CAPÍTULO

2

Métodos de Integración

[1]

2.7 Integrales impropias

Hasta aquí, al referirnos a la integral definida $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ consideramos que f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, el cual tiene una longitud finita $b - a$. Es decir, para la integral definida $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se exige el cumplimiento de dos requisitos escenciales: la continuidad de la función f en todo el intervalo de integración y además que dicho intervalo sea cerrado. Son estas características las que dan sustento a la definición de la integral de Riemann:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{|\Delta x|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i .$$

La finitud del intervalo $[a, b]$ nos permite obtener un número finito n de subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ y todos de longitud finita $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; y la continuidad de f en todo el intervalo cerrado $[a, b]$ nos permite asegurar la existencia de cada número $f(c_i)$ para $x_{i-1} \le c_i \le x_i$; con $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Entonces, tiene sentido hablar de la suma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, ya que independientemente de la partición realizada, cada término $f(c_i)\Delta x_i$ está bien definido.

Si además de ser continua, $f(x) \ge 0$ para cada $a \le x \le b$, entonces la integral definida $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ puede ser interpretada como el área de la región del plano limitada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = a$, $x = b$. En general, para f continua en $[a, b]$, la integral definida $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ puede interpretarse como una suma algebraica de áreas (sumandos positivos); o bien, como una suma algebraica de números (positivos o negativos) . En cualquiera de los casos, la integral definida $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ es un número real fijo.

1. canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017

Ahora trataremos con integrales definidas en las que no se cumple la continuidad de la función f en un intervalo cerrado $[a, b]$; es decir, trataremos con integrales definidas donde no se cumple al menos una de las dos condiciones: continuidad de la función en el intervalo de integración y finitud del intervalo de integración.

- Denominamos integrales impropias aquellas que cumplen:
  1. El intervalo de integración tiene longitud infinita, sección 2.7.1.
  2. El integrando f tiene una asíntota vertical en el intervalo de integración, sección 2.7.2 (pág. 7).

2.7.1 Las integrales impropias $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

Vamos a considerar cada uno de los casos.

i. ¿Cómo calcular $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$?

Suponiendo la continuidad de la función f en el intervalo $[a, \infty)$, se puede asegurar que f es continua en el intervalo cerrado $[a, r]$ para $r > a$.

Aquí procedemos de la siguiente manera.

- Primero, calculamos la integral definida $\displaystyle\int_a^{r} f(x)\,dx$, la cual resulta ser una función $g(r)$.
- Segundo, se permite a r crecer indefinidamente y se calcula

$$\lim_{r\to+\infty} g(r) = \lim_{r\to+\infty} \int_a^{r} f(x)\,dx.$$

- Se concluye según sea el resultado del $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} g(r)$.

a. Cuando $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} g(r) = L$, con $L \in \mathbb{R}$, se dice que la integral impropia $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge a L y se escribe $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = L$. Es decir, en este caso se asigna un valor numérico (L) a la integral impropia $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

b. Cuando $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} g(r) = \infty$, se dice que la integral impropia $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge a ∞. En este caso no se asigna un valor numérico a la integral impropia $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Se puede escribir $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \infty$, pero teniendo presente que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \xrightarrow[\text{tiende a}]{\text{diverge a}} \infty$, y que $\infty \notin \mathbb{R}$.

Ejemplo 2.7.1 *Calcular la integral impropia* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$.

▼ La función $f(x) = e^{-x}$ es continua en todo $\mathbb{R}$, luego es continua en el intervalo $[0, +\infty)$ y por lo mismo es continua en el intervalo cerrado $[0, r]$ para $r > 0$.

Calculamos la integral definida $\displaystyle\int_0^r e^{-x}\,dx$.

$$\int_0^r e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^r = -e^{-r} - \left(-e^{0}\right) = -e^{-r} + 1 = 1 - e^{-r} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_0^r e^{-x}\,dx = g(r) = 1 - e^{-r}.$$

Ahora calculamos $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} g(r)$.

$$\lim_{r\to+\infty} g(r) = \lim_{r\to+\infty} (1 - e^{r}) = \lim_{r\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{e^{r}}\right) = 1 - 0 = 1 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{r\to+\infty}\int_0^r e^{-x}\,dx = 1.$$

Entonces, la integral impropia $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ converge a 1.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1.$$

En este caso se asigna el valor numérico 1 a la integral impropia $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$.

□

Ejemplo 2.7.2 *Calcular la integral impropia* $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

▼ La función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ es continua en todo su dominio $D_f = (0, +\infty)$, por lo que es continua en el intervalo cerrado $[1, r]$ para $r > 1$. Ahora,

$$\int_1^r \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_1^r x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[2x^{-\frac{1}{2}}\right]_1^r = 2\sqrt{r} - 2\sqrt{1} = 2\sqrt{r} - 2.$$

Es decir,

$$\int_1^r \frac{dx}{\sqrt{x}} = g(r) = 2\sqrt{r} - 2.$$

Luego,

$$\lim_{r\to+\infty} g(r) = \lim_{r\to+\infty}\left[2\sqrt{r} - 2\right] = +\infty.$$

Entonces,

$$\lim_{r\to+\infty} g(r) = \lim_{r\to+\infty}\int_1^r \frac{dx}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Por lo tanto, la integral impropia $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ diverge a $+\infty$.

Es decir, $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}} \xrightarrow[\text{tiende a}]{\text{diverge a}} +\infty$ y podemos escribir $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \infty$.

□

Ejemplo 2.7.3 *Calcular la integral impropia* $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-2x}\,dx$.

▼ Por ser $f(x) = xe^{-2x}$ una función continua en todo su dominio $\mathbb{R}$, podemos asegurar su continuidad en el intervalo cerrado $[0, r]$ para $r > 0$. Determinaremos la integral definida $\int_0^r xe^{-2x}\,dx$, calculando primero la integral indefinida $\int xe^{-2x}\,dx$ mediante integración por partes.

$$\underbrace{\int xe^{-2x}\,dx}_{\boxed{\begin{array}{ccc} u = x & \& & dv = e^{-2x}\,dx; \\ du = dx & \& & v = -\frac{1}{2}e^{-2x}. \end{array}}} = x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \int -\frac{1}{2}e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C = -\frac{1}{4}e^{-2x}(2x+1) + C.$$

Luego,

$$\int_0^r xe^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{4}(2x+1)e^{-2x}\right]_0^r = -\frac{1}{4}(2r+1)e^{-2r} + \frac{1}{4}e^0 = \frac{1}{4}\left[1 - \frac{2r+1}{e^{2r}}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^r xe^{-2x}\,dx = g(r) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2r+1}{e^{2r}}\right).$$

Entonces, aplicando la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{r\to\infty} g(r) = \lim_{r\to\infty}\left[\frac{1}{4} - \frac{2r+1}{4e^{2r}}\right] = \frac{1}{4} - \lim_{r\to\infty}\frac{2r+1}{4e^{2r}} = \frac{1}{4} - \lim_{r\to\infty}\frac{(2r+1)'}{(4e^{2r})'} =$$

$$= \frac{1}{4} - \lim_{r\to\infty}\frac{2}{8e^{2r}} = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{r\to\infty} g(x) = \lim_{r\to\infty}\int_0^r xe^{-2x}\,dx = \frac{1}{4}.$$

En este caso, la integral impropia $\int_0^\infty xe^{-2x}\,dx$ converge a $\frac{1}{4}$.

Por lo tanto, en este caso, la integral impropia $\int_0^\infty xe^{-2x}\,dx$ tiene un valor numérico asignado, que es $\int_0^\infty xe^{-2x}\,dx = \frac{1}{4}$.

□

ii. ¿Cómo calcular la integral impropia $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$?

Generalmente la expresión algebraica $-r$ es asociada mentalmente con un número negativo, lo cual es debido a la presencia explícita del signo negativo $(-)$ y sabemos que esto es cierto $(-r < 0)$ cuando $r > 0$. Por simplicidad haremos uso de esta relación.

Considerando que $r > 0$ podemos asegurar que $-r < 0$ y además que $-r \to -\infty$ cuando $r \to +\infty$.

Hecha esta aclaración procedemos a calcular la integral impropia $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ en el supuesto de que la función f sea continua en el intervalo $(-\infty, b]$. El procedimiento es análogo al efectuado en el caso anterior. Con f continua en el intervalo $(-\infty, b]$ se asegura la continuidad de f en el intervalo cerrado $[-r, b]$ para $-r < b$ y calculamos la integral definida $\int_{-r}^b f(x)\,dx$, la cual resulta ser una función $g(r)$. Luego permitimos que $r \to +\infty$, para así lograr que $-r \to -\infty$, y calculamos $\lim_{r\to+\infty} g(r)$.

Se concluye, como en el caso anterior, aclarando si la integral impropia converge o o bien diverge.

Ejemplo 2.7.4 *Calcular la integral impropia* $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x\, dx$.

▼ Considerando $r > 0$, aseguramos que $-r < 0$ y además que $-r \to -\infty$ cuando $r \to +\infty$.

La función $f(x) = e^x$ es continua en toda la recta real, por lo que es continua en el intervalo cerrado $[-r, 0]$. Calculamos la integral definida $\displaystyle\int_{-r}^{0} e^x\, dx$.

$$\int_{-r}^{0} e^x\, dx = e^x \Big|_{-r}^{0} = e^0 - e^{-r} = 1 - \frac{1}{e^r}.$$

Es decir,

$$\int_{-r}^{0} e^x\, dx = g(r) = 1 - \frac{1}{e^r}.$$

Entonces,

$$\lim_{r\to+\infty} g(r) = \lim_{r\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{e^r}\right) = 1 - 0 = 1.$$

Esto es,

$$\lim_{r\to+\infty} g(r) = \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{0} e^x\, dx = 1.$$

Por lo tanto, la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x\, dx$ converge a 1 y escribimos $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x\, dx = 1$.

En este caso se asigna un valor numérico (1) a la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x\, dx$.

□

Ejemplo 2.7.5 *Calcular la integral impropia* $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

▼ Considerando $r > 1$ aseguramos que $-r < -1$ y además que $-r \to -\infty$ cuando $r \to +\infty$.

La función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ es continua en el intervalo cerrado $[-r, -1]$.

Calculamos la integral definida $\displaystyle\int_{-r}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

$$\int_{-r}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_{-r}^{-1} x^{-\frac{1}{3}}\, dx = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \Big|_{-r}^{-1} = \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{x^2}\right] \Big|_{-r}^{-1} =$$
$$= \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{(-1)^2} - \sqrt[3]{(-r)^2}\right] = \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{r^2}\right] = \frac{3}{2}\left(1 - \sqrt[3]{r^2}\right).$$

Es decir,

$$\int_{-r}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}\, dx = g(r) = \frac{3}{2}\left(1 - \sqrt[3]{r^2}\right).$$

Luego,

$$\lim_{r\to+\infty} g(r) = \lim_{r\to+\infty} \left[\frac{3}{2}\left(1 - \sqrt[3]{r^2}\right)\right] = \frac{3}{2} - \infty = -\infty.$$

Esto es,

$$\lim_{r\to+\infty} g(r) = \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = -\infty.$$

Se tiene en este caso que la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ diverge a $-\infty$.

Expresado de otra manera, $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \xrightarrow[\text{tiende a}]{\text{diverge a}} -\infty$, y podemos escribir $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = -\infty$ teniendo presente que $-\infty$ no es valor numérico.

□

iii. ¿Cómo calcular la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$?

Por supuesto, se supone que f es una función continua en toda la recta real $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

Aquí se considera que para algún real a fijo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx.$$

- La integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ converge cuando ambas integrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ & $\displaystyle\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ convergen.
- La integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ diverge cuando al menos una de las integrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ o bien $\displaystyle\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ diverge.

Ejemplo 2.7.6 *Calcular la integral impropia* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}\,dx$.

▼ Tomando al real fijo $a = 0$ tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Calculamos estas integrales impropias

a.
$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{r\to\infty} \int_{0}^{r} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{r\to\infty} [\arctan x]_0^r = \lim_{r\to\infty} [\arctan r - 0] = $$
$$= \lim_{r\to\infty} [\arctan r] = \frac{\pi}{2}.$$

Entonces la integral $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ converge a $\dfrac{\pi}{2}$.

b. Por ser $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ una función par:

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Entonces la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$ converge a $\dfrac{\pi}{2}$.

c. Por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

□

Ejercicios 2.7.1 *Integrales impropias.* *Soluciones en la página* 13

1. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4}$.
2. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x}}$.
3. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3}}$.
4. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.
5. $\displaystyle\int_0^{\infty} 9e^{-3x}\,\mathrm{d}x$.
6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.
7. $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.
8. $\displaystyle\int_0^{\infty} 4xe^{-2x}\,\mathrm{d}x$.
9. $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}$.
10. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$.
11. $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2e^{-x}\,\mathrm{d}x$.
12. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.
13. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$.
14. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$.
15. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{e^{x^2}}\,\mathrm{d}x$.
16. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{1+e^{2x}}$.
17. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{2x^3}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$.
18. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

2.7.2 Integrales impropias $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ con asíntota vertical

Aquí consideramos integrales impropias del tipo:

i. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, con f continua en $(a,b]$ y con $x=a$ asíntota vertical.

ii. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, con f continua en $[a,b)$ y con $x=b$ asíntota vertical.

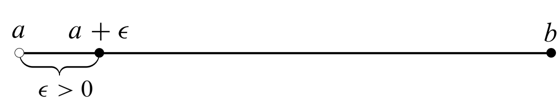
iii. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, con f continua en $[a,b]$, excepto en $c\in(a,b)$ donde f tiene una discontinuidad infinita.

¿Cómo proceder para calcular estos tipos de integrales impropias?

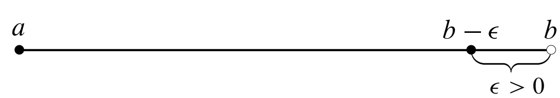
En general, para calcular estas integrales impropias, se propone evitar el punto problemático $x=a$ en las integrales de primer tipo; $x=b$ en las de segundo tipo; $x=c$ en las de tercer tipo.

¿Cómo evitar el punto problemático? Guardando una sana distancia de él. Dicha distancia será lograda considerando un número real positivo ξ, que servirá para denotar una separación del punto problemático. Es decir, el número $\xi>0$ será utilizado para evitar el punto problemático:

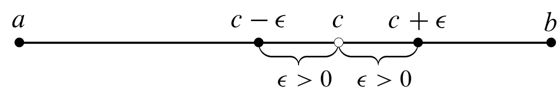
i. $x=a$, considerando el intervalo cerrado $[a+\xi,b]$ en vez del intervalo semiabierto $(a,b]$:



ii. $x=b$, considerando el intervalo cerrado $[a,b-\xi]$ en vez del intervalo semiabierto $[a,b)$:



iii. $x=c$, considerando los intervalos cerrados $[a,c-\xi]$ y $[c+\xi,b]$ en vez de los intervalos $[a,c)$ y $(c,b]$:



Ya sabemos cómo evitar el punto problemático. Ahora procedemos a calcular la integral definida de una función continua en un intervalo cerrado.

i. Calculamos $\displaystyle\int_{a+\xi}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$, con f continua en un intervalo cerrado $[a+\xi, b]$. Aquí se obtiene una función:

$$g(\xi) = \int_{a+\xi}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

ii. Calculamos $\displaystyle\int_{a}^{b-\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$, con f continua en un intervalo cerrado $[a, b-\xi]$. Aquí se obtiene una función:

$$g(\xi) = \int_{a}^{b-\xi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

iii. Calculamos las integrales definidas $\displaystyle\int_{a}^{c-\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$ & $\displaystyle\int_{c+\xi}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ en los intervalos cerrados $[a, c-\xi]$ & $[c+\xi, b]$, respectivamente. También aquí se obtiene una función:

$$g(\xi) = \int_{a}^{c-\xi} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\xi}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Para cada caso tenemos una $g(\xi)$. Ahora proponemos $\xi \to 0^+$ y calculamos $\displaystyle\lim_{\xi\to 0^+} g(\xi)$. Finalmente, concluimos aclarando si la integral impropia converge o diverge, así como en los casos anteriormente ejemplificados. Esto es,

- Si $\displaystyle\lim_{\xi\to 0^+} g(\xi) = L$, con $L \in \mathbb{R}$, entonces la integral impropia correspondiente converge a L;
- Si $\displaystyle\lim_{\xi\to 0^+} g(\xi) = \infty$, entonces la integral impropia correspondiente diverge a ∞.

Ejemplo 2.7.7 *Calcular la integral impropia* $\displaystyle\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$.

▼ La función $f(x) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$ es continua en todo su dominio $D_f = (1, +\infty)$ y además la recta $x = 1$ es una asíntota vertical para f ya que $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$.

Entonces, la integral $\displaystyle\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$ es impropia con f continua en el intervalo $(1, 5]$. Evitamos el punto problemático $x = 1$ tomando un número $\xi > 0$ y considerando el intervalo cerrado $[1+\xi, 5]$ donde f es continua.

Calculamos la integral definida $\displaystyle\int_{1+\xi}^5 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$.

$$\int_{1+\xi}^5 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}} = \int_{1+\xi}^5 (x-1)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = 2(x-1)^{\frac{1}{2}}\Big|_{1+\xi}^5 = 2\sqrt{x-1}\,\Big|_{1+\xi}^5 =$$
$$= 2\sqrt{5-1} - 2\sqrt{1+\xi-1} = 2(2) - 2\sqrt{\xi} = 4 - 2\sqrt{\xi}.$$

Se tiene aquí la función $g(\xi) = 4 - 2\sqrt{\xi}$.

Calculamos $\lim\limits_{\xi \to 0^+} g(\xi)$:

$$\lim_{\xi \to 0^+} g(\xi) = \lim_{\xi \to 0^+} \left[4 - 2\sqrt{\xi}\right] = 4 - 2(0) = 4.$$

Es decir,

$$\lim_{\xi \to 0^+} g(\xi) = \lim_{\xi \to 0^+} \int_{1+\xi}^{5} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}} = 4.$$

Se tiene en este caso que la integral impropia $\displaystyle\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$ converge a 4 y escribimos $\displaystyle\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}} = 4$. Esto es, se asigna el valor numérico 4 a la integral impropia $\displaystyle\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$.

□

Ejemplo 2.7.8 *Calcular la integral impropia* $\displaystyle\int_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2}$.

▼ La función $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ es continua en todo su dominio $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ y además la recta $x = 2$ es una asíntota vertical para f ya que $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty$, así como $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$.

Entonces, la integral $\displaystyle\int_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2}$ es impropia con f continua en el intervalo $(2, 4]$. Evitamos el punto problemático $x = 2$ tomando un número $\xi > 0$ y considerando el intervalo cerrado $[2 + \xi, 4]$ donde f es continua. Ahora bien,

$$\int_{2+\xi}^{4} \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2} = \int_{2+\xi}^{4} (x-2)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{(x-2)^{-1}}{-1}\Big|_{2+\xi}^{4} = -\frac{1}{x-2}\Big|_{2+\xi}^{4} =$$
$$= -\frac{1}{4-2} + \frac{1}{2+\xi-2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\xi} = \frac{1}{\xi} - \frac{1}{2}.$$

Veamos la función $g(\xi) = \dfrac{1}{\xi} - \dfrac{1}{2}$.

Esta función cumple:

$$\lim_{\xi \to 0^+} g(\xi) = \lim_{\xi \to 0^+} \left[\frac{1}{\xi} - \frac{1}{2}\right] = +\infty.$$

Es decir,

$$\lim_{\xi \to 0^+} g(\xi) = \lim_{\xi \to 0^+} \int_{2+\xi}^{4} \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2} = +\infty.$$

Entonces, en este caso, la integral impropia $\displaystyle\int_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2}$ diverge a $+\infty$, y no se asigna un valor numérico a esta integral impropia.

□

Ejemplo 2.7.9 *Calcular la integral impropia* $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2-x}}$.

▼ La función $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2-x}}$ es continua en todo su dominio $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$ y además la recta $x = 2$ es una asíntota vertical ya que $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{\sqrt[3]{2-x}} = +\infty$.

Entonces, la integral $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2-x}}$ es impropia, con g continua en el intervalo $[1,2)$. Evitamos el punto problemático $x=2$ tomando un número $\xi>0$ y considerando el intervalo cerrado $[1,2-\xi]$ donde g es continua. Ahora,

$$\int_1^{2-\xi} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2-x}} = \int_1^{2-\xi} (2-x)^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}(2-x)^{\frac{2}{3}}\Big|_1^{2-\xi} =$$
$$= -\frac{3}{2}\,[2-(2-\xi)]^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}(2-1)^{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}(\xi)^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}.$$

Se tiene aquí la función $h(\xi) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}(\xi)^{\frac{2}{3}}$.

Entonces:

$$\lim_{\xi\to 0^+} h(\xi) = \lim_{\xi\to 0^+} \frac{3}{2}\left(1-(\xi)^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{3}{2}\lim_{\xi\to 0^+}\left(1-\sqrt[3]{\xi^2}\right) = \frac{3}{2}.$$

Es decir,

$$\lim_{\xi\to 0^+} h(\xi) = \lim_{\xi\to 0^+}\int_1^{2-\xi} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2-x}} = \frac{3}{2}.$$

Por lo tanto, la integral impropia $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2-x}}$ converge al número $\dfrac{3}{2}$ y escribimos $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2-x}} = \frac{3}{2}$.

□

Ejemplo 2.7.10 *Calcular la integral impropia* $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{(3-x)^3}$.

▼ La función $f(x) = \dfrac{1}{(3-x)^3}$ es continua en su dominio $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$ y además la recta $x=3$ es una asíntota vertical ya que $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}\frac{1}{(3-x)^3} = +\infty$.

Entonces, la integral $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{(3-x)^3}$ es impropia, con f continua en el intervalo $[0,3)$. Evitamos al punto problema $x=3$ tomando un número real $\xi>0$ y considerando el intervalo cerrado $[0,3-\xi]$ donde f es continua. Ahora bien,

$$\int_0^{3-\xi} \frac{\mathrm{d}x}{(3-x)^3} = \int_0^{3-\xi} (3-x)^{-3}\,\mathrm{d}x = -\frac{(3-x)^{-2}}{-2}\Big|_0^{3-\xi} = \frac{1}{2(3-x)^2}\Big|_0^{3-\xi} =$$
$$= \frac{1}{2[3-(3-\xi)]^2} - \frac{1}{2(3-0)^2} = \frac{1}{2\xi^2} - \frac{1}{18}.$$

Tenemos aquí la función $g(\xi) = \dfrac{1}{2\xi^2} - \dfrac{1}{18}$.

De lo que se obtiene

$$\lim_{\xi\to 0^+} g(\xi) = \lim_{\xi\to 0^+}\left[\frac{1}{2\xi^2} - \frac{1}{18}\right] = +\infty.$$

Es decir,

$$\lim_{\xi\to 0^+} g(\xi) = \lim_{\xi\to 0^+}\int_0^{3-\xi} \frac{\mathrm{d}x}{(3-x)^3} = +\infty.$$

Por lo tanto, la integral impropia $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{(3-x)^3}$ diverge a $+\infty$.

□

Ejemplo 2.7.11 *Calcular la integral impropia* $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}}$.

▼ La función $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$ es continua en todo su dominio $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$ y además la recta $x = 1$ es una asíntota vertical de g ya que $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}} = -\infty$ & $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}} = +\infty$.

Entonces, la integral $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}}$ es impropia, con g continua en el intervalo $[0, 3]$ excepto en $x = 1$ donde tiene una discontinuidad infinita.

Aislamos el punto problemático $x = 1$ tomando un número $\xi > 0$ y considerando los intervalos cerrados $[0, 1-\xi]$ & $[1+\xi, 3]$ donde la función g es continua. Ahora bien, por la propiedad de aditividad respecto al intervalo:

$$\int_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x,$$

donde las integrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}}$ & $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}}$ son impropias.

Por esta razón calculamos la suma de las integrales

$$\begin{aligned}
\int_0^{1-\xi} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}} + \int_{1+\xi}^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}} &= \int_0^{1-\xi} (x-1)^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x + \int_{1+\xi}^3 (x-1)^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}}\Big|_0^{1-\xi} + \frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}}\Big|_{1+\xi}^3 = \\
&= \left[\frac{3}{2}(1-\xi-1)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}(0-1)^{\frac{2}{3}}\right] + \left[\frac{3}{2}(3-1)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}(1+\xi-1)^{\frac{2}{3}}\right] = \\
&= \frac{3}{2}(-\xi)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}(-1)^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}(2)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}(\xi)^{\frac{2}{3}} = \\
&= \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{(-\xi)^2} - \sqrt[3]{(-1)^2} + \sqrt[3]{(2)^2} - \sqrt[3]{(\xi)^2}\right] = \\
&= \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{\xi^2} - \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{\xi^2}\right] = \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{4} - 1\right].
\end{aligned}$$

Para luego calcular

$$\lim_{\xi\to 0^+}\left[\int_0^{1-\xi} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}} + \int_{1+\xi}^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}}\right] = \lim_{\xi\to 0^+}\left[\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{4}-1\right)\right] = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{4}-1\right).$$

y debido a que, cuando $\xi \to 0^+$,

$$\left[\int_0^{1-\xi} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}} + \int_{1+\xi}^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}}\right] \longrightarrow \int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}},$$

podemos decir que la integral impropia $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}}$ converge a $\dfrac{3}{2}\left(\sqrt[3]{4}-1\right)$.

Es decir,

$$\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{4}-1\right).$$

□

Ejercicios 2.7.2 *Integrales impropias.* *Soluciones en la página 13*

1. $\displaystyle\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$.
2. $\displaystyle\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}$.
3. $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-x}}$.
4. $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{(3-x)^3}$.
5. $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2-x}}$.
6. $\displaystyle\int_0^e \ln x \,\mathrm{d}x$.
7. $\displaystyle\int_0^e x \ln x \,\mathrm{d}x$.
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \,\mathrm{d}x$.
9. $\displaystyle\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}$.
10. $\displaystyle\int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}$.
11. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.
12. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \,\mathrm{d}x$.
13. $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-2}}$.
14. $\displaystyle\int_0^1 x^2 \ln x \,\mathrm{d}x$.
15. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-x}}} \,\mathrm{d}x$.
16. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$.
17. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x \,\mathrm{d}x}{x^2-1}$.
18. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x \,\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$.

Ejercicios 2.7.1 *Integrales impropias.* *Preguntas, página* 6

1. Converge a $\frac{1}{3}$.
2. Diverge a ∞.
3. Converge a 2.
4. Diverge a ∞.
5. Converge a 3.
6. Diverge a ∞.
7. Converge a $\frac{2}{e}$.
8. Converge a 1.
9. Converge a 1.
10. Converge a 0.
11. Converge a 2.
12. Converge a $\frac{\pi^2}{8}$.
13. Diverge a ∞.
14. Converge a $\frac{\pi}{4}$.
15. Converge a $-\frac{1}{2}$.
16. Converge a $\frac{\pi}{2}$.
17. Diverge a ∞.
18. Diverge a ∞.

Ejercicios 2.7.2 *Integrales impropias.* *Preguntas, página* 11

1. Converge a 4.
2. Diverge a ∞.
3. Converge a $2\sqrt{2}$.
4. Diverge a ∞.
5. Converge a $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$.
6. Converge a 0.
7. Converge a $\frac{e^2}{4}$.
8. Converge a $\frac{1}{e}$.
9. Diverge a ∞.
10. Diverge a ∞.
11. Converge a $\frac{\pi}{2}$.
12. Diverge a ∞.
13. Converge a 0.
14. Converge a $-\frac{1}{9}$.
15. Converge a $2\sqrt{1-e^{-1}}$.
16. Diverge a ∞.
17. Diverge a ∞.
18. Converge a 2.