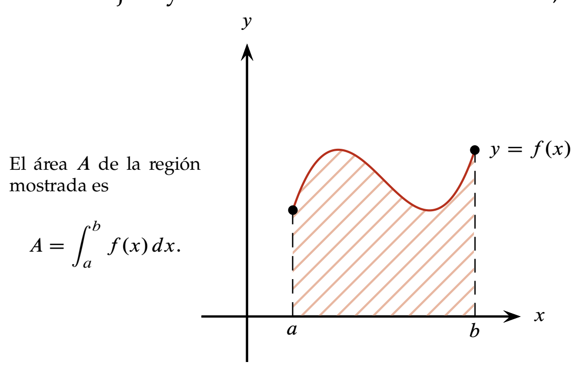
CAPÍTULO

3

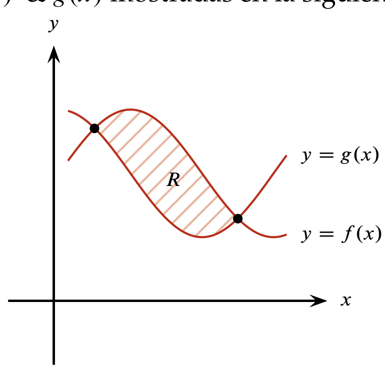
Aplicaciones

3.2 Área de una región plana

La integral definida de una función $f(x) \geq 0$ y continua en un intervalo $[a, b]$ mide el área de la región bajo la gráfica de $y = f(x)$, sobre el eje x y entre las rectas verticales $x = a$, $x = b$.

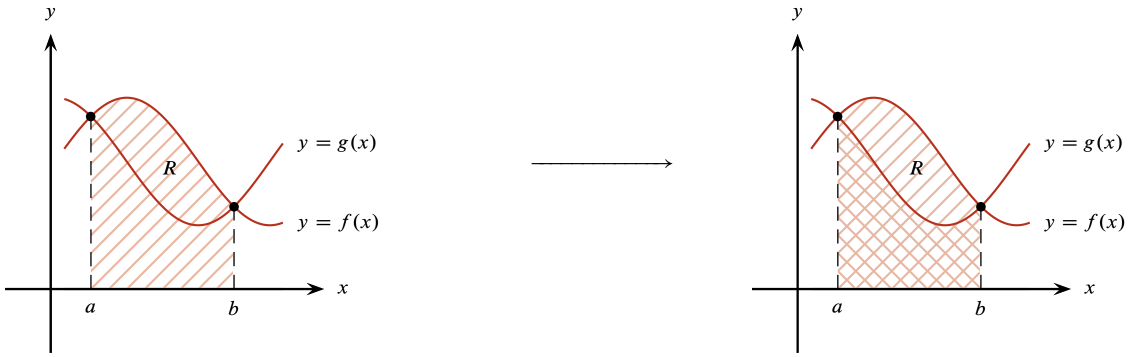


Se explica a continuación cómo hallar el área de una región comprendida entre las gráficas de dos funciones continuas y no negativas, digamos $f(x)$ & $g(x)$ mostradas en la siguiente figura:



1. canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017

Usando la aditividad del área podemos resolver este problema. En primer lugar debemos determinar los puntos donde las curvas $y = f(x)$ & $y = g(x)$ se intersecan; supongamos que las soluciones de la ecuación $f(x) = g(x)$ son $x = a$ & $x = b$, las cuales definen un intervalo cerrado $[a, b]$ donde suponemos que $f(x) \geq g(x)$.
Entonces la región bajo la curva $y = f(x)$, sobre el eje x y entre las rectas $x = a$ & $x = b$, se puede descomponer como la unión de dos regiones que no se traslapan, una de ellas es R [la región entre las curvas $y = f(x)$ & $y = g(x)$] y la otra es la región bajo $y = g(x)$, sobre el eje x y entre las rectas verticales $x = a$ & $x = b$:



En términos de áreas, esta descomposición se escribe así:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = A(R) + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Desplazamos la integral de $g(x)$ al otro lado de la igualdad:

$$A(R) = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$$

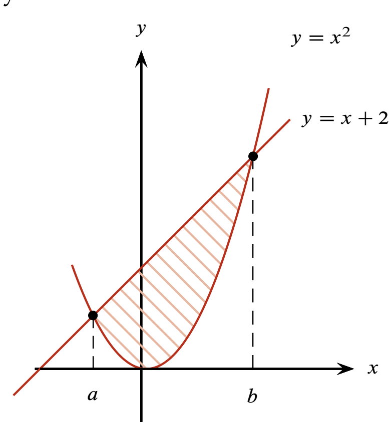
o también:

$$A(R) = \int_a^b [f(x) - g(x)]\ \mathrm{d}x. \tag{3.1}$$

En esta fórmula hay que tener cuidado con el orden en que se escriben las funciones en el integrando; siempre se resta la función menor en el intervalo $[a, b]$, en este caso es $g(x)$ el sustraendo. De esta forma, obtenemos un resultado positivo.

Ejemplo 3.2.1 *Calcular el área de la región contenida entre las gráficas de la parábola* $y = x^2$ *y la recta* $y = x + 2$.

▼ Siempre es recomendable, en este y todos los problemas similares, comenzar haciendo las gráficas de las funciones que acotan la región cuya área deseamos calcular.



Se puede ver en la figura que esta región queda debajo de la recta $y = x + 2$ y sobre la parábola $y = x^2$; una región de este tipo se llama sector parabólico. En la gráfica se aprecia que el área de la región es

$$\text{Área} = \int_a^b (x+2)dx - \int_a^b x^2 dx = \int_a^b (x+2-x^2)dx,$$

pues la recta está por encima de la parábola. Sin embargo necesitamos encontrar los límites de integración a, b, lo que haremos resolviendo la ecuación:

$$f(x) = g(x) \;\Rightarrow\; x + 2 = x^2,$$

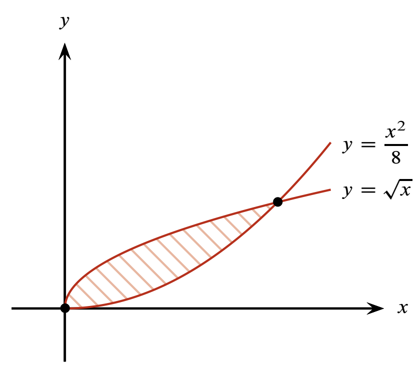
que podemos expresar como $x^2 - x - 2 = 0$, o bien como $(x-2)(x+1) = 0$. Las soluciones son entonces $x = 2$, $x = -1$. Por consiguiente, el área se calcula con la integral:

$$\begin{aligned}\text{Área} = \int_{-1}^{2} [x+2-x^2]\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} &= \\ = \frac{(2)^2}{2} + 2(2) - \frac{(2)^3}{3} - \left[\frac{(-1)^2}{2} + 2(-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right] &= \\ = 2 + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} = 8 - \frac{1}{2} - 3 = \frac{9}{2} = 4.5\ \mathrm{u}^2.\end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.2.2 *Determinar el área de la región comprendida entre las curvas* $y = \dfrac{x^2}{8}$ & $y = \sqrt{x}$, *con* $x \geq 0$.

▼ En las gráficas de las funciones que rodean a la region podemos ver que $y = \sqrt{x}$ es el borde superior y que $y = \dfrac{x^2}{8}$ es el inferior.



Buscamos los límites de integración resolviendo la ecuación:

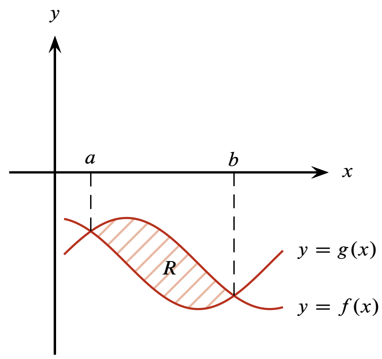
$$\begin{aligned}&f(x) = g(x) \;\Rightarrow\; \sqrt{x} = \frac{x^2}{8} \;\Rightarrow\; \frac{x^4}{64} = x \;\Rightarrow\; x^4 = 64x \;\Rightarrow\; x^4 - 64x = 0 \;\Rightarrow\\ &\Rightarrow\; x(x^3 - 64) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \quad \text{o bien} \quad x^3 - 64 = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \quad \text{o bien} \quad x = \sqrt[3]{64} = 4.\end{aligned}$$

Vemos de este modo que los extremos de integración son 0 y 4, así que el área se calcula como

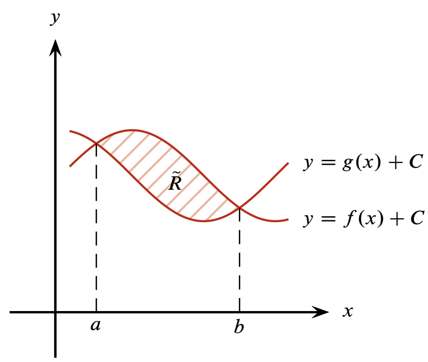
$$\begin{aligned}A(R) = \int_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{x^2}{8}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 &= \\ = \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{24}(4)^3 = \frac{16}{3} - \frac{64}{24} = \frac{8}{3}\ \mathrm{u}^2.&\end{aligned}$$

□

En los ejemplos previos hemos utilizado funciones cuyas gráficas están por encima del eje x. Esta no es una condición importante en realidad, lo único que se necesita para aplicar la fórmula (3.1) es calcular los límites de integración y considerar la posición de las gráficas de $f(x)$ & $g(x)$, cuál está arriba y cuál abajo. Para que el lector aprecie esta observación, supongamos que las gráficas de $f(x)$ & $g(x)$ se encuentran debajo el eje x:



Si trasladamos verticalmente las gráficas de ambas funciones, sumando en ambas una constante C suficientemente grande, tendríamos:

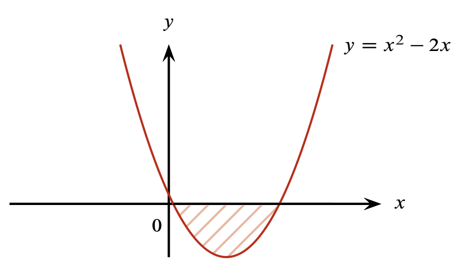


La región R se trasladó íntegramente a $\tilde{R}$, sin deformarse y así su área no cambió. Además,

$$A(R) = A(\tilde{R}) = \int_a^b [(f(x) + \cancel{C}) - (g(x) + \cancel{C})]\ \mathrm{d}x =$$
$$= \int_a^b [f(x) - g(x)]\ \mathrm{d}x.$$

Ejemplo 3.2.3 *Determine el área de la región limitada por el eje x y la parábola $y = x^2 - 2x$.*

▼ La gráfica de la parábola se presenta en la figura, la región está debajo del eje x y sobre la gráfica de $y = x^2 - 2x$.



El eje x se puede describir como la gráfica de $y = 0$, así que en el integrando tendremos $[0 - (x^2 - 2x)]\ \mathrm{d}x$ y los limites de integración se obtienen resolviendo:

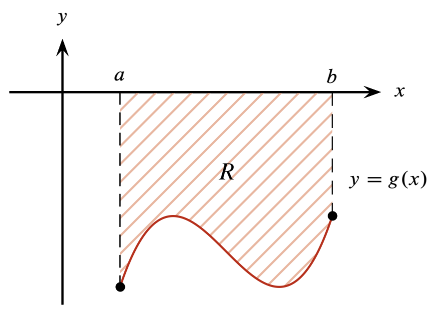
$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \& \quad x = 2.$$

Con esta información, el área que deseamos determinar es

$$A(R) = \int_0^2 [0 - (x^2 - 2x)]\ \mathrm{d}x = \int_0^2 (2x - x^2)\ \mathrm{d}x = x^2 - \frac{x^3}{3}\bigg|_0^2 =$$
$$= 2^2 - \frac{2^3}{3} = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}\ \mathrm{u}^2.$$

□

- Generalizando, para cualquier función $y = g(x) \le 0$ en un intervalo $[a, b]$, el área bajo el eje x y sobre la gráfica de $y = g(x)$ será



El área $A(R) \ge 0$ de la región entre las curvas $y = 0$ & $y = g(x)$ se calcula como sigue:

$$A(R) = \int_a^b [0 - g(x)]\ \mathrm{d}x = \int_a^b -g(x)\ \mathrm{d}x = -\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x. \quad \boxed{\text{Curva superior} - \text{curva inferior.}}$$

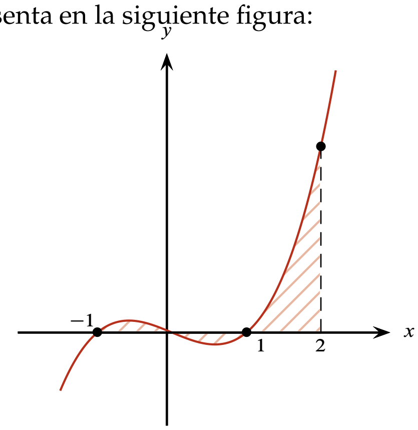
Esto se puede interpretar también como

$$\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x = -A(R),$$

de modo que la integral de la función mide un área con signo, tomando como área positiva cuando la gráfica del integrando está sobre el eje x y como área negativa cuando se encuentra bajo el eje x.

Ejemplo 3.2.4 *Interpretar la integral* $\int_{-1}^{2} (x^3 - x)\ \mathrm{d}x$ *como un área con signo.*

▼ La gráfica de $y = x^3 - x$ se presenta en la siguiente figura:



Como se trata de una función impar, la gráfica es simétrica con respecto al origen. Observe que la parte de la curva en $[-1, 0]$ es simétrica con la parte en $[0, 1]$, así que el área que encierran junto con el eje x ambos tramos son iguales en magnitud, pero de signo contrario:

$$\int_{-1}^{0} (x^3 - x)\ \mathrm{d}x = -\int_0^1 (x^3 - x)\ \mathrm{d}x.$$

Tenemos entonces:

$$\int_{-1}^{1}(x^3-x)\ \mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}(x^3-x)\ \mathrm{d}x+\int_{0}^{1}(x^3-x)\ \mathrm{d}x=0.$$

Concluimos que:

$$\int_{-1}^{2}(x^3-x)\ \mathrm{d}x=\int_{1}^{2}(x^3-x)\ \mathrm{d}x.$$

Comprobamos este último resultado, calculando ambas integrales:

$$\int_{-1}^{2}(x^3-x)\ \mathrm{d}x=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{2}=\frac{2^4}{4}-\frac{2^2}{2}-\left(\frac{(-1)^4}{4}-\frac{(-1)^2}{2}\right)=4-2-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{4};$$
$$\int_{1}^{2}(x^3-x)\ \mathrm{d}x=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{1}^{2}=\frac{2^4}{4}-\frac{2^2}{2}-\left(\frac{1^4}{4}-\frac{1^2}{2}\right)=4-2-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{4}.$$

□

Ejemplo 3.2.5 *Calcular el área de la región encerrada entre la gráfica de la función $y=x^3-x$ & el eje x, desde $x=-1$ hasta $x=2$.*

▼ No hay necesidad de graficar esta vez, pues la gráfica de la función es la misma del ejemplo anterior. Lo que cambia en el cálculo y resultado que haremos ahora se debe a que buscamos un área, no la integral definida solamente; en el caso presente el área definida en el intervalo $[-1,0]$ se suma al área definida en el intervalo $[0,1]$.
Dicho lo anterior, calculamos el área solicitada integrando en tres tramos, como sigue:

$$\text{Área}=\int_{-1}^{0}[(x^3-x)-0]\ \mathrm{d}x+\int_{0}^{1}[0-(x^3-x)]\ \mathrm{d}x+\int_{1}^{2}[(x^3-x)-0]\ \mathrm{d}x.$$

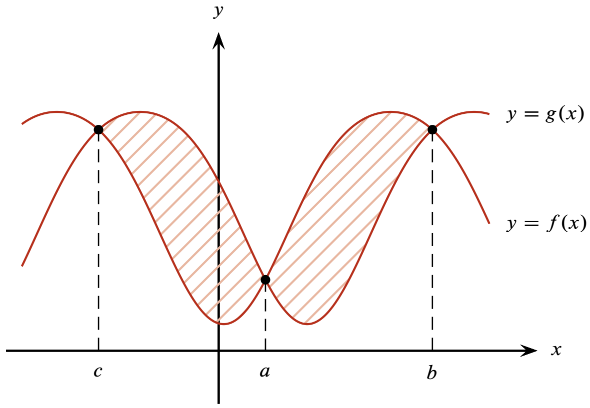
El 0 en los integrandos de la fórmula anterior representa al eje x; cuando la función $y=x^3-x$ es >0, restamos 0, y cuando $y=x^3-x<0$, entonces al 0 le restamos la función. Simplificando y haciendo los cálculos en la fórmula, obtenemos:

$$\begin{aligned}\text{Área}&=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{1}+\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{1}^{2}=\\&=-\left(\frac{(-1)^4}{4}-\frac{(-1)^2}{2}\right)+\left(-\frac{1^4}{4}+\frac{1^2}{2}\right)+\left(\frac{2^4}{4}-\frac{2^2}{2}\right)-\left(\frac{1^4}{4}-\frac{1^2}{2}\right)=\\&=-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{16}{4}-\frac{4}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}+2=\frac{11}{4}.\end{aligned}$$

Este resultado difiere del ejemplo anterior en que las áreas de las regiones de -1 a 0 y de 0 a 1 en vez de cancelarse se sumaron; observe que ambas son iguales a $\frac{1}{4}$, por la simetría de la función.

□

Podemos generalizar la idea del ejemplo anterior como sigue: si las funciones $y=f(x)$ & $y=g(x)$ tienen más de dos intersecciones, entonces el área limitada por sus gráficas se obtiene integrando sobre cada intervalo, entre dos cruces de las gráficas, bien $f(x)-g(x)$ o bien $g(x)-f(x)$, dependiendo de cuál de ellas queda por arriba y cuál por debajo en dicho intervalo. Por ejemplo, en la siguiente gráfica:



El área sombreada de la región es

$$A(R) = \int_c^a [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x + \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x.$$

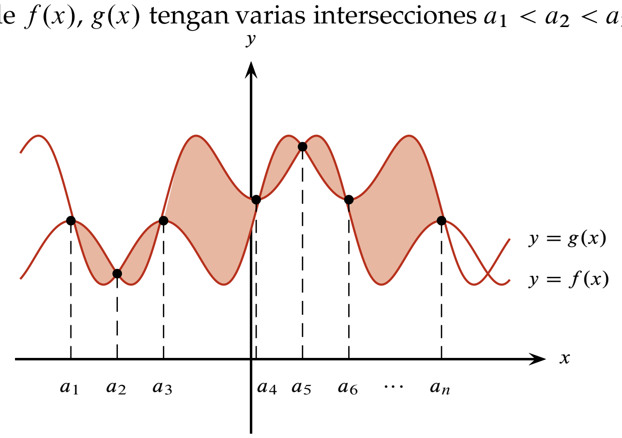
Por comodidad, para abreviar en la escritura de la fórmula, podemos usar la función valor absoluto. Recordemos que:

$$|\,u\,| = \begin{cases} u, & \text{si } u \geq 0; \\ -u, & \text{si } u < 0; \end{cases}$$

así que al aplicar esta función a la diferencia $f(x) - g(x)$:

$$\begin{aligned} |\,f(x) - g(x)\,| &= \begin{cases} f(x) - g(x), & \text{si } f(x) - g(x) \geq 0; \\ -[f(x) - g(x)]\,, & \text{si } f(x) - g(x) < 0; \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(x) - g(x), & \text{si } f(x) \geq g(x); \\ g(x) - f(x), & \text{si } f(x) < g(x). \end{cases} \end{aligned}$$

La fórmula para el caso donde $f(x)$, $g(x)$ tengan varias intersecciones $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$ es



$$\text{Área}(R) = \int_{a_1}^{a_n} |\,f(x) - g(x)\,|\,\mathrm{d}x.$$

La fórmula se ve muy simple, pero la integral del lado derecho se debe partir en una suma de integrales:

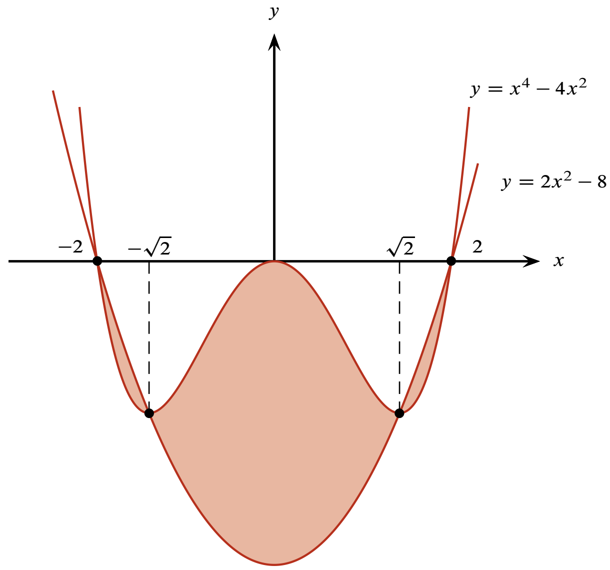
$$\int_{a_1}^{a_2} + \int_{a_2}^{a_3} + \cdots + \int_{a_{n-1}}^{a_n},$$

con el integrando $\pm[f(x) - g(x)]$, con el signo apropiado.

Ejemplo 3.2.6 *Determinar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones*

$$f(x) = x^4 - 4x^2 \quad \& \quad g(x) = 2x^2 - 8.$$

▼ La gráfica de ambas funciones y las regiones entre ellas se muestra en la figura.



Las intersecciones de las gráficas se determinan resolviendo $f(x) = g(x)$, esto es,

$$x^4 - 4x^2 = 2x^2 - 8 \Rightarrow x^4 - 6x^2 + 8 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 4 = 0 \quad \text{o bien} \quad x^2 = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \pm 2 \quad \text{o bien} \quad x = \pm\sqrt{2}.$$

Los correspondientes valores de las ordenadas son 0 para $x = \pm 2$ y -4 cuando $x = \pm\sqrt{2}$, es decir, los puntos de intersección de las gráficas son $(-2, 0)$, $(-\sqrt{2}, -4)$, $(\sqrt{2}, -4)$ y $(2, 0)$.

En los intervalos $-2 \le x \le -\sqrt{2}$, $\sqrt{2} \le x \le 2$, la gráfica de $f(x)$ queda por debajo de la de $g(x)$, y en el intervalo $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$ sucede lo contrario.

En consecuencia, el área se calcula de la siguiente forma:

$$\text{Área} = \int_{-2}^{2} |\, f(x) - g(x) \,|\, dx =$$
$$= \int_{-2}^{-\sqrt{2}} [g(x) - f(x)]\, dx + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [f(x) - g(x)]\, dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} [g(x) - f(x)]\, dx =$$
$$= \int_{-2}^{-\sqrt{2}} \big[(2x^2 - 8) - (x^4 - 4x^2)\big]\, dx + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \big[(x^4 - 4x^2) - (2x^2 - 8)\big]\, dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} \big[(2x^2 - 8) - (x^4 - 4x^2)\big]\, dx =$$
$$= \int_{-2}^{-\sqrt{2}} [-x^4 + 6x^2 - 8]\, dx + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [x^4 - 6x^2 + 8]\, dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} [-x^4 + 6x^2 - 8]\, dx =$$
$$= \left(-\frac{x^5}{5} + 2x^3 - 8x\right)\Bigg|_{-2}^{-\sqrt{2}} + \left(\frac{x^5}{5} - 2x^3 + 8x\right)\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} + \left(-\frac{x^5}{5} + 2x^3 - 8x\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2} =$$
$$= \left[-\frac{(-\sqrt{2})^5}{5} + 2(-\sqrt{2})^3 - 8(-\sqrt{2})\right] - \left[-\frac{(-2)^5}{5} + 2(-2)^3 - 8(-2)\right] + \left[\frac{(\sqrt{2})^5}{5} - 2(\sqrt{2})^3 + 8\sqrt{2}\right] -$$
$$- \left[\frac{(-\sqrt{2})^5}{5} - 2(-\sqrt{2})^3 + 8(-\sqrt{2})\right] + \left[-\frac{2^5}{5} + 2(2)^3 - 8(2)\right] - \left[-\frac{(\sqrt{2})^5}{5} + 2(\sqrt{2})^3 - 8\sqrt{2}\right] =$$

$$= \left[\frac{4\sqrt{2}}{5} - 4\sqrt{2} + 8\sqrt{2}\right] - \left[\frac{32}{5} - \cancel{16} + \cancel{16}\right] + \left[\frac{4\sqrt{2}}{5} - 4\sqrt{2} + 8\sqrt{2}\right] - \left[-\frac{4\sqrt{2}}{5} + 4\sqrt{2} - 8\sqrt{2}\right] +$$

$$+ \left[-\frac{32}{5} + \cancel{16} - \cancel{16}\right] - \left[-\frac{4\sqrt{2}}{5} + 4\sqrt{2} - 8\sqrt{2}\right] = \frac{16\sqrt{2}}{5} + 16\sqrt{2} - \frac{64}{5} =$$

$$= \frac{96\sqrt{2}}{5} - \frac{64}{5}\ \mathrm{u}^2.$$

Observe que los cálculos anteriores pudieron haberse simplificado de haber usado la paridad y simetría de las gráficas. En realidad habría bastado con calcular

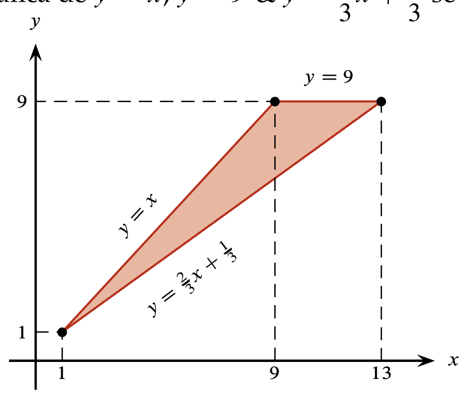
$$\text{Área} = 2\int_0^{\sqrt{2}} [x^4 - 6x^2 + 8]\ \mathrm{d}x + 2\int_{\sqrt{2}}^{2} [-x^4 + 6x^2 - 8]\ \mathrm{d}x,$$

para obtener el mismo resultado.

□

Ejemplo 3.2.7 *Considerar la región delimitada por las gráficas de $y = x$, $y = 9$ & $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$. Calcular el área de la región descrita integrando primeramente sobre el eje x; posteriormente realizar el cálculo del área integrando sobre el eje y.*

▼ La región delimitada por la gráfica de $y = x$, $y = 9$ & $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}$ se muestra en la siguiente figura:



El área de la región integrando sobre el eje x es

$$A(R) = \int_1^9 \left[x - \left(\tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3}\right)\right] \mathrm{d}x + \int_9^{13} + \left[9 - \left(\tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3}\right)\right] \mathrm{d}x =$$

$$= \int_1^9 \left(x - \tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{3}\right) \mathrm{d}x + \int_9^{13} + \left(9 - \tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{3}\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_1^9 \left(\tfrac{x}{3} - \tfrac{1}{3}\right) \mathrm{d}x + \int_9^{13} + \left(\tfrac{26}{3} - \tfrac{2}{3}x\right) \mathrm{d}x =$$

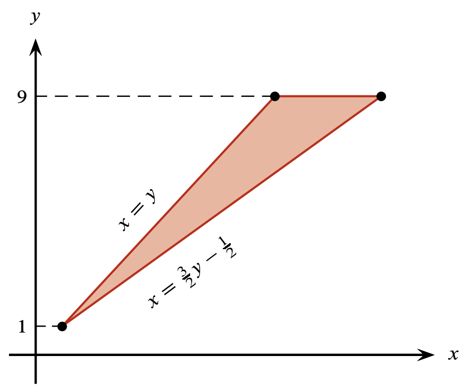
$$= \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x}{3}\right)\Bigg|_1^9 + \left(\frac{26}{3}x - \frac{x^2}{3}\right)\Bigg|_9^{13} =$$

$$= \left(\frac{9^2}{6} - \frac{9}{3}\right) - \left(\frac{1^2}{6} - \frac{1}{3}\right) + \left[\frac{(26)(13)}{3}x - \frac{(13)^2}{3}\right] - \left[\frac{(26)(9)}{3} - \frac{9^2}{3}\right] =$$

$$= \frac{81}{6} - 3 - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{338}{3} - \frac{169}{3} - 78 + \frac{81}{3} =$$

$$= \frac{80}{6} + \frac{251}{3} - 81 = \frac{80 + 502 - 486}{6} = 16\ \mathrm{u}^2.$$

Para calcular el área de la región al integrar sobre el eje y, se debe encontrar la inversa de $y = x$ & $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$. Respectivamente, $x = y$ & $x = \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}$.



El área de la región al integrar sobre el eje y es

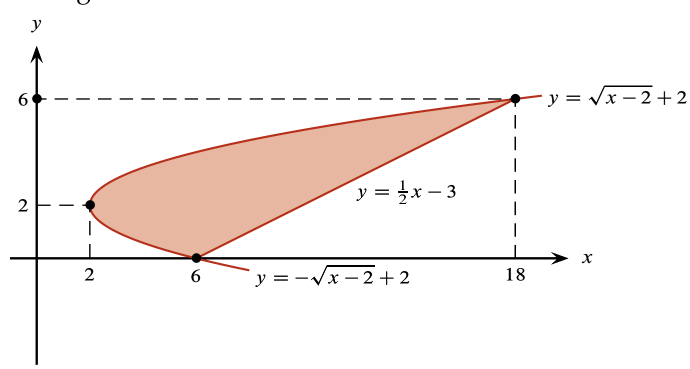
$$A(R) = \int_1^9 \left[\left(\frac{3}{2}y - \frac{1}{2}\right) - y\right] \mathrm{d}y = \int_1^9 \left(\frac{y}{2} - \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}y = \left(\frac{y^2}{4} - \frac{y}{2}\right)\Big|_1^9 = \left(\frac{9^2}{4} - \frac{9}{2}\right) - \left(\frac{1^2}{4} - \frac{1}{2}\right) =$$
$$= \frac{81}{4} - \frac{9}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 20 - 4 = 16\ \mathrm{u}^2.$$

□

Para el cálculo del área de una región resulta más sencillo, en algunos casos, integrar sobre uno de los dos ejes del plano cartesiano. En el ejemplo anterior, el cálculo del área de la región al integrar sobre el eje y resultó más sencillo.

Ejemplo 3.2.8 *Sean las funciones $f(x) = \sqrt{x-2} + 2$, $g(x) = -\sqrt{x-2} + 2$ & $h(x) = \frac{x}{2} - 3$. Obtener el área de la región delimitada por sus gráficas.*

▼ Se muestra a continuación la región descrita:

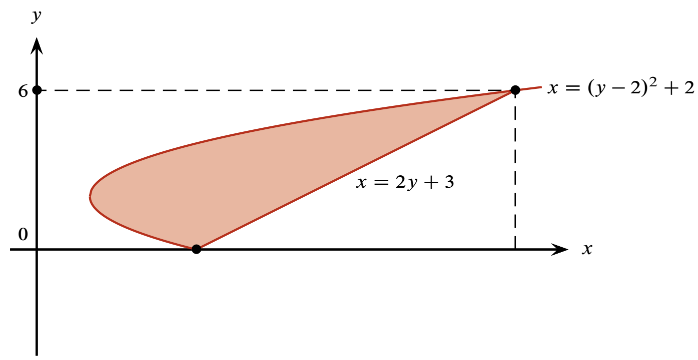


Si se integra sobre el eje x, el área de la región es

$$A(R) = \int_2^6 \left[\left(\sqrt{x-2} + 2\right) - \left(-\sqrt{x-2} + 2\right)\right] \mathrm{d}x + \int_6^{18} \left[\left(\sqrt{x-2} + 2\right) - \left(\tfrac{1}{2}x - 3\right)\right] \mathrm{d}x =$$
$$= \int_2^6 \left(2\sqrt{x-2}\right) \mathrm{d}x + \int_6^{18} \left(\sqrt{x-2} - \tfrac{1}{2}x + 5\right) \mathrm{d}x = \frac{32}{3} + \frac{76}{3} = \frac{108}{3} = 36\ \mathrm{u}^2.$$

Resulta más sencillo si integra con respecto a y. Las funciones x de y que delimitan la región son

$$x = (y-2)^2 + 2 \ \&\ x = 2y + 3.$$



Si se integra sobre el eje y, el área de la región es

$$A(R) = \int_0^6 \left[(2y+3) - \left((y-2)^2 + 2\right)\right] \mathrm{d}y = \int_0^6 \left(-y^2 + 6y - 3\right) \mathrm{d}y = \left(-\frac{y^3}{3} + 3y^2 - 3y\right)\Big|_0^6 = 36\ \mathrm{u}^2.$$

□

Ejercicios 3.2.1 *Áreas.* *Soluciones en la página 13*

1. Determinar el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones
$$f(x) = 4x(1-x) \;\&\; g(x) = 4x - 4.$$
2. Determinar el área de la región delimitada por la gráfica de las función $f(x) = 3(x-1)(x-2)(x-3)$ y el eje x.
3. Determinar el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^3$ & $g(x) = x$.
4. Determinar el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones $f(x) = |\,x\,|$ & $g(x) = \dfrac{x^2}{2}$.
5. Calcular el área de las regiones delimitadas por las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 4x$ & $g(x) = -3x^2$.
6. Determinar el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones $g(x) = \operatorname{sen} 2x$ & $h(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
7. Calcular el área de la región delimitada por la curva $y = e^x$ y las rectas $y = 10$ & $x = 0$.
8. Calcular el área de la región delimitada por la las curvas $y = e^x$ & $y = e^{-x}$ y la recta $y = 4$.
9. Encontrar el área de la región delimitada por la curva $y = xe^{-x^2}$ y las rectas $y = 0$ & $x = 1$.
10. Realice un bosquejo de la región delimitada por las curvas $y = \cos x$ & $y = 2 - \cos x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Calcular el área de dicha región.
11. Sea R_1 la región del plano entre las curvas $y = |x^2 - 2x|$ & $y = 3$. Calcular el área de R_1.
12. Calcular el área de la región limitada por las gráficas de $y = e^x$, $y = e^{-2x}$ y la recta $x = \ln 4$.
13. Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de la función $y = \ln(x-1)$ y las rectas $y = x - 2$ & $x = 3$.
14. Calcular el área de la región encerrada por las gráficas de $f(x) = \cos x$, $g(x) = e^x$ & la recta $x = \pi$.
15. Calcular el área de la región del plano limitado por el eje x, y las curvas $y = (x-1)^2$, $y = (x-3)^2$.
16. Calcular el área de la región del plano limitada por las curvas $y = \ln x$, $y = e^x$ y las rectas $x = 1$, $x = 2$.

17. Encontrar el área limitada por las curvas $y = \operatorname{sen} x$ & $y = \cos x$ en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

18. Calcular el área de la región del plano limitada por las gráficas de $y = x^2 + 4$, $y = -2x + 3$ & $y = 6x - 5$.

19. Determine el área de la región acotada por las gráficas de $y = e^x$, $y = x^2 - 2$, $x = 1$, $x = -1$.

20. Considerar la región delimitada por las curvas $x = (y-1)^2$ & $x = 2y$. Determinar el área de la región integrando sobre el eje y y sobre el eje x.

Ejercicios 3.2.1 *Áreas.* *Preguntas, página 11*

1. $\dfrac{16}{3}\,\mathrm{u}^2$.
2. $\dfrac{3}{2}\,\mathrm{u}^2$.
3. $\dfrac{1}{2}\,\mathrm{u}^2$.
4. $\dfrac{4}{3}\,\mathrm{u}^2$.
5. $\dfrac{131}{4}\,\mathrm{u}^2$.
6. $\dfrac{3}{4}\,\mathrm{u}^2$.
7. $10\ln(10) - 9 \approx 14.0259\,\mathrm{u}^2$.
8. $8\ln(4) - 6 \approx 5.0904\,\mathrm{u}^2$.
9. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e-1}{e}\right) \approx 0.3161\,\mathrm{u}^2$.
10. $4\pi\,\mathrm{u}^2$.
11. $8\,\mathrm{u}^2$.
12. $\dfrac{81}{32}\,\mathrm{u}^2$.
13. $\left(\dfrac{3}{2} - \ln 4\right)\mathrm{u}^2$.
14. $(-1 + e^{\pi})\,\mathrm{u}^2$.
15. $\dfrac{2}{3}\,\mathrm{u}^2$.
16. $[1 + e(e-1) - \ln 4]\,\mathrm{u}^2$.
17. $2\sqrt{2}\,\mathrm{u}^2$.
18. $\dfrac{16}{3}\,\mathrm{u}^2$.
19. $\left(\dfrac{10}{3} - \dfrac{1}{e} + e\right)\mathrm{u}^2$.
20. $\dfrac{32}{3}\,\mathrm{u}^2$.