(\sqrt{2})^5}{5} = \frac{4\pi\sqrt{2}}{5}.$$

2. Eje de giro o rotación: el eje y.

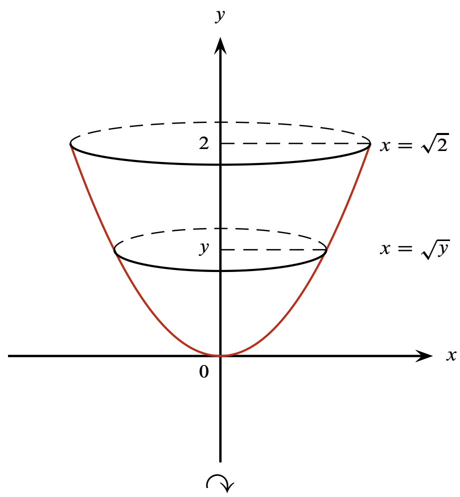


El sólido que se obtiene es un cilindro al que se le ha removido un volumen con forma de paraboloide de revolución.

Podemos calcular el volumen, encontrando primero el volumen del cilindro sólido y restándole el volumen del paraboloide que se le ha removido. El cilindro tiene radio en la base $\sqrt{2}$ y altura 2, por lo que su volumen es

$$V_{\text{cil}} = \pi(\sqrt{2})^2(2) = 4\pi\,\text{u}^3.$$

Para el volumen del paraboloide removido hay que integrar sobre el eje y desde 0 hasta 2, y el radio correspondiente a la altura y está dado por la abscisa x del punto en la parábola $y = x^2$ con ordenada y:



Esto significa que si escribimos x en función de y tendremos $x = g(y) = \sqrt{y}$. Por lo tanto, la integral que corresponde al volumen del paraboloide es

$$\text{Vol}_\text{p} = \int_0^2 \pi[g(y)]^2\, \mathrm{d}y = \int_0^2 \pi(\sqrt{y})^2\, \mathrm{d}y = \pi\int_0^2 y\, \mathrm{d}y = \pi\frac{y^2}{2}\bigg|_0^2 = \frac{\pi}{2}\left(2^2 - 0^2\right) = 2\pi.$$

El volumen buscado es

$$\text{Volumen } = V_{\text{cil}} - \text{Vol}_\text{p} = 4\pi - 2\pi = 2\pi\,\text{u}^3.$$

□

3.3.2 Volúmenes de sólidos de revolución. Método de las Arandelas

En los ejemplos considerados hasta el momento, el eje de revolución ha sido una parte de la frontera de la región $\overline{R}$ que se gira alrededor del eje (figura A), pero ¿que sucederá si dicho eje está separado de la región R al girar? (figura B) ¿Cómo calcular el volumen resultante?

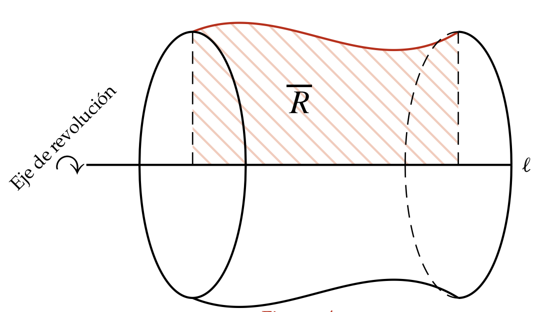


Figura *A*

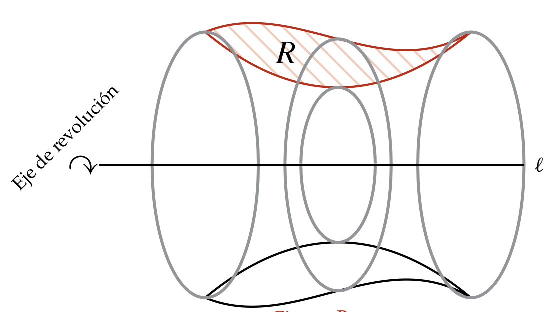


Figura *B*

Si rotamos la región R alrededor de la recta ℓ, al menos 360°, el resultado es un sólido de revolución con un hueco o perforación. Para resolver este problema, es preciso:

- Calcular el volumen del sólido exterior. Esto es, el volumen que se forma al rotar la región $\overline{R}$.
- Calcular el volumen del sólido interior. Es decir, el volumen del hueco, considerado como un sólido que se remueve del sólido exterior.

Entonces, al girar la región R alrededor del eje ℓ:

$$\text{Volumen del sólido generado por } R = \text{volumen exterior} - \text{volumen interior}.$$

Para darle una forma más concisa a la igualdad anterior, suponemos que la recta ℓ es el eje x y además que la región R se puede describir como sigue:

$$\begin{aligned} &R \text{ consta de los puntos } (x, y), \text{ con } a \le x \le b, \text{ y con } g(x) \le y \le f(x); \\ &R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a \le x \le b \ \& \ g(x) \le y \le f(x) \right\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la región R se encuentra definida como la porción del plano xy entre las gráficas de dos funciones, $f(x)$ la función que define la región exterior así como $g(x)$ la función que define la región interior con respecto al eje de revolución ℓ.

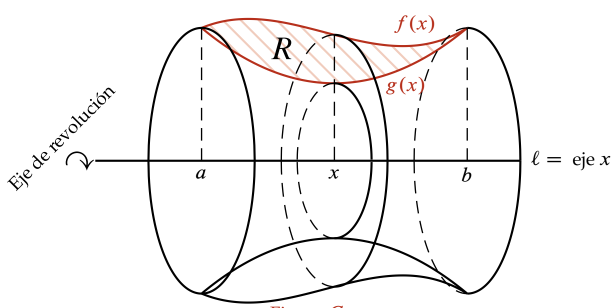
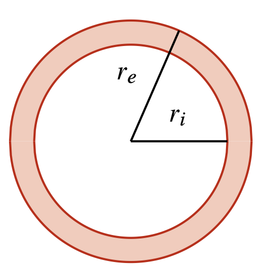


Figura C

Entonces, continuando con el razonamiento, el volumen V del sólido generado por R al girar alrededor del eje x, es

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 \, dx - \int_a^b \pi[g(x)]^2 \, dx = \int_a^b \pi[f(x)^2 - g(x)^2] \, dx.$$

Una manera alternativa de obtener esta fórmula es considerar el mismo sólido de la figura C, con secciones transversales perpendiculares al eje de rotación cuya forma es la de un disco perforado o arandela, es decir, la región comprendida entre dos círculos concéntricos cuyos radios son $r_e =$ radio exterior y $r_i =$ radio interior:



El área de dicha figura es

$$\pi r_e^2 - \pi r_i^2 = \pi(r_e^2 - r_i^2).$$

Para cada x en el intervalo $[a, b]$, la arandela obtenida al hacer el corte transversal por x tiene radios $r_e = f(x)$ & $r_i = g(x)$, de modo que su área será

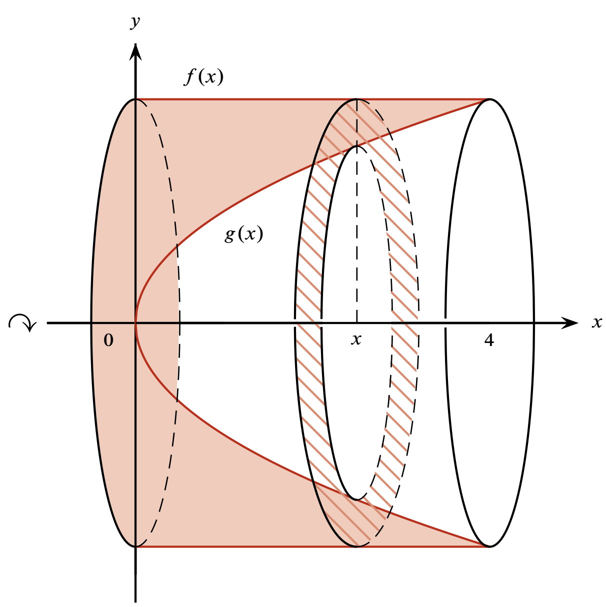
$$A(x) = \pi\left[(f(x))^2 - (g(x))^2\right].$$

El volumen de revolución se obtendrá de la siguiente manera:

$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \pi\left[(f(x))^2 - (g(x))^2\right]\mathrm{d}x.$$

Veamos algunos ejemplos de aplicación de este método.

Ejemplo 3.3.8 *Determinar el volumen del sólido de revolución generado al rotar alrededor del eje x, la región R comprendida entre $f(x) = 4$ & $g(x) = 2\sqrt{x}$ desde $x = 0$ hasta $x = 4$.*



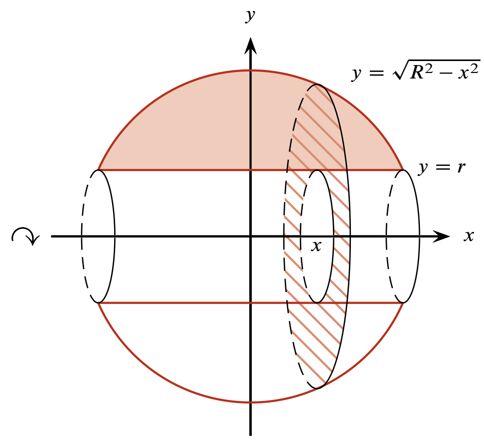
▼ El intervalo de integración para obtener el volumen es $[0, 4]$ y las funciones para calcular los radios exterior e interior del corte transversal en x son $f(x) = 4$ & $g(x) = 2\sqrt{x}$, respectivamente; así que el volumen se calcula:

$$V = \int_a^b \pi\left[(f(x))^2 - (g(x))^2\right]\mathrm{d}x = \pi\int_0^4 [4^2 - (2\sqrt{x})^2]\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^4 [16 - 4x]\,\mathrm{d}x =$$

$$= \pi(16x - 2x^2)\Big|_0^4 = \pi(64 - 32) = 32\pi\,\mathrm{u}^3.$$

□

Ejemplo 3.3.9 *Determinar el volumen de una esfera de radio R a la que se practica una perforación cilíndrica, de radio $r < R$, a lo largo de uno de sus diámetros.*



▼ Podemos imaginar la esfera con la perforación indicada, como el sólido generado al girar la región sombreada en la figura alrededor del eje x. Es claro, para cualquier sección transversal, que el radio exterior es $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ y que el radio interior es $g(x) = r$, el cual debe cumplir $r < R$. Hace falta calcular los límites de integración. Para ello baste notar que el semicírculo $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ y la recta horizontal $y = r$ se intersecan cuando:

$$\sqrt{R^2 - x^2} = r \;\Rightarrow\; x^2 = R^2 - r^2 \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt{R^2 - r^2}.$$

Así tenemos que los límites de integración son $-\sqrt{R^2 - r^2}$ & $\sqrt{R^2 - r^2}$; el volumen buscado es

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} \pi\left[(\sqrt{R^2 - x^2})^2 - r^2\right] \mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\sqrt{R^2-r^2}} \pi\left[(\sqrt{R^2 - x^2})^2 - r^2\right] \mathrm{d}x = \\
&= 2\pi \int_{0}^{\sqrt{R^2-r^2}} (R^2 - r^2 - x^2)\, \mathrm{d}x = 2\pi\left[(R^2 - r^2)x - \frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{0}^{\sqrt{R^2-r^2}} = \\
&= 2\pi\left[(R^2 - r^2)\sqrt{R^2 - r^2} - \frac{(\sqrt{R^2 - r^2})^3}{3}\right] = 2\pi\left[(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right] = \\
&= \frac{4\pi}{3}(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.3.10 *Sea R la región del plano limitada por la recta $y - 2x = 0$ y la parábola $x^2 - y = 0$. Utilice el método de Arandelas para calcular el volumen del sólido obtenido al rotar R alrededor de*

1. $y = 0$.
2. $x = 0$.
3. $y = 5$.
4. $x = 3$.
5. $y = -1$.
6. $x = -1$.

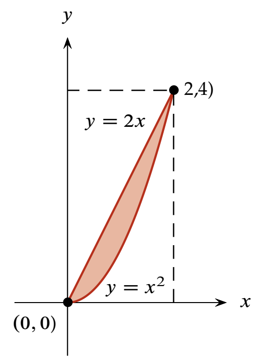
▼ Calculamos las intersecciones entre la recta $\ell(x) = 2x$ & la parábola $p(x) = x^2$.

$$\ell(x) = p(x) \;\Rightarrow\; 2x = x^2 \;\Rightarrow\; x^2 - 2x = 0 \;\Rightarrow\; x(x-2) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \;\&\; x = 2.$$

Los puntos de intersección en el plano son

$$P_1 = (0, 0) \quad P_2 = (2, 4).$$

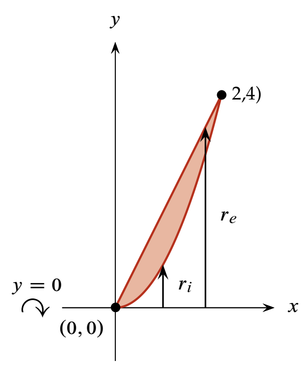
Pintamos la región R en el plano:



1. Eje de rotación $y = 0$.

   Para calcular el área de la arandela se requiere medir la longitud de los radios desde el eje de rotación $y = 0$ hasta las gráficas de las funciones que definen la región:

   a. El radio exterior $r_e = \ell(x) - 0 = \ell(x) = 2x$.
   b. El radio interior $r_i = p(x) - 0 = p(x) = x^2$.



   Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R se calcula como sigue:

$$V_R = \int_0^2 \pi\left[(r_e)^2 - (r_i)^2\right] \mathrm{d}x = \int_0^2 \pi\left[(2x)^2 - (x^2)^2\right] \mathrm{d}x =$$
$$= \pi \int_0^2 \left(4x^2 - x^4\right) \mathrm{d}x = \pi\left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^2 = \frac{64}{15}\pi.$$

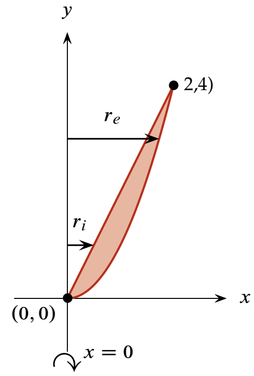
2. Eje de rotación $x = 0$.

   Para poder aplicar el método de las arandelas se requiere medir la longitud de los radios exterior e interior de la frontera de la región que rota alrededor del eje $x = 0$. Estos radios son perpendiculares al eje de rotación. En nuestro caso, el eje de rotación es el eje y. Por lo tanto las funciones que definen la región deben de tener variable independiente y, es decir, de la forma $x = g(y)$. Ahora es fácil despejar la variable x de las ecuaciones y obtener explícitamente las funciones inversas. Veamos:

$$\ell(x) = y = 2x \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{2}y = i\ell(y);$$
$$p(x) = y = x^2 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{y} = ip(y).$$

   La función $i\ell(y)$ es la inversa de la función $\ell(x)$, es decir, $i\ell[\ell(x)] = x$ & $\ell[i\ell(y)] = y$, como se puede comprobar haciendo la composicion de funciones. Lo mismo sucede con la otra función $p(x)$ y su inversa $ip(y)$.

   R se encuentra entre las gráficas de $i\ell(y)$ & $ip(y)$ en el intervalo $[0, 4]$



Para calcular ahora el área de la arandela se requiere medir los radios del eje de rotación $x = 0$ a las gráficas de las funciones que definen la región:

a. El radio exterior $r_e = i\,p(y) - 0 = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$.

b. El radio interior $r_i = i\,\ell(y) - 0 = \dfrac{1}{2}y$.

Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R se calcula como sigue:

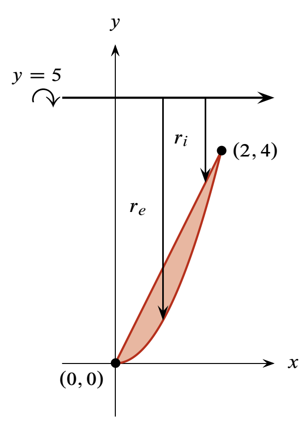
$$V_R = \int_0^4 \pi\left[(r_e)^2 - (r_i)^2\right] \mathrm{d}y = \int_0^4 \pi\left[(\sqrt{y})^2 - \left(\frac{1}{2}y\right)^2\right] \mathrm{d}y =$$
$$= \pi\int_0^4 \left(y - \frac{1}{4}y^2\right) \mathrm{d}y = \pi\left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{12}y^3\right)\Big|_0^4 = \frac{8}{3}\pi.$$

3. Eje de rotación $y = 5$.

Para calcular el área de la arandela se requiere medir la longitud de los radios desde el eje de rotación $y = 5$ hasta las gráficas de las funciones que definen la región:

a. El radio interior $r_i = 5 - \ell(x) = 5 - 2x$.

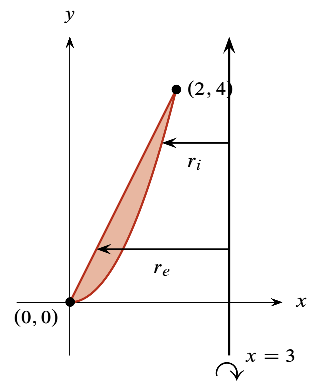
b. El radio exterior $r_e = 5 - p(x) = 5 - x^2$.



Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R se calcula como sigue:

$$V_R = \int_0^2 \pi\left[(r_e)^2 - (r_i)^2\right) \mathrm{d}x = \int_0^2 \pi\left[(5 - x^2)^2 - (5 - 2x)^2\right] \mathrm{d}x =$$
$$= \pi\int_0^2 \left(20x - 14x^2 + x^4\right) \mathrm{d}x = \pi\left(10x^2 - \frac{14}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^2 = \frac{136}{15}\pi.$$

4. Eje de rotación $x = 3$.



Para calcular ahora el área de la arandela se requiere medir la longitud de los radios desde el eje de rotación $x = 3$ hasta las gráficas de las funciones que definen la región:

a. El radio interior $r_i = 3 - i\,p(y) = 3 - \sqrt{y}$.

b. El radio exterior $r_e = 3 - i\,\ell(y) = 3 - \dfrac{1}{2}y$.

Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R se calcula como sigue:

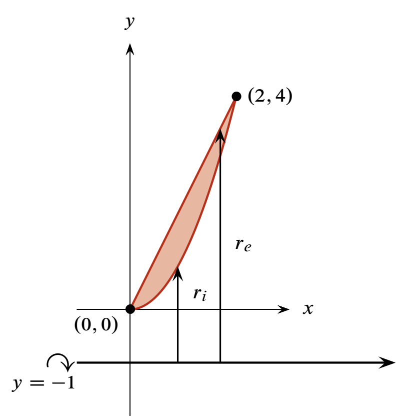
$$V_R = \int_0^4 \pi\left[(r_e)^2 - (r_i)^2\right] \mathrm{d}y = \int_0^4 \pi\left[\left(3 - \frac{1}{2}y\right)^2 - (3 - \sqrt{y})^2\right] \mathrm{d}y =$$
$$= \pi \int_0^4 \left(6\sqrt{y} - 4y + \frac{1}{4}y^2\right) \mathrm{d}y = \pi\left(4y^{\frac{3}{2}} - 2y^2 + \frac{1}{12}y^3\right)\Bigg|_0^4 = \frac{16}{3}\pi.$$

5. Eje de rotación $y = -1$.

Para calcular el área de la arandela se requiere medir la longitud de los radios desde el eje de rotación $y = -1$ hasta las gráficas de las funciones que definen la región:

a. El radio interior $r_i = p(x) - (-1) = x^2 + 1$.

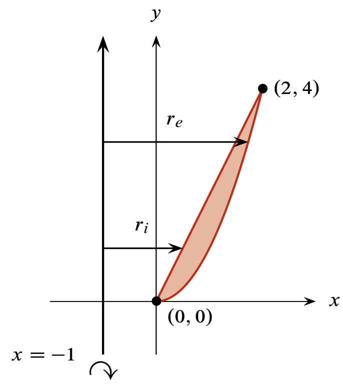
b. El radio exterior $r_e = \ell(x) - (-1) = \ell(x) + 1 = 2x + 1$.



Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R se calcula como sigue:

$$V_R = \int_0^2 \pi\left[(r_e)^2 - (r_i)^2\right] \mathrm{d}x = \int_0^2 \pi\left[(2x+1)^2 - (x^2+1)^2\right] \mathrm{d}x =$$
$$= \pi \int_0^2 \left(4x + 2x^2 - x^4\right) \mathrm{d}x = \pi\left(2x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right)\Bigg|_0^2 = \frac{104}{15}\pi.$$

6. Eje de rotación $x = -1$.



Para calcular ahora el área de la arandela se requiere medir la longitud de los radios desde el eje de rotación $x = -1$ hasta las gráficas de las funciones que definen la región:

a. El radio exterior $r_e = ip(y) - (-1) = \sqrt{y} + 1$.
b. El radio interior $r_i = i\ell(y) - (-1) = \frac{1}{2}y + 1$.

Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R se calcula como sigue:

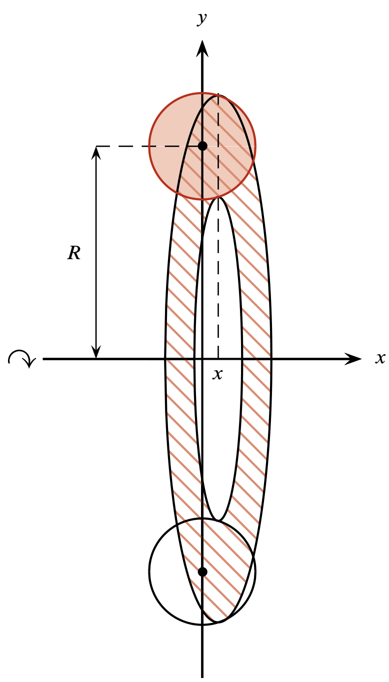
$$V_R = \int_0^4 \pi \left[(r_e)^2 - (r_i)^2\right) \mathrm{d}y = \int_0^4 \pi \left[\left(\sqrt{y} + 1\right)^2 - \left(\frac{1}{2}y + 1\right)^2\right] \mathrm{d}y =$$

$$= \pi \int_0^4 \left(2\sqrt{y} - \frac{1}{4}y^2\right) \mathrm{d}y = \pi \left(\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}y^3\right)\Bigg|_0^4 = \frac{16}{3}\pi.$$

□

Ejemplo 3.3.11 *El sólido de revolución generado al girar un círculo de radio r alrededor de una recta en su mismo plano situada a una distancia $R \geq r$ del centro del círculo se llama toro. Determinar el volumen de dicho sólido.*

▼ Para fijar notación e ideas, podemos suponer que el círculo de radio r tiene su centro en el eje y, y que se gira alrededor del eje x.



Por lo tanto el centro estará en $(0, R)$ y la ecuación del círculo será

$$(x - 0)^2 + (y - R)^2 = r^2,$$

de donde

$$(y - R)^2 = r^2 - x^2 \;\Rightarrow\; y = R \pm \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Se toma el signo positivo para describir el semicírculo superior y el negativo para el inferior. En la figura se describe cómo se vería un corte transversal del sólido al nivel x, para x entre $-r$ & r. Es claro que el radio exterior de la arandela es $f(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}$ y que el radio interior es $g(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}$, de modo que el volumen buscado es

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} \pi \left[(f(x))^2 - (g(x))^2 \right] \mathrm{d}x = \pi \int_{r}^{r} \left[(R + \sqrt{r^2 - x^2})^2 - (R - \sqrt{r^2 - x^2})^2 \right] \mathrm{d}x = \\ &= 2\pi \int_0^r 4R\sqrt{r^2 - x^2}\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Para resolver esta integral, utilizamos sustitución trigonométrica:

$$x = r \operatorname{sen}\theta \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = r\cos\theta \;\&\; r^2 - x^2 = r^2 - r^2\operatorname{sen}^2\theta = r^2\left(1 - \operatorname{sen}^2\theta\right) = r^2\cos^2\theta,$$

tomando en cuenta que el intervalo de integración es, $0 \leqslant x \leqslant r$ con el cambio de variable se convierte en $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, en donde el $\cos\theta$ es no negativo, tenemos:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^r 4R\sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = 8\pi R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2\cos^2\theta} \cdot r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 8\pi R \cdot r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \\ &= 8\pi R \cdot r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta = 4\pi \cdot Rr^2 \left(\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta = 4\pi Rr^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 2\pi^2 r^2 R. \end{aligned}$$

Por lo tanto el volumen del toro es

$$V = 2\pi^2 r^2 R.$$

□

Ejemplo 3.3.12 *Sea R la región del plano limitada por las rectas $y = -2x - 3$, $7x - y + 9 = 0$ & $4x - y + 2 = 0$. Usando el método de Arandelas, calcular el volumen del sólido obtenido al rotar R alrededor de los siguientes ejes:*

1. $y = 0$.
2. $x = 0$.
3. $y = 1$.
4. $x = 2$.
5. $y = -8$.
6. $x = -4$.

▼ Calculamos las intersecciones de las rectas $\ell_1(x) = -2x - 3$, $\ell_2(x) = 7x + 9$, $\ell_3(x) = 4x + 2$.

$$\begin{aligned} &\ell_1(x) = \ell_2(x) \;\Rightarrow\; -2x - 3 = 7x + 9 \;\Rightarrow\; 9x = -12 \;\Rightarrow\; x = -\frac{4}{3} \;\Rightarrow\; y = \ell_1(x) = -\frac{1}{3}. \\ &\ell_1(x) = \ell_3(x) \;\Rightarrow\; -2x - 3 = 4x + 2 \;\Rightarrow\; 6x = -5 \;\Rightarrow\; x = -\frac{5}{6} \;\Rightarrow\; y = \ell_1(x) = -\frac{4}{3}. \\ &\ell_2(x) = \ell_3(x) \;\Rightarrow\; 7x + 9 = 4x + 2 \;\Rightarrow\; 3x = -7 \;\Rightarrow\; x = -\frac{7}{3} \;\Rightarrow\; y = \ell_2(x) = -\frac{22}{3}. \end{aligned}$$

Los puntos de intersección en el plano son

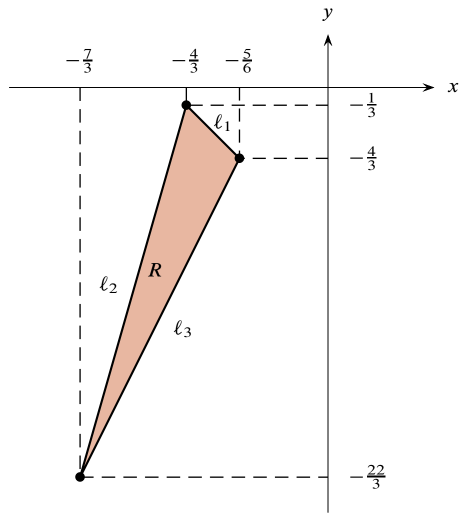
$$P_{12} = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right), \quad P_{13} = \left(-\frac{5}{6}, -\frac{4}{3}\right), \quad P_{23} = \left(-\frac{7}{3}, -\frac{22}{3}\right).$$

Dibujamos la región R en el plano:

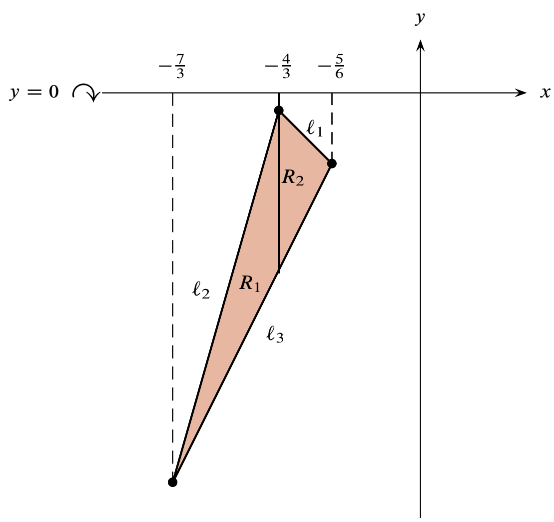
$\ell_1(x) = y = -2x - 3;$

$\ell_2(x) = y = 7x + 9;$

$\ell_3(x) = y = 4x + 2.$



1. Eje de rotación $y = 0$.
   En la siguiente figura, la región R se divide en dos subregiones R_1 & R_2.
   a. R_1 se encuentra entre las gráficas de las rectas $\ell_2(x)$ y $\ell_3(x)$ en el intervalo $\left[-\dfrac{7}{3}, -\dfrac{4}{3}\right]$.
   b. R_2 se encuentra entre las gráficas de las rectas $\ell_1 x)$ y $\ell_3(x)$ en el intervalo $\left[-\dfrac{4}{3}, -\dfrac{5}{6}\right]$.



El área de las arandelas, para cada región, se calcula usando las distancias entre el eje de rotación $y = 0$ y las gráficas de las funciones que definen las regiones:

a. El radio exterior $r_e = 0 - \ell_3(x) = -\ell_3(x) = -(4x + 2) = -4x - 2$, en ambas regiones.
b. El radio interior $r_i = 0 - \ell_2(x) = -\ell_2(x) = -(7x + 9) = -7x - 9$, en la región R_1.
c. El radio interior $r_i = 0 - \ell_1(x) = -\ell_1(x) = -(-2x - 3) = 2x + 3$, en la región R_2.

Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R_1 se calcula como sigue:

$$V_{R_1} = \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} \pi \left[(r_e)^2 - (r_i)^2\right] \mathrm{d}x = \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} \pi \left[(-4x - 2)^2 - (-7x - 9)^2\right] \mathrm{d}x =$$

$$= \pi \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} -11\left(7 + 10x + 3x^2\right) \mathrm{d}x = -11\pi\left(7x + 5x^2 + x^3\right)\Big|_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} = 11\pi.$$

El volumen del sólido de revolución de la región R_2 es

$$V_{R_2} = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} \pi \left[(r_e)^2 - (r_i)^2\right] \mathrm{d}x = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} \pi \left[(-4x-2)^2 - (2x+3)^2\right] \mathrm{d}x =$$

$$= \pi \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} \left(-5 + 4x + 12x^2\right) \mathrm{d}x = \pi \left(-5x + 2x^2 + 4x^3\right) \Big|_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} = \frac{5}{2}\pi.$$

El volumen del sólido de revolución solicitado es

$$\mathrm{Vol}(R) = \mathrm{Vol}(R_1) + \mathrm{Vol}(R_2) = 11\pi + \frac{5}{2}\pi = \frac{27}{2}\pi.$$

2. Eje de rotación $x = 0$.

   Para poder aplicar el método de las Arandelas se requiere medir los radios exterior e interior de las fronteras de la región que rota alrededor del eje $x = 0$. Estos radios son perpendiculares al eje de rotación. En nuestro caso, el eje de rotación es el eje y. Por lo tanto las funciones que definen la región deben de tener variable independiente y, es decir, de la forma $x = g(y)$. En este caso es fácil despejar la variable x de las ecuaciones de las rectas y obtener explícitamente las funciones inversas. Veamos:

$$\ell_1(x) = y = -2x - 3 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}(y+3) = i\ell_1(y);$$

$$\ell_2(x) = y = 7x + 9 \Rightarrow x = \frac{1}{7}(y-9) = i\ell_2(y);$$

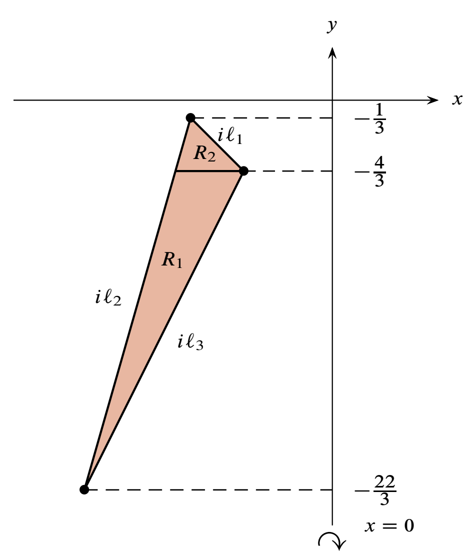
$$\ell_3(x) = y = 4x + 2 \Rightarrow x = \frac{1}{4}(y-2) = i\ell_3(y).$$

   La función $i\ell_1(y)$ es la inversa de la función $\ell_1(x)$, es decir, $i\ell_1[\ell_1(x)] = x$ & $\ell_1[i\ell_1(y)] = y$, como se puede comprobar haciendo la composicion de funciones. Lo mismo sucede con las otras dos funciones y sus funciones inversas correspondientes.

   La región R se divide en dos subregiones R_1 & R_2.

   a. R_1 se encuentra entre las gráficas de las rectas $i\ell_2(y)$ e $i\ell_3(y)$ en el intervalo $\left[-\frac{22}{3}, -\frac{4}{3}\right]$.

   b. R_2 se encuentra entre las gráficas de las rectas $i\ell_2(y)$ e $i\ell_1(y)$ en el intervalo $\left[-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right]$.



   El área de las arandelas se calcula usando las distancias entre el eje de rotación $x = 0$ y las gráficas de las funciones que definen las regiones:

a. El radio exterior $r_e = 0 - i\,\ell_2(y) = -i\,\ell_2(y) = -\frac{1}{7}(y-9)$ en ambas regiones.

b. El radio interior $r_i = 0 - i\,\ell_3(y) = -i\,\ell_3(y) = -\frac{1}{4}(y-2)$ en la región R_1.

c. El radio interior $r_i = 0 - i\,\ell_1(y) = -i\,\ell_1(y) = -\left[-\frac{1}{2}(y+3)\right] = \frac{1}{2}(y+3)$ en la región R_2.

Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R_1 se calcula como sigue:

$$V_{R_1} = \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} \pi\left[(r_e)^2 - (r_i)^2\right] \mathrm{d}y = \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} \pi\left(\left[-\frac{1}{7}(y-9)\right]^2 - \left[-\frac{1}{4}(y-2)\right]^2\right) \mathrm{d}y =$$

$$= \pi \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} \frac{-1}{784}\left(-1\,100 + 92y + 33y^2\right) \mathrm{d}y = \frac{-1}{784}\pi\left(-1\,100y + 46y^2 + 11y^3\right)\Big|_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} = \frac{585}{98}\pi.$$

El volumen del sólido de revolución de la región R_2 es

$$V_{R_2} = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} \pi\left[(r_e)^2 - (r_i)]^2\right] \mathrm{d}x = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} \pi\left[\left[-\frac{1}{7}(y-9)\right]^2 - \left[-\frac{1}{2}(y+3)\right]^2\right] \mathrm{d}y =$$

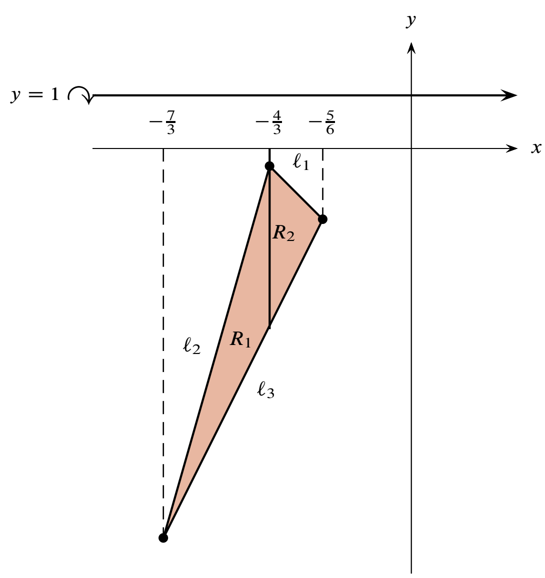
$$= \pi \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} \frac{-3}{196}\left(39 + 122y + 15y^2\right) \mathrm{d}y = \frac{-3}{196}\pi\left(39y + 61y^2 + 5y^3\right)\Big|_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} = \frac{153}{196}\pi.$$

El volumen del sólido de revolución solicitado es

$$\mathrm{Vol}(R) = \mathrm{Vol}(R_1) + \mathrm{Vol}(R_2) = \frac{585}{98}\pi + \frac{153}{196}\pi = \frac{27}{4}\pi.$$

3. Eje de rotación $y = 1$.

El razonamiento es semejante al del inciso 1., pág. 23. Lo que cambia es el eje de rotación y el cálculo de los radios.



El área de las arandelas se calcula usando las distancias entre el eje de rotación $y = 1$ y las gráficas de las funciones que definen las regiones:

a. El radio exterior $r_e = 1 - \ell_3(x) = 1 - (4x+2) = -4x - 1$ en ambas regiones.

b. El radio interior $r_i = 1 - \ell_2(x) = 1 - (7x+9) = -7x - 8$ en la región R_1.

c. El radio interior $r_i = 1 - \ell_1(x) = 1 - (-2x-3) = 2x + 4$ en la región R_2.

Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R_1 se calcula como sigue:

$$V_{R_1} = \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} \pi\left([r_e]^2 - [r_i]^2\right) \mathrm{d}x = \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} \pi\left([-4x-1]^2 - [-7x-8]^2\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \pi \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} \left(-63 - 104x - 33x^2\right) \mathrm{d}x = -\pi\left(63x + 52x^2 + 11x^3\right)\Big|_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} = 14\pi.$$

El volumen del sólido de revolución de la región R_2 es

$$V_{R_2} = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} \pi\left([r_e]^2 - [r_i]^2\right) \mathrm{d}x = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} \pi\left([-4x-1]^2 - [2x+4]^2\right) \mathrm{d}x$$

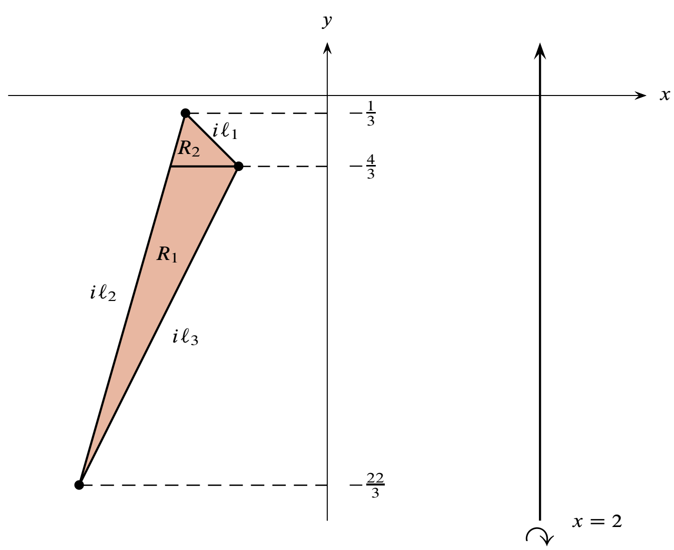
$$= \pi \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} \left(-15 - 8x + 12x^2\right) \mathrm{d}x = \pi\left(-15x - 4x^2 + 4x^3\right)\Big|_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} = 4\pi.$$

El volumen del sólido de revolución solicitado es

$$\mathrm{Vol}(R) = \mathrm{Vol}(R_1) + \mathrm{Vol}(R_2) = 14\pi + 4\pi = 18\pi.$$

4. Eje de rotación $x = 2$.

   El razonamiento es semejante al del inciso 2, p. 24. Lo que cambia es el eje de rotación y el cálculo de los radios.



   El área de las arandelas se calcula usando las distancias del eje de rotación $x = 2$ a las gráficas de las funciones que definen las regiones:

   a. El radio exterior $r_e = 2 - i\ell_2(y) = 2 - \dfrac{1}{7}(y-9) = -\dfrac{1}{7}y + \dfrac{23}{7}$, en ambas regiones.

   b. El radio interior $r_i = 2 - i\ell_3(y) = 2 - \dfrac{1}{4}(y-2) = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{5}{2}$, en la región R_1.

   c. El radio interior $r_i = 2 - i\ell_1(y) = 2 - \left[-\dfrac{1}{2}(y+3)\right] = \dfrac{1}{2}y + \dfrac{7}{2}$, en la región R_2.

Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R_1 se calcula como sigue:

$$V_{R_1} = \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} \pi\left[(r_e)^2 - (r_i)^2\right] \mathrm{d}y = \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} \pi\left[\left(-\frac{1}{7}y + \frac{23}{7}\right)^2 - \left(-\frac{1}{4}y + \frac{5}{2}\right)^2\right] \mathrm{d}y =$$

$$= \pi\int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} \frac{1}{784}\left(3\,564 + 244y - 33y^2\right) \mathrm{d}y = \frac{1}{784}\left(3\,564y + 122y^2 - 11y^3\right)\Big|_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} = \frac{1\,341}{98}\pi.$$

El volumen del sólido de revolución de la región R_2 es

$$V_{R_2} = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} \pi\left[(r_e)^2 - (r_i)^2\right] \mathrm{d}y = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} \pi\left[\left(-\frac{1}{7}y + \frac{23}{7}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}y + \frac{7}{2}\right)^2\right] \mathrm{d}y =$$

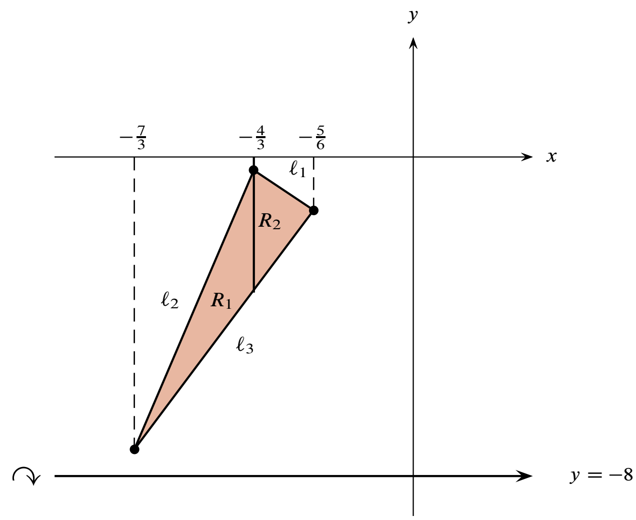
$$= \pi\int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} -\frac{15}{196}\left(19 + 58y + 3y^2\right) \mathrm{d}y = -\frac{15}{196}\pi\left(19y + 29y^2 + y^3\right)\Big|_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} = \frac{405}{196}\pi.$$

El volumen del sólido de revolución solicitado es

$$\mathrm{Vol}(R) = \mathrm{Vol}(R_1) + \mathrm{Vol}(R_2) = \frac{1\,341}{98}\pi + \frac{405}{196}\pi = \frac{63}{4}\pi.$$

5. Eje de rotación $y = -8$.

   El razonamiento es semejante al del inciso 1., pág. 23. Lo que cambia es el eje de rotación y el cálculo de los radios.



El área de las arandelas se calcula usando las distancias del eje de rotación $y = -8$ a las gráficas de las funciones que definen las regiones:

a. El radio interior $r_i = \ell_3(x) - (-8) = (4x + 2) + 8 = 4x + 10$, en ambas regiones.
b. El radio exterior $r_e = \ell_2(x) - (-8) = (7x + 9) + 8 = 7x + 17$, en la región R_1.
c. El radio exterior $r_e = \ell_1(x) - (-8) = (-2x - 3) + 8 = -2x + 5$, en la región R_2.

Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R_1 se calcula como sigue:

$$V_{R_1} = \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} \pi\left[(r_e)^2 - (r_i)^2\right] \mathrm{d}x = \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} \pi\left[(7x + 17)^2 - (4x + 10)^2\right] \mathrm{d}x =$$

$$= \pi\int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} \left(189 + 158x + 33x^2\right) \mathrm{d}x = \pi\left(189x + 79x^2 + 11x^3\right)\Big|_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} = 13\pi.$$

El volumen del sólido de revolución de la región R_2 es

$$V_{R_2} = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} \pi\left[(r_e)^2 - (r_i)^2\right] \mathrm{d}x = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} \pi\left[(-2x+5)^2 - (4x+10)^2\right] \mathrm{d}x =$$

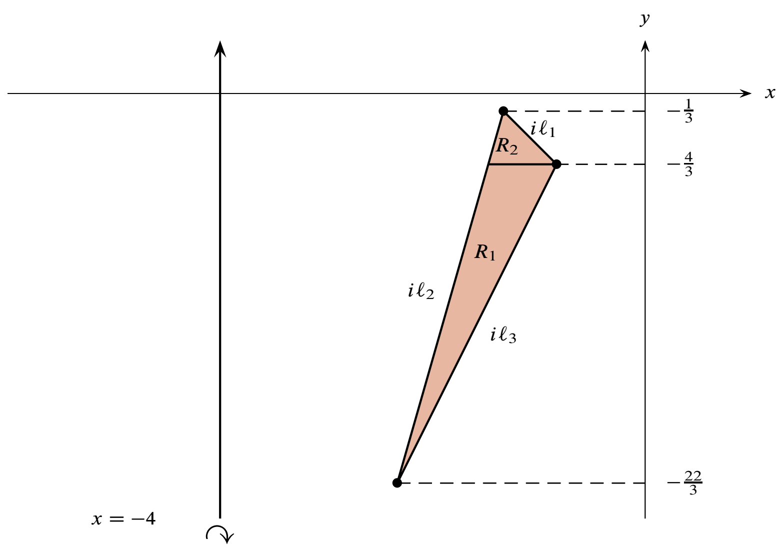
$$= \pi\int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} \left(-75 - 100x - 12x^2\right) \mathrm{d}x = -\pi\left(75x + 50x^2 + 4x^3\right)\Big|_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} = \frac{19}{2}\pi.$$

El volumen del sólido de revolución solicitado es

$$\mathrm{Vol}(R) = \mathrm{Vol}(R_1) + \mathrm{Vol}(R_2) = 13\pi + \frac{19}{2}\pi = \frac{45}{2}\pi.$$

6. Eje de rotación $x = -4$.

El razonamiento es semejante al del inciso 2., pág. 24. Lo que cambia es el eje de rotación y el cálculo de los radios.



El área de las arandelas se calcula usando las distancias entre el eje de rotación $x = -4$ y las gráficas de las funciones que definen las regiones:

a. El radio interior $r_i = i\ell_2(y) - (-4) = \frac{1}{7}(y-9) + 4 = \frac{1}{7}y + \frac{19}{7}$, en ambas regiones.

b. El radio exterior $r_e = i\ell_3(y) - (-4) = \frac{1}{4}(y-2) + 4 = \frac{1}{4}y + \frac{7}{2}$, en la región R_1.

c. El radio exterior $r_e = i\ell_1(y) - (-4) = -\frac{1}{2}(y+3) + 4 = -\frac{1}{2}y + \frac{5}{2}$, en la región R_2.

Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R_1 se calcula como sigue:

$$V_{R_1} = \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} \pi\left[(r_e)^2 - (r_i)^2\right] \mathrm{d}y = \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} \pi\left[\left(\frac{1}{4}y + \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{7}y + \frac{19}{7}\right)^2\right] \mathrm{d}y =$$

$$= \pi\int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} \frac{1}{784}\left(3\,828 + 764y + 33y^3\right) \mathrm{d}y = \frac{1}{784}\pi\left(3\,828y + 382y + 11y^2\right)\Big|_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} =$$

$$= \frac{927}{98}\pi.$$

El volumen del sólido de revolución de la región R_2 es

$$V_{R_2} = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} \pi \left[(r_e)^2 - (r_i)^2 \right] \mathrm{d}y = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} \pi \left[\left(-\frac{1}{2}y + \frac{5}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{7}y + \frac{19}{7} \right)^2 \right] \mathrm{d}y =$$

$$= \pi \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} \frac{3}{196} \left(-73 - 214y + 15y^2 \right) \mathrm{d}y = \frac{3}{196}\pi \left(-73y - 107y^2 + 5y^3 \right) \Big|_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} =$$

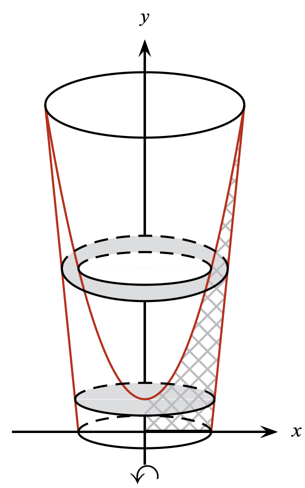
$$= \frac{351}{196}\pi.$$

El volumen del sólido de revolución solicitado es

$$\mathrm{Vol}(R) = \mathrm{Vol}(R_1) + \mathrm{Vol}(R_2) = \frac{927}{98}\pi + \frac{351}{196}\pi = \frac{45}{4}\pi.$$

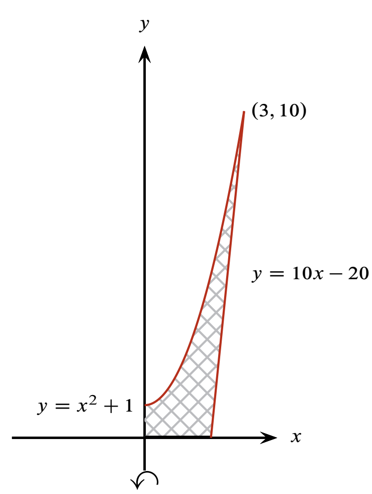
□

Ejemplo 3.3.13 *Un vaso tiene la forma de cono truncado al que se le ha extraído un paraboloide de revolución como se muestra en la figura.*



Calcular el volumen del material necesario para fabricar el vaso.

▼ El sólido se obtiene al girar alrededor del eje y, la región del primer cuadrante comprendida entre los ejes coordenados, la recta $y = 10x - 20$ y la parábola $y = x^2 + 1$.



La región sombreada genera el volumen del vaso. Una rápida inspección da como resultado que la recta $y = 10x - 20$ y la parábola $y = x^2 + 1$ se intersecan en el punto $(3, 10)$:

$$x^2 + 1 = 10x - 20 \Rightarrow x^2 - 10x + 21 = 0 \Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(21)}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{16}}{2} = 5 \pm 2 = \begin{cases} 3; \\ 7. \end{cases}$$

Tomamos el primer valor de x; para dicho valor $x = 3$ tenemos $y = 10$.
Podemos calcular el volumen buscado con el método de las Arandelas, pero como ahora el eje de revolución es el vertical, tendremos que integrar con respecto a y desde 0 hasta 10. También tenemos que tomar en cuenta que las secciones transversales del sólido difieren a distintas alturas.

- Si $0 \le y \le 1$, la sección es un círculo.
- Si $1 \le y \le 10$, la sección es una arandela.

Los radios correspondientes se obtienen escribiendo las ecuaciones de la recta y parábola para x en función de y:

$$y = 10x - 20 \Rightarrow 10x = y + 20 \Rightarrow x = \frac{1}{10}y + 2. \qquad \boxed{\text{Para la recta}}$$

$$y = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y - 1 \Rightarrow x = \sqrt{y - 1}. \qquad \boxed{\text{Para la parábola}}$$

Así resulta que

- Si $0 \le y \le 1$, el radio del círculo es $x = \dfrac{1}{10}y + 2$; entonces la función del área de la sección transversal es
$$A(y) = \pi\left(\frac{1}{10}y + 2\right)^2.$$
- Si $1 \le y \le 10$, el radio exterior de la arandela es $r_e = \dfrac{1}{10}y + 2$, mientras que el radio interior es $r_i = \sqrt{y-1}$; de aquí que el área de la arandela será
$$A(y) = \pi(r_e^2 - r_i^2) = \pi\left[\left(\frac{1}{10}y + 2\right)^2 - \left(\sqrt{y-1}\right)^2\right] = \pi\left[\frac{y^2}{100} + \frac{4y}{10} + 4 - (y - 1)\right] =$$
$$= \pi\left[\frac{1}{100}y^2 - \frac{6}{10}y + 5\right].$$

Con estas consideraciones, el volumen deseado es

$$\begin{aligned}
\text{Volumen} &= \int_0^{10} A(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \pi\left(\frac{1}{10}y + 2\right)^2 \mathrm{d}y + \int_1^{10} \pi\left[\frac{1}{100}y^2 - \frac{6}{10}y + 5\right] \mathrm{d}y = \\
&= \frac{\pi}{100}\int_0^1 (y+20)^2\,\mathrm{d}y + \frac{\pi}{100}\int_1^{10}(y^2 - 60y + 500)\,\mathrm{d}y = \\
&= \frac{\pi}{100}\frac{(y+20)^3}{3}\bigg|_0^1 + \frac{\pi}{100}\left(\frac{y^3}{3} - 30y^2 + 500y\right)\bigg|_1^{10} = \\
&= \frac{\pi}{300}(21^3 - 20^3) + \frac{\pi}{100}\left[\frac{10^3}{3} - 30\cdot 10^2 + 500\cdot 10 - \left(\frac{1^3}{3} - 30 + 500\right)\right] = \\
&= \frac{\pi}{300}1\,261 + \frac{\pi}{100}\left[\frac{1\,000}{3} - 3\,000 + 5\,000 - \frac{1}{3} + 30 - 500\right] = \\
&= \frac{\pi}{300}1\,261 + \frac{\pi}{100}1\,863 = 22.8\overline{3}\pi.
\end{aligned}$$

Por lo anterior el volumen del material necesario para fabricar el vaso es $22.8\overline{3}\pi \approx 71.733$ u^3.

□

Ejercicios 3.3.2 *Volúmenes.* *Soluciones en la página 52*

1. Sea R la región del plano limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $4x - y - 1 = 0$. Calcular el volumen del sólido que se obtiene al rotar la región alrededor de los siguientes ejes:

   a. $y = 0$.
   b. $x = 0$.
   c. $y = -2$.
   d. $x = -2$.
   e. $y = 15$.
   f. $x = 5$.

2. Sea R la región del plano limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $x - y = 0$. Calcular el volumen del sólido que se obtiene al rotar la región alrededor de los siguientes ejes:

   a. $y = 0$.
   b. $x = 0$.
   c. $y = -1$.
   d. $x = -1$.
   e. $y = 6$.
   f. $x = 6$.

3. Sea R la región del plano limitada por el triángulo con vértices $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 1)$. Calcular el volumen del sólido que se obtiene al rotar la región alrededor de los siguientes ejes:

   a. $y = 0$.
   b. $x = 0$.
   c. $y = -2$.
   d. $x = -2$.
   e. $y = 3$.
   f. $x = 3$.

4. Sea R la región limitada por el eje x y la gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x$ con $x \in [0, 2\pi]$. Calcular el volumen del sólido que se obtiene al rotar la región R alrededor de los siguientes ejes:

   a. $y = 1$.
   b. $y = -3$.
   c. $y = 0$.

5. Sea R la región acotada por las gráficas de la funciones $y = \operatorname{sen} x$, $y = 1 + \operatorname{sen} x$, la recta $x = 0$ & la recta $x = \pi$. Calcular el volumen del sólido que se obtiene al rotar la región R alrededor de los siguientes ejes:

   a. $y = 0$.
   b. $y = -1$.
   c. $y = 4$.

6. Sea R la región acotada por las gráficas de la funciones $y = -\operatorname{sen} x$, $y = 2 \operatorname{sen} x$ donde $x \in [-\pi, 0]$. Calcular el volumen del sólido que se obtiene al rotar la región R alrededor de los siguientes ejes:

   a. $y = 3$.
   b. $y = -3$.
   c. $x = 0$.
   d. $x = 1$.
   e. $x = -4$.

7. Sea R la región acotada por la gráfica de la función $y = \ln x$, la recta $x = 1$, la recta $x = e$ y el eje x. Calcular el volumen del sólido que se obtiene al rotar la región R de los siguientes ejes:

   a. $y = 0$.
   b. $x = 0$.
   c. $y = 3$.
   d. $x = 3$.
   e. $y = -2$.
   f. $x = -2$.

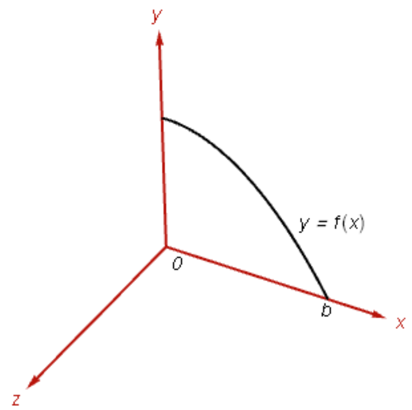
8. Sea R la región acotada por la gráfica de la función $y = \operatorname{arcsen} x$, recta $y = \dfrac{\pi}{2}$ y el eje y. Calcular el volumen del sólido que se obtiene al rotar la región R de los siguientes ejes:

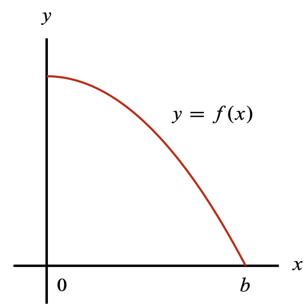
a. $x = 0$.
b. $x = -1$.
c. $x = 3$.
d. $y = 0$.
e. $y = -1$.
f. $y = 2$.

3.3.3 Volúmenes de sólidos de revolución. Método de Cascarones Cilíndricos

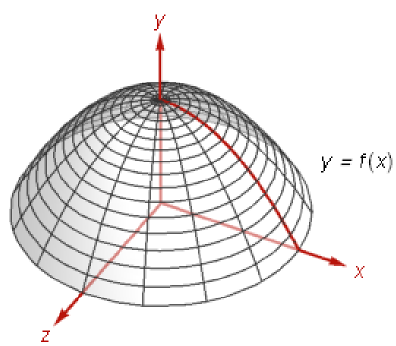
El método que presentamos ahora parte de un principio diferente para calcular un volumen de revolución. Vamos a considerar el sólido como si estuviera formado por hojas o capas cilíndricas muy delgadas.

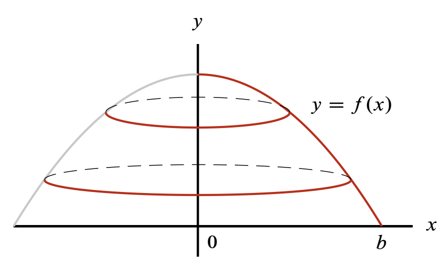
1. Se grafica la curva y se determina la región que rota alrededor del eje y. En este caso, el dominio de esta curva es $[0, b]$.





2. El sólido de revolución se obtiene al rotar la región.





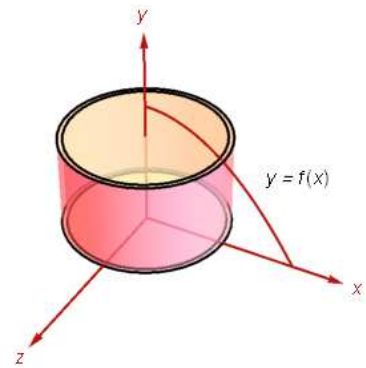
3. Para calcular el volumen del sólido es preciso lo siguiente:

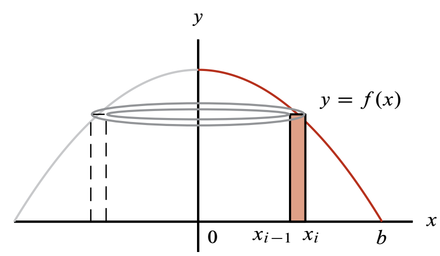
   - ⋆ Se hace una partición del intervalo $[0, b]$ que define la región que rota, esto es

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b.$$

- ⋆ Para cada subintervalo de la partición, $[x_{i-1}, x_i]$, tomamos el punto medio $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Construimos el rectángulo de altura $f(x_i^*)$ y base $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

- ⋆ Al rotar este rectángulo alrededor del eje y, como se ve en la figura,





  obtenemos un cascarón cilindrico.

- ⋆ Para calcular el volumen de este cascarón cilíndrico, restamos del volumen del cilindro exterior con radio x_i el volumen del cilindro interior con radio x_{i-1} [ambos cilindros con altura $f(x_i^*)$].

$$\begin{aligned} V_e - V_i &= \pi(x_i)^2 f(x_i^*) - \pi(x_{i-1})^2 f(x_i^*) = \pi[(x_i)^2 - (x_{i-1})^2] f(x_i^*) = \\ &= \pi(x_i - x_{i-1})(x_i + x_{i-1}) f(x_i^*) = 2\pi(x_i - x_{i-1}) \frac{(x_i + x_{i-1})}{2} f(x_i^*) = \\ &= 2\pi x_i^* f(x_i^*) \Delta_i x. \qquad \boxed{\Delta_i x = x_i - x_{i-1}; \quad x_i^* = \frac{(x_i + x_{i-1})}{2}.} \end{aligned}$$

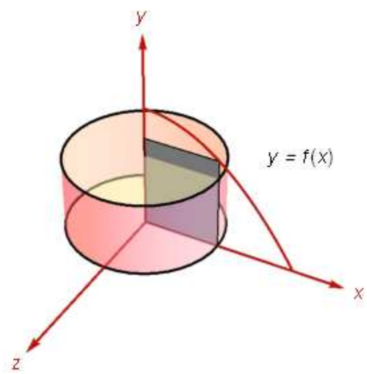
- ⋆ El volumen del sólido de revolución B se aproxima sumando los volúmenes de los cascarones cilíndricos así contruidos:

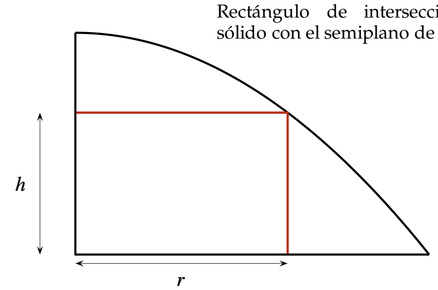
$$\mathrm{V}(B) \approx \sum_{i=i}^{n} 2\pi x_i^* f(x_i^*) \Delta_i x = 2\pi \sum_{i=i}^{n} x_i^* f(x_i^*) \Delta_i x.$$

- ⋆ La aproximación será mejor a medida que tomamos particiones más finas, con n tendiendo a ∞ y a la vez Δx_i tendiendo a cero. El volumen del sólido es

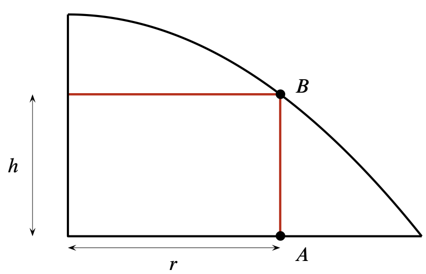
$$\mathrm{Vol}(B) = 2\pi \int_0^b x f(x)\, \mathrm{d}x.$$

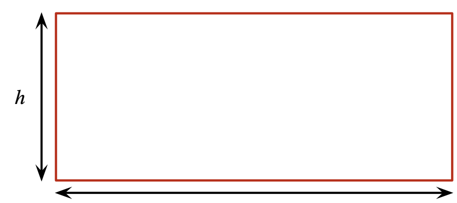
Si usamos un plano que pasa por el eje de revolución, como el de la figura:





Obtenemos un corte del sólido de revolución en donde se ve el cascarón cilíndrico de radio r & altura h. El perímetro de la base del cascarón cilíndrico es $2\pi r$.





El cascarón cilíndrico se obtiene haciendo rotar el segmento $\overline{AB}$ alrededor del eje y (el eje de rotación). Esta recta se encuentra a una distancia r del eje de rotación (radio del cilindro) y tiene una longitud h (altura del cilindro). Tenemos por lo tanto:

$$\text{Área lateral de cilindro } = A(r) = 2\pi r h.$$

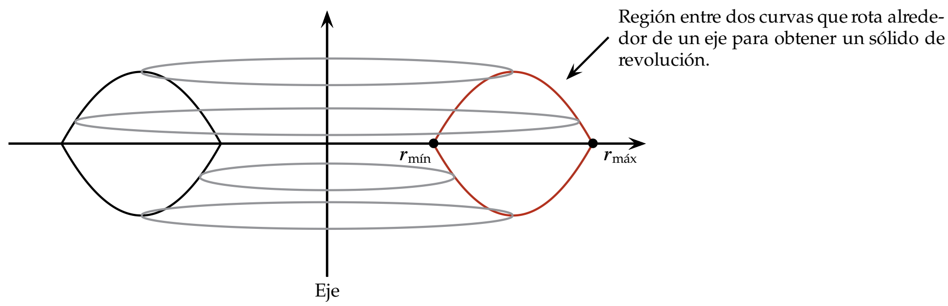
Para este ejemplo, $r = x \in [0, b]$ & $h = f(x)$ es la función que define la región que rota.

Prodríamos pensar que cada capa cilíndrica tiene un grosor $\mathrm{d}r$ y por lo tanto el volumen de revolución es

$$V = \int_{r_{\text{mín}}}^{r_{\text{máx}}} 2\pi r h \, \mathrm{d}r = \int_0^b 2\pi x f(x) \, \mathrm{d}x.$$

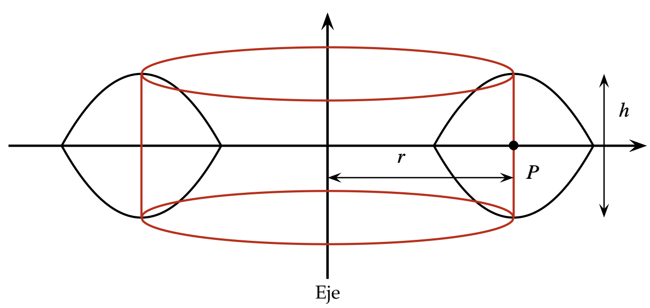
Aquí, por supuesto, se debe escribir $h = f(r)$ como función de $r = x$ para poder realizar el cálculo. Los límites de integración $r_{\text{mín}}$ & $r_{\text{máx}}$ son los extremos del dominio de la función que define la región que rota.

Rotación de una región entre dos curvas



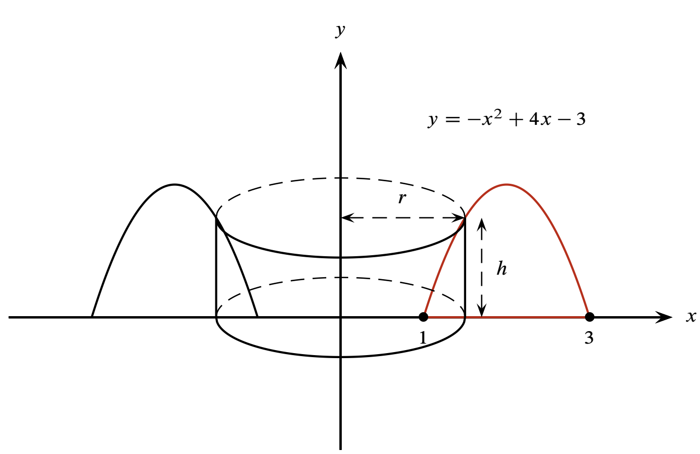
Debe tenerse claro que (veánse figuras):

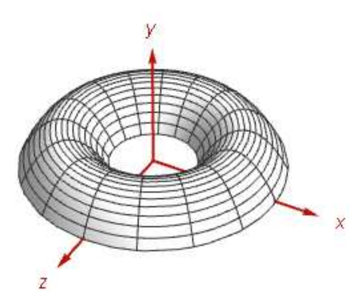
- El intervalo $[r_{\text{mín}}, r_{\text{máx}}]$ define a la región entre las curvas.
- $P \in [r_{\text{mín}}, r_{\text{máx}}]$.
- r es el radio de cada cascarón cilíndrico y es la distancia de punto P a la recta que es el eje de revolución.
- h mide la longitud del segmento entre las curvas en el punto P. Este segmento es paralelo al eje de revolución.



Ejemplo 3.3.14 *Se tiene una región limitada como sigue: arriba por la parábola* $y = -x^2 + 4x - 3$*, abajo por el eje* x*. Calcular el volumen del sólido generado al rotar la región alrededor del eje* y*.*

▼ La región que se rota es la señalada en la figura y está comprendida entre la parábola con vértice $(2, 1)$ que abre sus ramas hacia abajo y el eje x al cual corta en $x = 1$ y en $x = 3$.



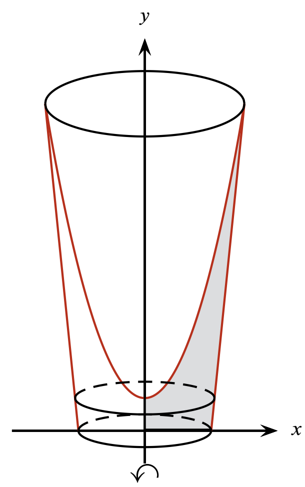


Como el eje de giro es el eje y entonces, el radio es $r = x$ & la altura es $h = f(x) = -x^2 + 4x - 3$; así que el volumen buscado es

$$V = \int_1^3 2\pi r h \, dr = \int_1^3 2\pi x(-x^2 + 4x - 3) \, dx = 2\pi \int_1^3 (-x^3 + 4x^2 - 3x) \, dx =$$
$$= 2\pi \left[-\frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} \right] \Bigg|_1^3 = 2\pi \left[-\frac{81-1}{4} + 4\frac{27-1}{3} - 3\frac{9-1}{2} \right] =$$
$$= 2\pi \left[-20 + \frac{104}{3} - 12 \right] = 2\pi \frac{8}{3} = \frac{16}{3}\pi \text{ u}^3.$$

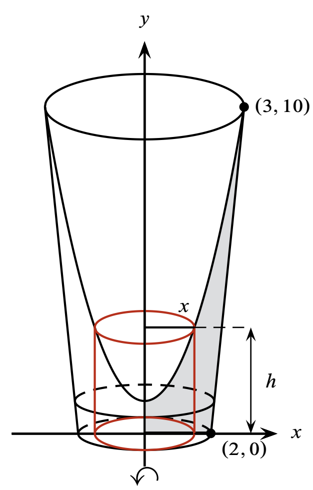
□

Ejemplo 3.3.15 *Calcular el volumen del sólido del ejemplo 3.3.13 usando cascarones cilíndricos*



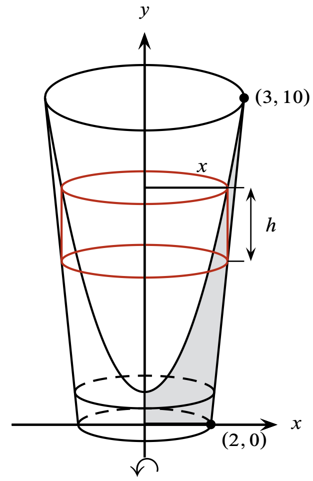
▼ El sólido se genera al rotar, alrededor del eje y, la región sombreada, limitada por la parábola $y = x^2+1$, por el eje y, por el eje x & por la recta $y = 10x - 20$. Al tomar los cascarones cilíndricos, el radio r de estos coincide con x y varía de 0 a 3; las correspondientes alturas h se definen en dos casos distintos:

1. Si $0 \le x \le 2$, entonces $h = x^2 + 1$.



2. Si $2 \le x \le 3$, entonces el segmento vertical es la diferencia entre la parábola $y = x^2 + 1$ y la recta $y = 10x - 20$, por lo tanto:

$$h = (x^2 + 1) - (10x - 20) = x^2 - 10x + 21.$$



Entonces el volumen es

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^3 2\pi r h \, \mathrm{d}r = 2\pi \int_0^3 x h(x) \, \mathrm{d}x = 2\pi \left[\int_0^2 x(x^2+1) \, \mathrm{d}x + \int_2^3 x(x^2-10x+21) \, \mathrm{d}x \right] = \\
&= 2\pi \left[\int_0^2 (x^3+x) \, \mathrm{d}x + \int_2^3 (x^3-10x^2+21x) \, \mathrm{d}x \right] = \\
&= 2\pi \left[\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right) \right] \Bigg|_0^2 + \left(\frac{x^4}{4} - 10\frac{x^3}{3} + 21\frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_2^3 = 2\pi \left[4 + 2 + \frac{81-16}{4} - 10\frac{27-8}{3} + 21\frac{9-4}{2} \right] = \\
&= 2\pi \left(6 + \frac{65}{4} - \frac{190}{3} + \frac{105}{2} \right) = 2\pi \frac{72+195-760+630}{12} = \frac{137}{6}\pi \approx 71.733 \text{ u}^3,
\end{aligned}
$$

esto es, el mismo resultado que obtuvimos antes, con un poco menos de esfuerzo.

□

Ejemplo 3.3.16 *Sea R la región del plano limitada por la recta $y - 2x = 0$ y la parábola $-x^2 + y = 0$. Utilice el método de Cascarones Cilíndricos para calcular el volumen del sólido obtenido al rotar R alrededor de los siguientes ejes:*

1. $x = 0$.
2. $y = 0$.
3. $x = 3$.
4. $y = 5$.
5. $x = -1$.
6. $y = -1$.

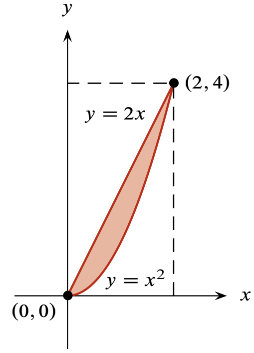
▼ Calculamos las intersecciones entra la recta $y = \ell(x) = 2x$ & la parábola $y = p(x) = x^2$.

$$\ell(x) = p(x) \Rightarrow 2x = x^2 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \;\&\; x = 2.$$

Los puntos de intersección en el plano son

$$P_1 = (0,0); \quad P_2 = (2,4).$$

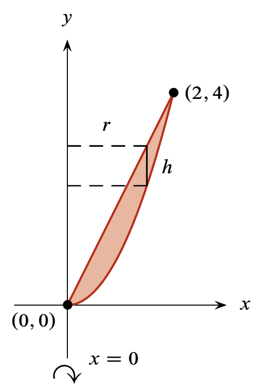
Dibujamos la región R en el plano:



1. Eje de rotación $x = 0$.

   Para calcular el área lateral de un cascarón cilíndrico, se requiere calcular su altura h y su radio r (perpendicular al eje de rotación):

   a. La altura del cascarón cilíndrico es $h = \ell(x) - p(x) = 2x - x^2$.
   b. El radio del cascarón es $r = x$.



   Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R se calcula como sigue:

$$V_R = \int_0^2 2\pi r h \, \mathrm{d}r = \int_0^2 2\pi x \, [\ell(x) - p(x)] \, \mathrm{d}x = \int_0^2 2\pi x \left(2x - x^2\right) \mathrm{d}x = \int_0^2 2\pi \left(2x^2 - x^3\right) \mathrm{d}x =$$
$$= 2\pi \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^2 = \frac{8}{3}\pi.$$

2. Eje de rotación $y = 0$.

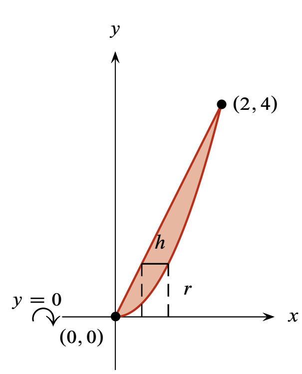
   Para poder medir la altura h del cascarón, las funciones que definen a la región deben tener variable independiente y, es decir, de la forma $x = g(y)$. En este caso es fácil despejar la variable x de las ecuaciones de la recta y de la parábola para obtener explícitamente las funciones inversas. Veamos:

$$\ell(x) = y = 2x \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{2}y = i\ell(y);$$
$$p(x) = y = x^2 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{y} = ip(y).$$

   La función $i\ell(y)$ es la inversa de la función $\ell(x)$, es decir, $i\ell[\ell(x)] = x$ & $\ell[i\ell(y)] = y$, como se puede comprobar haciendo la composicion de funciones. Lo mismo sucede con la otra función $p(x)$ y su función inversa $ip(y)$.

   R se encuentra entre las gráficas de las rectas $i\ell(y)$ & $ip(y)$ en el intervalo $[0, 4]$. Tenemos:

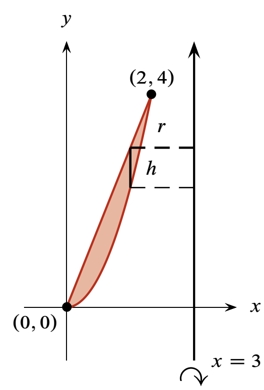
   a. El radio de un cascarón cilíndrico, perpendicular al eje de rotación $y = 0$ es $r = y$.
   b. La altura del cascarón cilíndrico es $h = ip(y) - i\ell(y) = \sqrt{y} - \frac{1}{2}y$.



Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R se calcula como sigue:

$$V_R = \int_0^4 2\pi r h \, \mathrm{d}r = \int_0^4 2\pi y\, [ip(y) - i\ell(y)] \, \mathrm{d}y = \int_0^4 2\pi y \left(\sqrt{y} - \tfrac{1}{2}y\right) \mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^4 2\pi \left(y^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{2}y^2\right) \mathrm{d}y = 2\pi \left(\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}y^3\right) \Big|_0^4 = \frac{64}{15}\pi.$$

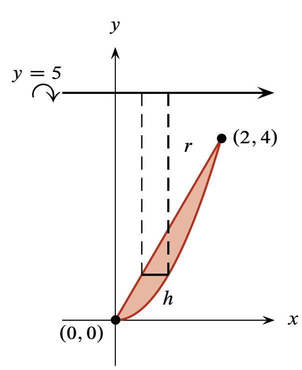
3. Eje de rotación $x = 3$.
   a. El radio del cascarón, $r = 3 - x$.
   b. La altura del cascarón, $\ell(x) - p(x) = 2x - x^2$.



Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R se calcula como sigue:

$$V_R = \int_0^2 2\pi r h \, \mathrm{d}r = \int_0^2 2\pi(3 - x)\, [\ell(x) - p(x)] \, \mathrm{d}x = \int_0^2 2\pi(3 - x) \left(2x - x^2\right) \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^2 2\pi \left(6x - 5x^2 + x^3\right) \mathrm{d}x = 2\pi \left(3x^2 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4\right) \Big|_0^2 = \frac{16}{3}\pi.$$

4. Eje de rotación $y = 5$.
   a. El radio del cascarón, $r = 5 - y$.
   b. La altura del cascarón, $ip(y) - i\ell(y) = \sqrt{y} - \dfrac{1}{2}y$.

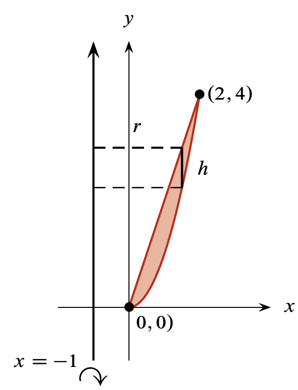


Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R se calcula como sigue:

$$V_R = \int_0^4 2\pi r h \, \mathrm{d}r = \int_0^4 2\pi(5 - y)\, [ip(y) - i\ell(y)] \, \mathrm{d}y = \int_0^4 2\pi(5 - y) \left(\sqrt{y} - \tfrac{1}{2}y\right) \mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^4 2\pi \left(5y^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{2}y - y\sqrt{y} + \frac{1}{2}y^2\right) \mathrm{d}y = 2\pi \left(\frac{10}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{4}y^2 - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{6}y^3\right) \Big|_0^4 = \frac{136}{15}\pi.$$

5. Eje de rotación $x = -1$.

   a. El radio del cascarón, $r = x - (-1) = x + 1$.
   b. La altura del cascarón, $\ell(x) - p(x) = 2x - x^2$.

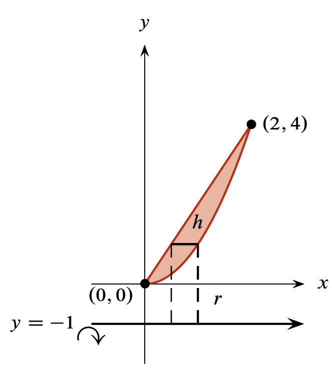


Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R se calcula como sigue:

$$V_R = \int_0^2 2\pi r h \, \mathrm{d}r = \int_0^2 2\pi(x+1)\,[\ell(x) - p(x)] \, \mathrm{d}x = \int_0^2 2\pi(x+1)\left(2x - x^2\right) \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^2 2\pi\left(2x + x^2 - x^3\right) \mathrm{d}x = 2\pi\left(x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^2 = \frac{16}{3}\pi.$$

6. Eje de rotación $y = -1$.

   a. El radio del cascarón, $r = y - (-1) = y + 1$.
   b. La altura del cascarón, $i\,p(y) - i\,\ell(y) = \sqrt{y} - \frac{1}{2}y$.



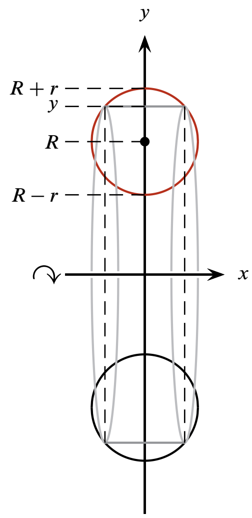
Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución de la región R se calcula como sigue:

$$V_R = \int_0^4 2\pi r h \, \mathrm{d}r = \int_0^4 2\pi(y+1)\,[i\,p(y) - i\,\ell(y)] \, \mathrm{d}y = \int_0^4 2\pi(y+1)\left(\sqrt{y} - \tfrac{1}{2}y\right) \mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^4 2\pi\left(\sqrt{y} - \frac{1}{2}y + y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}y^2\right) \mathrm{d}y = 2\pi\left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}y^2 + \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}y^3\right)\Big|_0^4 = \frac{104}{15}\pi.$$

□

Ejemplo 3.3.17 *Calcular el volumen del sólido de revolución generado al girar un círculo de radio $r > 0$ alrededor de un eje situado a una distancia $R > r$ de su centro.*

▼ Este sólido es el toro del ejemplo 3.3.11; ahora usando el método de Cascarones Cilíndricos.



En este caso hemos tomado el eje x como el de revolución. El círculo tiene ecuación:

$$x^2 + (y - R)^2 = r^2. \tag{3.2}$$

Al tomar una capa cilíndrica, para un segmento vertical con $R - r \leq y \leq R + r$ tenemos que el radio de la capa es el propio y, mientras que la altura h es lo que mide el segmento de $-x$ a x, donde x es el correspondiente valor que cumple (3.2), es decir:

$$x = \sqrt{r^2 - (y - R)^2}; \qquad -x = -\sqrt{r^2 - (y - R)^2};$$
$$h = x - (-x) = 2x = 2\sqrt{r^2 - (y - R)^2}.$$

Por lo tanto el volumen es

$$V = \int_{R-r}^{R+r} 2\pi y h \, \mathrm{d}y = 4\pi \int_{R-r}^{R+r} y\sqrt{r^2 - (y - R)^2} \, \mathrm{d}y = \cdots = 2\pi^2 R r^2.$$

Resolver la integral anterior requiere de técnicas de sustitución trigonométrica que se vieron en el capítulo II. Aquí solamente indicamos el valor final y hacemos hincapié en que se obtiene el mismo resultado utilizando este método o el de las Arandelas.

□

Ejemplo 3.3.18 *Sea R la región del plano limitada por las rectas $y = -2x - 3$, $7x - y + 9 = 0$ & $4x - y + 2 = 0$. Utilice el método de Cascarones Cilíndricos para calcular el volumen del sólido obtenido al rotar R alrededor de los ejes:*

1. $x = 0$.
2. $y = 0$.
3. $x = 2$.
4. $y = 1$.
5. $x = -4$.
6. $y = -8$.

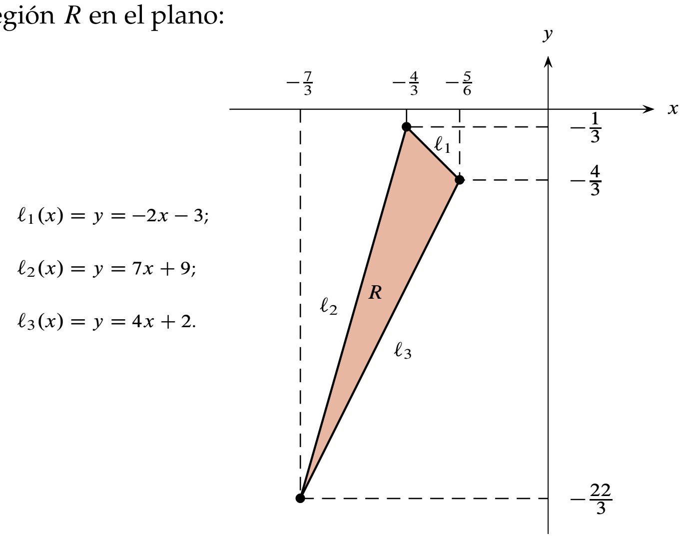
▼ Calculamos las intersecciones de las rectas $\ell_1(x) = -2x - 3$, $\ell_2(x) = 7x + 9$, $\ell_3(x) = 4x + 2$.

$$\ell_1(x) = \ell_2(x) \Rightarrow -2x - 3 = 7x + 9 \Rightarrow 9x = -12 \Rightarrow x = -\frac{4}{3} \Rightarrow y = \ell_1(x) = -\frac{1}{3}.$$
$$\ell_1(x) = \ell_3(x) \Rightarrow -2x - 3 = 4x + 2 \Rightarrow 6x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{6} \Rightarrow y = \ell_1(x) = -\frac{4}{3}.$$
$$\ell_2(x) = \ell_3(x) \Rightarrow 7x + 9 = 4x + 2 \Rightarrow 3x = -7 \Rightarrow x = -\frac{7}{3} \Rightarrow y = \ell_2(x) = -\frac{22}{3}.$$

Los puntos de intersección en el plano son

$$P_{12} = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right), \quad P_{13} = \left(-\frac{5}{6}, -\frac{4}{3}\right), \quad P_{23} = \left(-\frac{7}{3}, -\frac{22}{3}\right).$$

Dibujamos la región R en el plano:

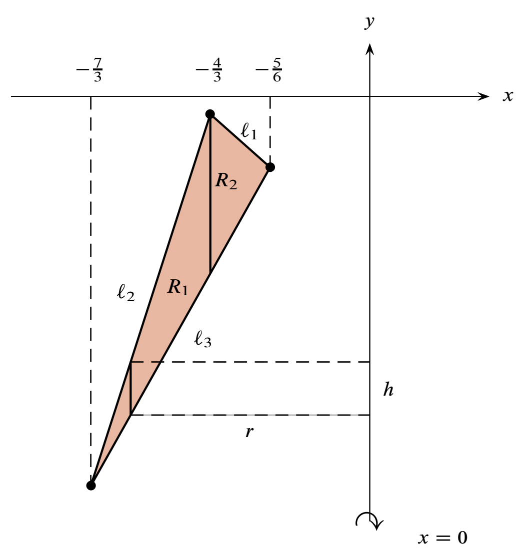


1. Eje de rotación $x = 0$.

   La región R se divide en dos subregiones R_1 y R_2. Véase la siguiente figura.

   a. R_1 se encuentra entre las gráficas de las rectas $\ell_2(x)$ & $\ell_3(x)$ en el intervalo $\left[-\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}\right]$.

   b. R_2 se encuentra entre las gráficas de las rectas $\ell_1 x)$ & $\ell_3(x)$ en el intervalo $\left[-\frac{4}{3}, -\frac{5}{6}\right]$.



   Para calcular el área lateral de los cascarones cilíndricos, debemos tener en consideración:

   a. El eje de un cascarón cilíndrico es el eje de rotación. En este caso el eje y ($x = 0$).
   b. La altura h de un cascarón cilíndrico es un segmento, entre las curvas que definen la región, paralelo al eje de rotación.
   c. El radio r de un cascarón cilíndrico es la distancia entre su altura h y el eje de rotación.

Por lo tanto:

a. En la región R_1, la altura es $h_1 = \ell_2(x) - \ell_3(x) = (7x+9) - (4x+2) = 3x+7$.

b. En la región R_2, la altura es $h_2 = \ell_1(x) - \ell_3(x) = (-2x-3) - (4x+2) = -6x-5$.

c. El radio r en los dos casos es $0 - x = -x$.

El volumen del sólido generado por la región R_1 es

$$V_{R_1} = \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi r h \,\mathrm{d}r = \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi(-x)[\ell_2(x) - \ell_3(x)] \,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi(-x)(3x+7) \,\mathrm{d}x =$$
$$= -2\pi \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} (7x+3x^2) \,\mathrm{d}x = -2\pi \left(\frac{7}{2}x^2 + x^3\right) \Big|_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} = 5\pi.$$

El volumen generado por la región R_2 es

$$V_{R_2} = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} 2\pi r h \,\mathrm{d}r = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} 2\pi(-x)[\ell_1(x) - \ell_3(x)] \,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} 2\pi(-x)(-6x-5) \,\mathrm{d}x =$$
$$= 2\pi \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} (5x+6x^2) \,\mathrm{d}x = 2\pi \left(\frac{5}{2}x^2 + 2x^3\right) \Big|_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} = \tfrac{7}{4}\pi.$$

El volumen del sólido de revolución solicitado es

$$\mathrm{Vol}(R) = \mathrm{Vol}(R_1) + \mathrm{Vol}(R_2) = 5\pi + \frac{7}{4}\pi = \frac{27}{4}\pi.$$

2. Eje de rotación $y = 0$.

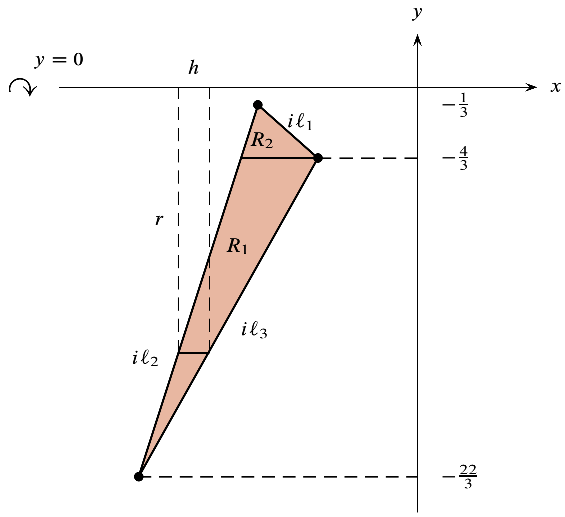
Para calcular el área de un cascarón cilíndrico observamos:

a. El eje de un cascarón cilíndrico es el eje de rotación. En este caso el eje x ($y = 0$).

b. La altura h de un cascarón cilíndrico es un segmento, entre las gráficas de las funciones que definen la región; dicho segmento es paralelo al eje de rotación. Es decir, perpendicular al eje y. La variable independiente de las funciones debe ser y.

$$\ell_1(x) = y = -2x - 3 \ \Rightarrow\ x = -\frac{1}{2}(y+3) = i\ell_1(y);$$
$$\ell_2(x) = y = 7x + 9 \ \Rightarrow\ x = \frac{1}{7}(y-9) = i\ell_2(y);$$
$$\ell_3(x) = y = 4x + 2 \ \Rightarrow\ x = \frac{1}{4}(y-2) = i\ell_3(y).$$

c. El radio r de un cascarón cilíndrico es la distancia entre su altura h y el eje de rotación



Por lo tanto:

a. En la región R_1, la altura es $h_1 = i\ell_3(y) - i\ell_2(y) = \dfrac{1}{4}(y-2) - \dfrac{1}{7}(y-9) = \dfrac{3}{28}y + \dfrac{11}{14}$.

b. En la región R_2, la altura es $h_2 = i\ell_1(y) - i\ell_2(y) = -\frac{1}{2}(y+3) - \dfrac{1}{7}(y-9) = -\dfrac{9}{14}y - \dfrac{3}{14}$.

c. El radio r en cada caso es $0 - y = -y$.

El volumen del sólido generado por la región R_1 es

$$
\begin{aligned}
V_{R_1} &= \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi r h \, \mathrm{d}r = \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi(-y)\,[i\ell_3(y) - i\ell_2(y)] \, \mathrm{d}y = \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi(-y)\left(\frac{3}{28}y + \frac{11}{14}\right) \mathrm{d}y = \\
&= -\frac{1}{14}\pi \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} \left(22y + 3y^2\right) \mathrm{d}y = -\frac{1}{14}\pi\left(11y^2 + y^3\right)\Big|_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} = \frac{90}{7}\pi.
\end{aligned}
$$

El volumen generado por la región R_2 es

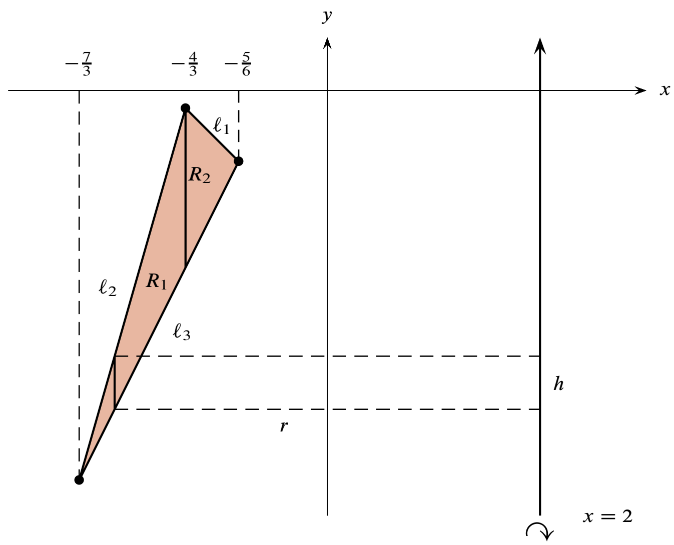
$$
\begin{aligned}
V_{R_2} &= \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} 2\pi r h \, \mathrm{d}r = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} 2\pi(-y)\,[i\ell_1(y) - i\ell_2(y)] \, \mathrm{d}y = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} 2\pi(-y)\left(-\frac{9}{14}y - \frac{3}{14}\right) \mathrm{d}y = \\
&= \frac{3}{7}\pi \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} \left(y + 3y^2\right) \mathrm{d}y = \frac{3}{7}\pi\left(\frac{1}{2}y^2 - y^3\right)\Big|_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} = \frac{9}{14}\pi.
\end{aligned}
$$

El volumen de revolución solicitado es

$$
\mathrm{Vol}(R) = \mathrm{Vol}(R_1) + \mathrm{Vol}(R_2) = \frac{90}{7}\pi + \frac{9}{14}\pi = \frac{27}{2}\pi.
$$

3. Eje de rotación $x = 2$.

El razonamiento es similar al del inciso 1. pág. 42. Cambian los radios de los cascarones.



a. En la región R_1, la altura es $h_1 = \ell_2(x) - \ell_3(x) = (7x + 9) - (4x + 2) = 3x + 7$.

b. En la región R_2, la altura es $h_2 = \ell_1(x) - \ell_3(x) = (-2x - 3) - (4x + 2) = -6x - 5$.

c. El radio r en cada caso es $2 - x$.

El volumen del sólido generado por la región R_1 es

$$V_{R_1} = \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi r h \, \mathrm{d}r = \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi(2-x)\,[\ell_2(x) - \ell_3(x)] \, \mathrm{d}x = \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi\,(2-x)\,(3x+7) \, \mathrm{d}x =$$
$$= 2\pi \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} \left(14 - x - 3x^2\right) \mathrm{d}x = 2\pi \left(14x - \frac{1}{2}x^2 - x^3\right) \Bigg|_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} = 11\pi.$$

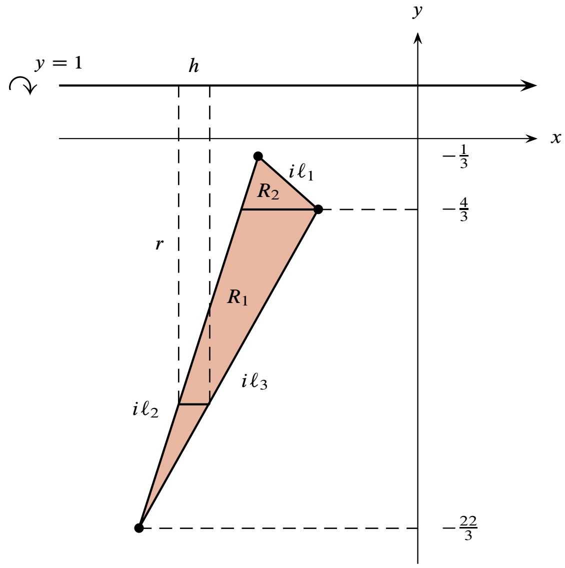
El volumen generado por la región R_2 es

$$V_{R_2} = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} 2\pi r h \, \mathrm{d}r = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} 2\pi\,(2-x)\,[\ell_1(x) - \ell_3(x)] \, \mathrm{d}x = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} 2\pi\,(2-x)\,(-6x-5) \, \mathrm{d}x =$$
$$= 2\pi \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} \left(-10 - 7x + 6x^2\right) \mathrm{d}x = 2\pi \left(-10x - \frac{7}{x}x^2 + 2x^3\right) \Bigg|_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} = \frac{19}{4}\pi.$$

El volumen del sólido de revolución solicitado es

$$\mathrm{Vol}(R) = \mathrm{Vol}(R_1) + \mathrm{Vol}(R_2) = 11\pi + \frac{19}{4}\pi = \frac{63}{4}\pi.$$

4. Eje de rotación $y = 1$.



a. En la región R_1, la altura es $h_1 = i\ell_3(y) - i\ell_2(y) = \dfrac{1}{4}(y-2) - \dfrac{1}{7}(y-9) = \dfrac{3}{28}y + \dfrac{11}{14}$.

b. En la región R_2, la altura es $h_2 = i\ell_1(y) - i\ell_2(y) = -\dfrac{1}{2}(y+3) - \dfrac{1}{7}(y-9) = -\dfrac{9}{14}y - \dfrac{3}{14}$.

c. El radio r en cada caso es $1 - y$.

El volumen del sólido generado por la región R_1 es

$$V_{R_1} = \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi r h \, \mathrm{d}r = \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi\,(1-y)\,[i\ell_3(y) - i\ell_2(y)]\, \mathrm{d}y = \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi\,(1-y)\left(\frac{3}{28}y + \frac{11}{14}\right) \mathrm{d}y =$$

$$= -\frac{1}{14}\pi \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} \left(-22 + 19y + 3y^2\right) \mathrm{d}y = -\frac{1}{14}\pi\left(-22y + \frac{19}{2}y^2 + y^3\right)\Bigg|_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} = \frac{117}{7}\pi.$$

El volumen generado por la región R_2 es

$$V_{R_2} = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} 2\pi r h \, \mathrm{d}r = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} 2\pi\,(1-y)\,[i\ell_1(y) - i\ell_2(y)]\, \mathrm{d}y = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} 2\pi\,(1-y)\left(-\frac{9}{14}y - \frac{3}{14}\right) \mathrm{d}y =$$

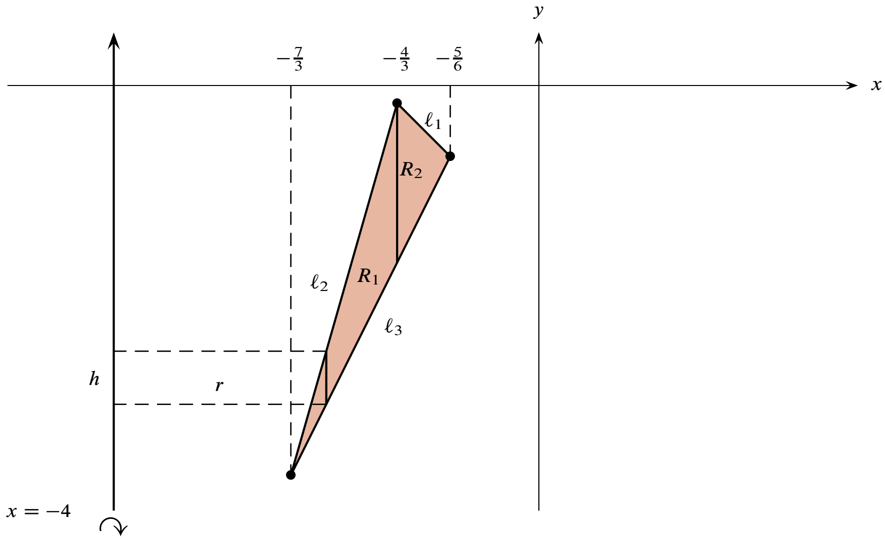
$$= \frac{3}{7}\pi \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} \left(-1 - 2y + 3y^2\right) \mathrm{d}y = \frac{3}{7}\pi\left(-y - y^2 + y^3\right)\Bigg|_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} = \frac{9}{7}\pi.$$

El volumen del sólido de revolución solicitado es

$$\mathrm{Vol}(R) = \mathrm{Vol}(R_1) + \mathrm{Vol}(R_2) = \frac{117}{7}\pi + \frac{9}{7}\pi = 18\pi.$$

5. Eje de rotación $x = -4$.

El razonamiento es similar al del inciso 1. pág. 42. Cambian los radios de los cascarones.



a. En la región R_1, la altura es $h_1 = \ell_2(x) - \ell_3(x) = (7x + 9) - (4x + 2) = 3x + 7$.

b. En la región R_2, la altura es $h_2 = \ell_1(x) - \ell_3(x) = (-2x - 3) - (4x + 2) = -6x - 5$.

c. El radio r en cada caso es $x - (-4) = x + 4$.

El volumen del sólido generado por la región R_1 es

$$V_{R_1} = \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi r h \, \mathrm{d}r = \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi \, (4 + x) \, [\ell_2(x) - \ell_3(x)] \, \mathrm{d}x = \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi \, (4 + x) \, (3x + 7) \, \mathrm{d}x =$$
$$= 2\pi \int_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} \left(28 + 19x + 3x^2\right) \mathrm{d}x = 2\pi \left(28x + \frac{19}{2}x^2 + x^3\right) \Bigg|_{-\frac{7}{3}}^{-\frac{4}{3}} = 7\pi.$$

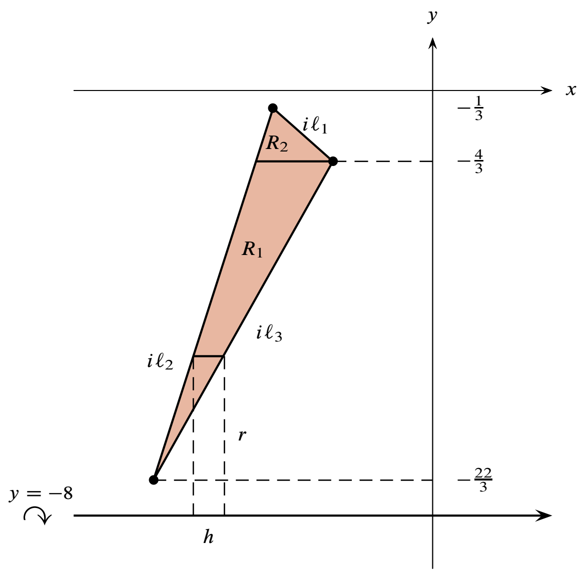
El volumen generado por la región R_2 es

$$V_{R_2} = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} 2\pi r h \, \mathrm{d}r = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} 2\pi \, (4 + x) \, [\ell_1(x) - \ell_3(x)] \, \mathrm{d}x = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} 2\pi \, (4 + x) \, (-6x - 5) \, \mathrm{d}x =$$
$$= -2\pi \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} \left(20 + 29x + 6x^2\right) \mathrm{d}x = -2\pi \left(20x + \frac{29}{2}x^2 + 2x^3\right) \Bigg|_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{5}{6}} = \frac{17}{4}\pi.$$

El volumen de revolución solicitado es

$$\mathrm{Vol}(R) = \mathrm{Vol}(R_1) + \mathrm{Vol}(R_2) = 7\pi + \frac{17}{4}\pi = \frac{45}{4}\pi.$$

6. Eje de rotación $y = -8$.



a. En la región R_1, la altura es $h_1 = i\ell_3(y) - i\ell_2(y) = \dfrac{1}{4}(y-2) - \dfrac{1}{7}(y-9) = \dfrac{3}{28}y + \dfrac{11}{14}$.

b. En la región R_2, la altura es $h_2 = i\ell_1(y) - i\ell_2(y) = -\dfrac{1}{2}(y+3) - \dfrac{1}{7}(y-9) = -\dfrac{9}{14}y - \dfrac{3}{14}$.

c. El radio r en cada caso es $y - (-8) = y + 8$.

El volumen del sólido generado por la región R_1 es

$$V_{R_1} = \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi r h \,\mathrm{d}r = \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi\,(y+8)\,[i\ell_3(y) - i\ell_2(y)]\,\mathrm{d}y = \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} 2\pi\,(y+8)\left(\frac{3}{28}y + \frac{11}{14}\right)\mathrm{d}y =$$
$$= \frac{1}{14}\pi \int_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} \left(176 + 46y + 3y^2\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{14}\pi\left(176y + 23y^2 + y^3\right)\Big|_{-\frac{22}{3}}^{-\frac{4}{3}} = 18\pi.$$

El volumen generado por la región R_2 es

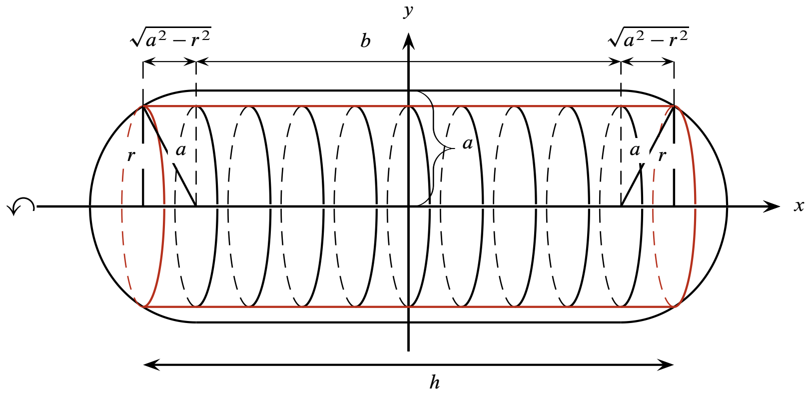
$$V_{R_2} = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} 2\pi r h \,\mathrm{d}r = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} 2\pi\,(y+8)\,[i\ell_1(y) - i\ell_2(y)]\,\mathrm{d}y = \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} 2\pi\,(y+8)\left(-\frac{9}{14}y - \frac{3}{14}\right)\mathrm{d}y =$$
$$= -\frac{3}{7}\pi \int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} \left(8 + 25y + 3y^2\right)\mathrm{d}y = -\frac{3}{7}\pi\left[8y + \frac{25}{2}y^2 + y^3\right]\Big|_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{1}{3}} = \frac{9}{2}\pi.$$

El volumen de revolución solicitado es

$$\mathrm{Vol}(R) = \mathrm{Vol}(R_1) + \mathrm{Vol}(R_2) = 18\pi + \frac{9}{2}\pi = \frac{45}{2}\pi.$$

□

Ejemplo 3.3.19 *Un tanque para almacenar gas tiene la forma de un cilindro circular recto de radio a, altura b, con una semiesfera del mismo radio en cada extremo. Calcular su volumen.*



▼ Podemos suponer que el eje x es el eje de rotación del tanque. Una capa cilíndrica a distancia r del eje de rotación se muestra en la figura.

- r varía desde 0 hasta a
- La altura h correspondiente del cilindro se calcula sumando b (la altura del cilindro original) con 2 segmentos que miden $\sqrt{a^2-r^2}$ (por el teorema de Pitágoras), por lo tanto:

$$h = b + 2\sqrt{a^2-r^2}.$$

El volumen del tanque es

$$V = \int_0^a 2\pi r h \, \mathrm{d}r = \int_0^a 2\pi r(b + 2\sqrt{a^2-r^2}) \, \mathrm{d}r = \pi b \int_0^a 2r \, \mathrm{d}r + 2\pi \underbrace{\int_0^a \sqrt{a^2-r^2}(2r \, \mathrm{d}r)}_{\boxed{\begin{array}{l} u = a^2-r^2; \\ \mathrm{d}u = -2r \, \mathrm{d}r. \end{array}}} =$$

$$= \pi b r^2 \Big|_0^a - 2\pi \int_{a^2}^0 \sqrt{u} \, \mathrm{d}u = \pi a^2 b + 2\pi \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^{a^2} =$$

$$= \pi a^2 b + \frac{4}{3}\pi a^3.$$

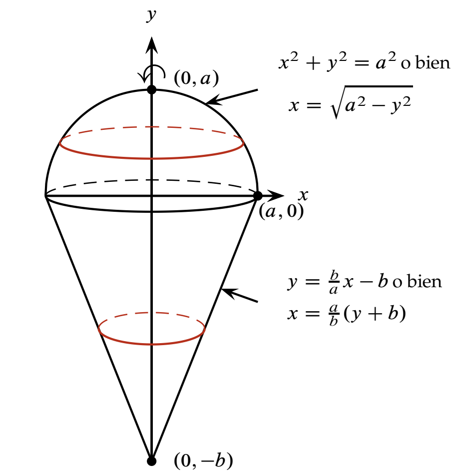
Lo anterior es la suma del volumen del cilindro original más el volumen de la esfera que forman las dos semiesferas de los extremos.

□

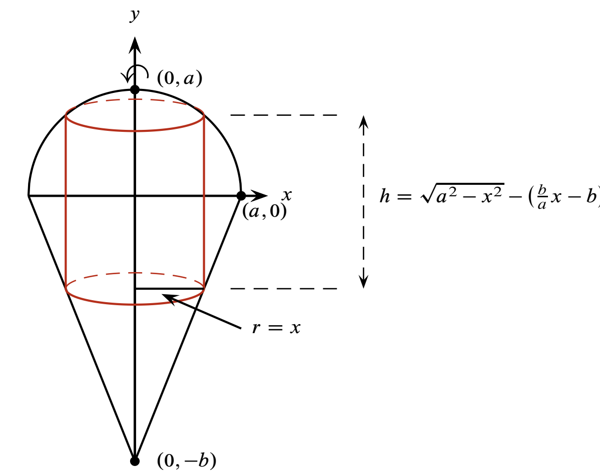
También podíamos haber usado el método de Arandelas, pero sería un poco más laborioso. Lo mas sensato en ejemplos de este tipo es usar la aditividad del volumen y partir el cálculo del sólido que se pide en el cálculo del volumen de un cilindro y una esfera (resultado de pegar las dos semiesferas de los extremos).
Alguna vez se preguntará el lector cuál de los métodos usados (el de Arandelas o el de Cascarones Cilíndricos) se debe utilizar para calcular el volumen de un sólido de revolución dado. La respuesta es que no hay un método que sea el mejor para todos los casos. Si se decide aplicar uno de ellos, lo más seguro es que se pueda plantear la integral correspondiente determinando los límites de integración y la función integrando adecuada; si la integral por calcular resulta demasiado laboriosa, o no se puede resolver con las técnicas de integración desarrollada hasta ahora, puede ser buena idea intentar el otro método para ver si con él es posible completar el cálculo.
Cerramos esta sección con un ejemplo sencillo en el que aplicamos los dos métodos de cálculo de volumen de un sólido de revolución, para que el lector los pueda comparar una vez más.

Ejemplo 3.3.20 *Un sólido tiene la forma de un cono circular recto de radio a, altura b; coronado por una semiesfera de radio a (como un barquillo de nieve). Calcular su volumen usando el método de Arandelas y el de Cascarones Cilíndricos.*

▼ El sólido se genera al girar el triángulo de vértices $(0,0)$, $(0,-b)$ y $(a,0)$ y al girar el cuarto de círculo $x^2+y^2\le a^2$ del primer cuadrante alrededor del eje y; véase la siguiente figura:



Cortes transversales para arandelas.



Capas cilíndricas concéntricas.

1. Cálculo por el método de Arandelas:

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-b}^{a} A(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-b}^{0}\pi\left[\frac{a}{b}(y+b)\right]^2\mathrm{d}y + \int_0^a \pi\left(\sqrt{a^2-y^2}\right)^2\mathrm{d}y = \\
&= \frac{\pi a^2}{b^2}\int_{-b}^{0}(y+b)^2\,\mathrm{d}y + \pi\int_0^a\left(a^2-y^2\right)\mathrm{d}y = \\
&= \frac{\pi a^2}{b^2}\int_0^b u^2\,\mathrm{d}u + \pi\left(a^2y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^a = \\
&= \frac{\pi a^2}{b^2}\cdot\frac{b^3}{3} + \pi\cdot\frac{2a^3}{3} = \frac{\pi a^2}{3}(b+2a).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= y+b; \\ \mathrm{d}u &= \mathrm{d}y. \end{aligned}}$$

2. Cálculo por el método de Cascarones Cilíndricos:

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^a 2\pi r h\,\mathrm{d}r = \int_0^a 2\pi x\left[\sqrt{a^2-x^2}-\left(\frac{b}{a}x-b\right)\right]\mathrm{d}x = \\
&= \pi\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\cdot 2x\,\mathrm{d}x - 2\pi\int_0^a\left(\frac{b}{a}x^2-bx\right)\mathrm{d}x = \\
&= \pi\int_{a^2}^{0}-\sqrt{u}\,\mathrm{d}u - 2\pi\left(\frac{bx^3}{3a}-\frac{bx^2}{2}\right)\Big|_0^a = \\
&= \pi\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_0^{a^2} - 2\pi\left(\frac{ba^2}{3}-\frac{ba^2}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}\left(a^3\right) - 2\pi\left(\frac{-a^2b}{6}\right) = \\
&= \frac{\pi a^2}{3}(2a+b).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= a^2-x^2; \\ \mathrm{d}u &= -2x\,\mathrm{d}x. \end{aligned}}$$

Observe que ambos procedimientos arrojan el mismo resultado, que también puede verse como la suma del volumen de un cono $\left(\dfrac{\pi a^2 b}{3}\right)$ y el de una semiesfera $\left(\dfrac{2\pi a^3}{3}\right)$.

□

Ejercicios 3.3.3 *Volúmenes.* *Soluciones en la página 52*

1. Sea R la región del plano delimitada por la curva $y = \operatorname{sen} 2x$ y el eje x, entre $x = 0$ y $x = \dfrac{\pi}{2}$. Calcular el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región alrededor de los ejes:

   a. $y = 0$.
   b. $x = 0$.
   c. $y = 3$.
   d. $x = 4$.
   e. $y = -2$.
   f. $x = -1$.

2. Sea R la región del plano delimitada por las parábolas $y = \dfrac{x^2}{4}$, $y = (x-6)^2$ y la recta $y = 0$. Calcular el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región alrededor de los ejes:

   a. $y = 0$.
   b. $x = 0$.
   c. $y = 4$.
   d. $x = 6$.
   e. $y = -1$.
   f. $x = -2$.

3. Sea R la región del plano delimitada por $y = e^x$, $y = e^{5-x}$ & $x = 3$. Calcular el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región alrededor alrededor de los ejes:

   a. $y = 0$.
   b. $x = 0$.
   c. $y = 20$.
   d. $x = 6$.
   e. $y = -1$.
   f. $x = -2$.

4. Sea R la región del plano delimitada por $y = x^3$, $y = -(x-10)^3$ y la recta $y = 0$. Calcular el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región alrededor de los ejes:

   a. $y = 0$.
   b. $x = 0$.
   c. $y = 130$.
   d. $x = 11$.
   e. $y = -2$.
   f. $x = -1$.

5. Sea R la región del plano delimitada por $y = -x^2 + 8x - 3$ & $y = |x-4| + 1$. Calcular el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región alrededor alrededor de los ejes:

   a. $y = 13$.
   b. $x = 0$.
   c. $y = -2$.
   d. $x = 8$.
   e. $x = -1$.

6. Sea R la región del plano delimitada por por $y = 4 - e^{-x}$, $y = 4 - e^x$ & $x = 1$. Calcular el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región alrededor alrededor de los ejes:

   a. $y = 0$.
   b. $x = 0$.
   c. $y = 4$.
   d. $x = 1$.
   e. $y = -2$.
   f. $x = -2$.

7. Sea R la región del plano delimitada por $y = 2 - \cos x$ & $y = 1$. Calcular el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región alrededor alrededor de los ejes:

   a. $y = 0$.
   b. $x = 0$.
   c. $y = -2$.
   d. $x = -2$.
   e. $y = 3$.
   f. $x = 7$.

Ejercicios 3.3.1 *Volúmenes.* *Preguntas, página 9*

1. a. 666.667.
   b. 288.675.
   c. 166.667.
2. a. 59.6285.
   b. 14.9071.
   c. 14.9071.
3. a. 0.1286.
   b. 0.04546.
   c. 0.1010.
4. a. 1.5708.
   b. 0.429204.
   c. 0.61685.

Ejercicios 3.3.2 *Volúmenes.* *Preguntas, página 31*

1. a. 252.481.
   b. 87.0624.
   c. 339.543.
   d. 174.125.
   e. 400.487.
   f. 130.594
2. a. 33.5103.
   b. 26.8083.
   c. 50.2655.
   d. 43.5634.
   e. 67.0206.
   f. 73.7227.
3. a. 2.0944.
   b. 4.1888.
   c. 8.37758.
   d. 10.472.
   e. 7.33038.
   f. 5.23599.
4. a. 29.6088.
   b. 187.522.
   c. 9.8696.
5. a. 22.436.
   b. 22.436.
   c. 56.5209.
6. a. 127.902.
   b. 98.2929.
   c. 59.2176.
   d. 96.9167.
   e. 91.5788.
7. a. 2.25655.
   b. 13.1775.
   c. 31.9903.
   d. 13.1775.
   e. 36.4155.
   f. 25.7439.
8. a. 2.4674.
   b. $\dfrac{1}{4}\pi(8+3\pi)$.
   c. 16.3822.
   d. 6.28319.
   e. 12.5664.
   f. 6.28319.

Ejercicios 3.3.3 *Volúmenes.* *Preguntas, página 51*

1. a. 2.4674.
   b. 4.9348.
   c. 28.0311.
   d. 20.1979.
   e. 34.773.
   f. 11.218.
2. a. 305.363.
   b. 175.929.
   c. 160.85.
   d. 125.664.
   e. 129.434.
   f. 276.46.
3. a. 547.942.
   b. 55.3852.
   c. 137.551.
   d. 61.8441.
   e. 272.752.
   f. 94.4617.
4. a. 70 124.8.
   b. 9 817.48.
   c. 345 800.
   d. 11 781.
   e. 74 177.5.
   f. 11 781.

5. a. 2 689.83.
   b. 1 446.56.
   c. 2 734.77.
   d. 1 367.86.
   e. 1 808.2.

6. a. 18.6205.
   b. 4.62291.
   c. 8.67769.
   d. 2.20164.
   e. 32.2696.
   f. 18.272.

7. a. 93.0484.
   b. 130.854.
   c. 151.095.
   d. 211.755.
   e. 51.1587.
   f. 152.302.