CAPÍTULO

2

Métodos de Integración

[1]

2.3 Integración por partes

El método que presentamos en esta sección está basado en la regla para derivar un producto de funciones .

Como sabemos, si $u = f(x)$ & $v = g(x)$ son funciones derivables, entonces por la regla de la Derivada de un Producto

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

Luego, al integrar se obtiene:

$$\int [f(x)g(x)]'\,\mathrm{d}x = \int \big[f(x)g'(x) + g(x)f'(x)\big]\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x;$$

de donde resulta:

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

A esta igualdad se le denomina fórmula de integración por partes y es esencial para calcular familias importantes de integrales.

Veamos una presentación más compacta de esta fórmula.

Dado que $u = f(x)$ & $v = g(x)$, entonces $\mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x$ & $\mathrm{d}v = g'(x)\,\mathrm{d}x$; luego, la igualdad

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x$$

1. canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017

es equivalente a

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u. \tag{2.2}$$

Esta presentación de la fórmula de integración por partes es la que generalmente se usa en el cálculo de determinadas integrales.

¿Cómo aplicar esta fórmula para calcular una integral arbitraria?

- Calcular la integral indefinida $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

  Se considera que el integrando $f(x)\,\mathrm{d}x$ es, precisamente, $u\,\mathrm{d}v$, para así seleccionar u & $\mathrm{d}v$. Es evidente que $\mathrm{d}x$ formará parte de la diferencial $\mathrm{d}v$.

  Al seleccionar u & $\mathrm{d}v$ debemos cuidar que el cálculo de $v = \int \mathrm{d}v$ sea factible; el cálculo de $\mathrm{d}u$ no presenta dificultad. Hecha la selección de u & $\mathrm{d}v$ y habiendo calculado $\mathrm{d}u$ & $v = \int \mathrm{d}v$, se aplica la fórmula de integración por partes

  $$\int f(x)\,\mathrm{d}x = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

  y aquí debemos cuidar que el cálculo de $\int v\,\mathrm{d}u$ sea factible y no sea más complejo que la integral original.

Ejemplo 2.3.1 *Calcular la integral* $\int xe^x\,\mathrm{d}x$.

▼ Si seleccionamos

$$u = x \quad \& \quad \mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1 \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \quad \& \quad v = \int \mathrm{d}v = \int e^x\,\mathrm{d}x = e^x,$$

entonces:

$$\underbrace{\int xe^x\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{ccc} u = x & \& & \mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & \& & v = e^x. \end{array}}} = uv - \int v\,\mathrm{d}u = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C.$$

□

Ejemplo 2.3.2 *Calcular la integral* $\int x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$.

▼ Si seleccionamos

$$u = x \quad \& \quad \mathrm{d}v = \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1 \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \quad \& \quad v = \int \mathrm{d}v = \int \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -\cos x,$$

entonces,

$$\underbrace{\int x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{ccc} u = x & \& & \mathrm{d}v = \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & \& & v = -\cos x. \end{array}}} = uv - \int v\,\mathrm{d}u = x(-\cos x) - \int -\cos x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x =$$

$$= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C.$$

□

Ejemplo 2.3.3 *Calcular la integral* $\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x$.

▼ Seleccionando $u = x$ & $\mathrm{d}v = \cos 2x\,\mathrm{d}x$:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1 \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \quad \& \quad v = \int \mathrm{d}v = \int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x.$$

Encontramos:

$$\underbrace{\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{ccc} u = x & \& & \mathrm{d}v = \cos 2x\,\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & \& & v = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x. \end{array}}} = uv - \int v\,\mathrm{d}u = x\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) - \int \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}x\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)(-\cos 2x) + C = \frac{1}{2}x\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

□

Ejemplo 2.3.4 *Calcular la integral* $\int x\sqrt{3x+2}\,\mathrm{d}x$.

▼ Si seleccionamos $u = x$ & $\mathrm{d}v = \sqrt{3x+2}\,\mathrm{d}x$:

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}x \quad \& \quad v = \int \sqrt{3x+2}\,\mathrm{d}x = \int (3x+2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(3x+2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9}(3x+2)^{\frac{3}{2}},$$

tenemos:

$$\underbrace{\int x\sqrt{3x+2}\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{ccc} u = x & \& & \mathrm{d}v = \sqrt{3x+2}\,\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & \& & v = \frac{2}{9}(3x+2)^{\frac{3}{2}}. \end{array}}} = x\left(\frac{2}{9}\right)(3x+2)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{9}(3x+2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{9}x(3x+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9}\int (3x+2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9}x(3x+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9}\left(\frac{1}{3}\right)(3x+2)^{\frac{5}{2}}\left(\frac{2}{5}\right) + C =$$

$$= \frac{2}{9}x(3x+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{135}(3x+2)^{\frac{5}{2}} + C.$$

□

Ejemplo 2.3.5 *Calcular la integral* $\int \ln x\,\mathrm{d}x$.

▼ Sin duda alguna $u = \ln x$ & $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$, por lo que : $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ & $v = \int \mathrm{d}x = x$.

Luego,

$$\underbrace{\int \ln x\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{ccc} u = \ln x & \& & \mathrm{d}v = \mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x} & \& & v = x. \end{array}}} = (\ln x)x - \int x\left(\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right) = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

□

Ejemplo 2.3.6 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \arctan x \, \mathrm{d}x$.

▼ Es evidente que $u = \arctan x$ & $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$, por lo que $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{1+x^2} \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ & $v = x$.

Entonces,

$$\underbrace{\int \arctan x \, \mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{ccc} u = \arctan x & \& & \mathrm{d}v = \mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} & \& & v = x. \end{array}}} = (\arctan x)x - \int x \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = x \arctan x - \int \frac{x \, \mathrm{d}x}{1+x^2} =$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C = x \arctan x - \ln\sqrt{1+x^2} + C.$$

□

Para calcular ciertas integrales, es necesario aplicar más de una vez el método de integración por partes. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.3.7 *Calcular la integral* $\displaystyle\int x^2 e^{-2x} \, \mathrm{d}x$.

▼ Se sugiere recordar el cálculo de la integral $\displaystyle\int x e^x \, \mathrm{d}x$ en el ejemplo 2.3.1.

Seleccionando $u = x^2$ & $\mathrm{d}v = e^{-2x} \, \mathrm{d}x$, $\mathrm{d}u = 2x \, \mathrm{d}x$ & $v = \displaystyle\int e^{-2x} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-2x}$.

Entonces,

$$\underbrace{\int x^2 e^{-2x} \, \mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{ccc} u = x^2 & \& & \mathrm{d}v = e^{-2x} \, \mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = 2x \, \mathrm{d}x & \& & v = -\frac{1}{2}e^{-2x}. \end{array}}} = x^2\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \int \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) 2x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} + \int x e^{-2x} \, \mathrm{d}x. \quad (*)$$

Para evaluar $\displaystyle\int x e^{-2x} \, \mathrm{d}x$, se aplica nuevamente integración por partes.

$$\underbrace{\int x e^{-2x} \, \mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{ccc} \hat{u} = x & \& & \mathrm{d}\hat{v} = e^{-2x} \, \mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}\hat{u} = \mathrm{d}x & \& & \hat{v} = -\frac{1}{2}e^{-2x}. \end{array}}} = x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \int \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x} \, \mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{2}x e^{-2x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x} = -\frac{1}{2}x e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-2x}.$$

Al considerar este resultado en (*), obtenemos

$$\int x^2 e^{-2x} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} + \int x e^{-2x} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} + \left[-\frac{1}{2}x e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right] + C =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2}x e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C = -\frac{1}{4}e^{-2x}(2x^2 + 2x + 1) + C.$$

□

Ejemplo 2.3.8 *Calcular la integral* $\displaystyle\int 4x^2\cos 2x\,dx$.

▼ Recordemos las integrales de los ejemplos 2.3.2 y 2.3.3.

Seleccionamos $u = x^2$ & $dv = \cos 2x\,dx \Rightarrow du = 2x\,dx$ & $v = \displaystyle\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$.

Entonces,

$$\underbrace{\int 4x^2\cos 2x\,dx}_{\boxed{\begin{array}{lcl} u = x^2 & \& & dv = \cos 2x; \\ du = 2x\,dx & \& & v = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x. \end{array}}} = 4\int x^2\cos 2x\,dx = 4\left[uv - \int v\,du\right] =$$

$$= 4\left[x^2\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) - \int\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right)2x\,dx\right] =$$

$$= 2x^2\operatorname{sen} 2x - 4\int x\operatorname{sen} 2x\,dx. \qquad (*)$$

Para evaluar $\displaystyle\int x\operatorname{sen} 2x\,dx$, se aplica nuevamente integración por partes.

$$\underbrace{\int x\operatorname{sen} 2x\,dx}_{\boxed{\begin{array}{lcl} \hat{u} = x & \& & d\hat{v} = \operatorname{sen} 2x\,dx; \\ d\hat{u} = dx & \& & \hat{v} = -\frac{1}{2}\cos 2x. \end{array}}} = x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) - \int -\frac{1}{2}\cos 2x\,dx = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\operatorname{sen} 2x = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x.$$

Al considerar este resultado en (*), obtenemos

$$\int 4x^2\cos 2x\,dx = 2x^2\operatorname{sen} 2x - 4\int x\operatorname{sen} 2x\,dx = 2x^2\operatorname{sen} 2x - 4\left[-\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\right] + C =$$
$$= 2x^2\operatorname{sen} 2x + 2x\cos 2x - \operatorname{sen} 2x + C = (2x^2 - 1)\operatorname{sen} 2x + 2x\cos 2x + C.$$

□

Ejemplo 2.3.9 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{-3x^2}{\sqrt{1-x}}\,dx$.

▼ Recordemos cómo calculamos la integral del ejemplo 2.3.4:

Seleccionando $u = x^2$ & $dv = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x}}$:

$$du = 2x\,dx \quad \& \quad v = \int\frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \int(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = -2(1-x)^{\frac{1}{2}}.$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\int \frac{-3x^2}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{lcr} u = x^2 & \& & \mathrm{d}v = (1-x)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x & \& & v = -2(1-x)^{\frac{1}{2}}. \end{array}}} &= -3\int x^2(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = -3\left[uv - \int v\,\mathrm{d}u\right] = \\
&= -3\left[x^2(-2)(1-x)^{\frac{1}{2}} - \int -2(1-x)^{\frac{1}{2}}2x\,\mathrm{d}x\right] = \\
&= 6x^2(1-x)^{\frac{1}{2}} - 12\int x(1-x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x. \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

Se aplica nuevamente integración por partes para evaluar $\displaystyle\int x(1-x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\int x(1-x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{lcr} \hat{u} = x & \& & \mathrm{d}\hat{v} = (1-x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}\hat{u} = \mathrm{d}x & \& & \hat{v} = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}. \end{array}}} &= x\left(-\frac{2}{3}\right)(1-x)^{\frac{3}{2}} - \int -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \\
&= -\frac{2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\int (1-x)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \\
&= -\frac{2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)(1-x)^{\frac{5}{2}} = \\
&= -\frac{2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(1-x)^{\frac{5}{2}}.
\end{aligned}
$$

Al considerar este resultado en (2.3), obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{-3x^2}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x &= 6x^2(1-x)^{\frac{1}{2}} - 12\left[-\frac{2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(1-x)^{\frac{5}{2}}\right] + C = \\
&= 6x^2(1-x)^{\frac{1}{2}} + 8x(1-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{16}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}} + C = \\
&= 2(1-x)^{\frac{1}{2}}\left[3x^2 + 4x(1-x) + \frac{8}{5}(1-x)^2\right] + C = \\
&= \frac{2}{5}\sqrt{1-x}\left[3x^2 + 4x + 8\right] + C.
\end{aligned}
$$

□

Ejemplo 2.3.10 *Calcular la integral* $\displaystyle\int x^4 \ln 3x\,\mathrm{d}x$.

▼ Recordemos cómo calculamos $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x$ en el ejemplo 2.3.5.

Seleccionando $u = \ln 3x$ & $\mathrm{d}v = x^4\,\mathrm{d}x$:

$$
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{3x}(3) = \frac{1}{x} \Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \& \quad v = \int x^4\,\mathrm{d}x = \frac{x^5}{5}.
$$

Entonces,

$$\underbrace{\int x^4 \ln 3x \, dx}_{\boxed{\begin{array}{lcl} u = \ln 3x & \& & dv = x^4 \, dx; \\ du = \frac{dx}{x} & \& & v = \frac{x^5}{5}. \end{array}}} = \int (\ln 3x) x^4 \, dx = (\ln 3x)\frac{x^5}{5} - \int \frac{x^5}{5}\frac{dx}{x} = \frac{x^5}{5}\ln 3x - \frac{1}{5}\int x^4 \, dx =$$

$$= \frac{x^5}{5}\ln 3x - \frac{1}{5}\left(\frac{x^5}{5}\right) + C = \frac{x^5}{5}\left(\ln 3x - \frac{1}{5}\right) + C = \frac{x^5}{5^2}(5\ln 3x - 1) + C.$$

□

Los ejemplos anteriores nos muestran cómo aplicar el método de integración por partes para calcular integrales pertenecientes a importantes familias de integrales y nos indican además cómo seleccionar u, dv.

El tratamiento general de estas familias de integrales se presenta a continuación, donde suponemos que n es un número natural, a, k son constantes arbitrarias & r es un número racional $r \neq -1$.

1.
$$\underbrace{\int x^n e^{ax} \, dx}_{\boxed{\begin{array}{lcl} u = x^n & \& & dv = e^{ax} \, dx; \\ du = nx^{n-1} \, dx & \& & v = \int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a}e^{ax}. \end{array}}} = x^n\left(\frac{1}{a}e^{ax}\right) - \int \frac{1}{a}e^{ax}(nx^{n-1}) \, dx =$$

$$= x^n\left(\frac{e^{ax}}{a}\right) - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax} \, dx.$$

Y se sigue aplicando integración por partes hasta completar n veces, siempre tomando como u al factor polinomial.

2.
$$\underbrace{\int x^n \operatorname{sen} ax \, dx}_{\boxed{\begin{array}{lcl} u = x^n & \& & dv = \operatorname{sen} ax \, dx; \\ du = nx^{n-1} \, dx & \& & v = \int \operatorname{sen} ax \, dx = -\frac{1}{a}\cos ax. \end{array}}} = x^n\left(-\frac{1}{a}\cos ax\right) - \int \left(-\frac{1}{a}\cos ax\right)(nx^{n-1}) \, dx =$$

$$= -x^n\left(\frac{\cos ax}{a}\right) + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax \, dx.$$

Y se sigue aplicando integración por partes hasta completar n veces, siempre tomando como u al factor polinomial.

3.
$$\underbrace{\int x^n \cos ax \, dx}_{\boxed{\begin{array}{lcl} u = x^n & \& & dv = \cos ax \, dx; \\ du = nx^{n-1} \, dx & \& & v = \int \cos ax \, dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen} ax. \end{array}}} = x^n\left(\frac{1}{a}\operatorname{sen} ax\right) - \int \left(\frac{1}{a}\operatorname{sen} ax\right)(nx^{n-1}) \, dx =$$

$$= x^n\left(\frac{\operatorname{sen} ax}{a}\right) - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\operatorname{sen} ax \, dx.$$

Y se sigue aplicando integración por partes hasta completar n veces, siempre tomando como u al factor polinomial.

4.
$$\underbrace{\int x^n(ax+b)^r\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{lcl} u = x^n & \& & \mathrm{d}v = (ax+b)^r\,\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = nx^{n-1}\,\mathrm{d}x & \& & v = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{r+1}}{r+1}. \end{array}}} = x^n\left[\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{r+1}}{r+1}\right] - \int \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{r+1}}{r+1}nx^{n-1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= x^n\frac{(ax+b)^{r+1}}{a(r+1)} - \frac{n}{a(r+1)}\int x^{n-1}(ax+b)^{r+1}\,\mathrm{d}x.$$

Y se sigue aplicando integración por partes hasta completar n veces, siempre tomando como u el factor polinomial.

Observación 1. En las 4 familias tratadas, se aplica n veces el método de integración por partes y siempre seleccionando como u el factor polinomial.

Observación 2. Cualquier integral de la última familia $\int x^n(ax+b)^r\,\mathrm{d}x$ puede ser calculada mediante un cambio de variable:

$$ax+b = y \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{a}(y-b) \quad \& \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\,\mathrm{d}y.$$

Por lo que,

$$\int x^n(ax+b)^r\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{a^n}(y-b)^n y^r\left(\frac{1}{a}\,\mathrm{d}y\right) = \frac{1}{a^{n+1}}\int (y-b)^n y^r\,\mathrm{d}y.$$

Después de desarrollar $(y-b)^n$, se efectúa el producto $(y-b)^n y^r$ para luego obtener una suma de integrales.

5.
$$\underbrace{\int x^r \ln ax\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{lcl} u = \ln ax & \& & \mathrm{d}v = x^r\,\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{ax}(a\,\mathrm{d}x) = \frac{\mathrm{d}x}{x} & \& & v = \frac{x^{r+1}}{r+1}. \end{array}}} = (\ln ax)\frac{x^{r+1}}{r+1} - \int \frac{x^{r+1}}{r+1}\left(\frac{\mathrm{d}x}{x}\right) =$$

$$= \frac{x^{r+1}}{r+1}(\ln ax) - \frac{1}{r+1}\int x^r\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^{r+1}}{r+1}(\ln ax) - \frac{1}{r+1}\left(\frac{x^{r+1}}{r+1}\right) + C =$$

$$= \frac{x^{r+1}}{r+1}(\ln ax) - \frac{x^{r+1}}{(r+1)^2} + C.$$

En este caso, la integral se calcula aplicando integración por partes una sola vez.

Para terminar con las grandes familias de integrales, a continuación trataremos dos tipos de integrales que se calculan aplicando primeramente 2 veces el método de integración por partes y procediendo posteriormente de una manera muy particular.

6.
$$\underbrace{\int e^{ax}\,\mathrm{sen}\,kx\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{lcl} u=e^{ax} & \& & \mathrm{d}v=\mathrm{sen}\,kx\,\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u=ae^{ax}\,\mathrm{d}x & \& & v=-\frac{1}{k}\cos kx. \end{array}}} = e^{ax}\left(-\frac{1}{k}\cos kx\right)-\int\left(-\frac{1}{k}\cos kx\right)ae^{ax}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{e^{ax}}{k}\cos kx+\frac{a}{k}\int e^{ax}\cos kx\,\mathrm{d}x. \tag{2.4}$$

Para evaluar $\int e^{ax}\cos kx\,\mathrm{d}x$, se aplica de nuevo integración por partes manteniendo la selección $u=e^{ax}$.

$$\underbrace{\int e^{ax}\cos kx\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{lcl} u=e^{ax} & \& & \mathrm{d}v=\cos kx\,\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u=ae^{ax}\,\mathrm{d}x & \& & v=\frac{1}{k}\,\mathrm{sen}\,kx. \end{array}}} = e^{ax}\left(\frac{1}{k}\,\mathrm{sen}\,kx\right)-\int\frac{1}{k}(\mathrm{sen}\,kx)ae^{ax}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{e^{ax}}{k}\,\mathrm{sen}\,kx-\frac{a}{k}\int e^{ax}\,\mathrm{sen}\,kx\,\mathrm{d}x.$$

Utilizamos esta igualdad en (2.4) y obtenemos

$$\begin{aligned}\int e^{ax}\,\mathrm{sen}\,kx\,\mathrm{d}x &= -\frac{e^{ax}}{k}\cos kx+\frac{a}{k}\int e^{ax}\cos kx\,\mathrm{d}x = \\ &= -\frac{e^{ax}}{k}\cos kx+\frac{a}{k}\left[\frac{e^{ax}}{k}\,\mathrm{sen}\,kx-\frac{a}{k}\int e^{ax}\,\mathrm{sen}\,kx\,\mathrm{d}x\right] = \\ &= -\frac{e^{ax}}{k}\cos kx+\frac{ae^{ax}}{k^2}\,\mathrm{sen}\,kx-\frac{a^2}{k^2}\int e^{ax}\,\mathrm{sen}\,kx\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Esta es una ecuación en que la incógnita es $I=\int e^{ax}\,\mathrm{sen}\,kx\,\mathrm{d}x$.

Resolvemos la ecuación

$$\begin{aligned} I &= -\frac{e^{ax}}{k}\cos kx+\frac{ae^{ax}}{k^2}\,\mathrm{sen}\,kx-\frac{a^2}{k^2}I \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; I+\frac{a^2}{k^2}I &= \frac{ae^{ax}}{k^2}\,\mathrm{sen}\,kx-\frac{e^{ax}}{k}\cos kx \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; \left(1+\frac{a^2}{k^2}\right)I &= \frac{ae^{ax}}{k^2}\,\mathrm{sen}\,kx-\frac{ke^{ax}}{k^2}\cos kx \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; \left(\frac{k^2+a^2}{k^2}\right)I &= \frac{e^{ax}}{k^2}[a\,\mathrm{sen}\,kx-k\cos kx] \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; I &= \left(\frac{k^2}{k^2+a^2}\right)\frac{e^{ax}}{k^2}(a\,\mathrm{sen}\,kx-k\cos kx) \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; I &= \frac{e^{ax}}{k^2+a^2}(a\,\mathrm{sen}\,kx-k\cos kx).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int e^{ax}\,\mathrm{sen}\,kx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{k^2+a^2}(a\,\mathrm{sen}\,kx-k\cos kx)+C.$$

7.

$$\underbrace{\int e^{ax}\cos kx\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{lcl} u = e^{ax} & \& & \mathrm{d}v = \cos kx\,\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = ae^{ax}\,\mathrm{d}x & \& & v = \dfrac{1}{k}\operatorname{sen} kx. \end{array}}} = e^{ax}\left(\frac{1}{k}\operatorname{sen} kx\right) - \int \frac{1}{k}(\operatorname{sen} kx)ae^{ax}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{e^{ax}}{k}\operatorname{sen} kx - \frac{a}{k}\int e^{ax}\operatorname{sen} kx\,\mathrm{d}x.$$

Para evaluar $\int e^{ax}\operatorname{sen} kx\,\mathrm{d}x$, se aplica de nuevo integración por partes con la selección $u = e^{ax}$.

$$u = e^{ax} \quad \& \quad \mathrm{d}v = \operatorname{sen} kx\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = ae^{ax}\,\mathrm{d}x \quad \& \quad v = -\frac{1}{k}\cos kx.$$

Entonces,

$$\int e^{ax}\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{k}\operatorname{sen} kx - \frac{a}{k}\left[-\frac{e^{ax}}{k}\cos kx - \int -\frac{1}{k}(\cos kx)ae^{ax}\,\mathrm{d}x\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^{ax}\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{k}\operatorname{sen} kx + \frac{ae^{ax}}{k^2}\cos kx - \frac{a^2}{k^2}\int e^{ax}\cos kx\,\mathrm{d}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right)\int e^{ax}\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{ke^{ax}}{k^2}\operatorname{sen} kx + \frac{ae^{ax}}{k^2}\cos kx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{k^2 + a^2}{k^2}\right)\int e^{ax}\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{k^2}(k\operatorname{sen} kx + a\cos kx) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^{ax}\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{k^2 + a^2}(k\operatorname{sen} kx + a\cos kx) + C.$$

Comentarios adicionales.

- En las integrales de los tipos (1.), (2.), (3.), (4.), suponiendo que $n \geqslant 2$, las igualdades obtenidas pueden tomarse como fórmulas de recurrencia y ser aplicadas n veces para obtener la integral resuelta.
- Existen integrales que no pertenecen a ninguna de estas familias; sin embargo mediante la aplicación de un cambio de variable, obtenemos una de ellas.
- Existen integrales que, sin pertenecer a estas familias, se calculan mediante integración por partes y con procedimientos similares a los utilizados.

Ejemplo 2.3.11 *Calcular la integral* $\int \sec^3\theta\,\mathrm{d}\theta$.

▼ Primero consideramos que $\sec^3\theta = \sec\theta\cdot\sec^2\theta$ y luego aplicamos integración por partes seleccionando

$$u = \sec\theta \quad \& \quad dv = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

A saber

$$\int \sec^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \int \sec\theta\cdot\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \underbrace{uv - \int v\,\mathrm{d}u}_{\boxed{\begin{array}{lcl} u = \sec\theta & \& & \mathrm{d}v = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta; \\ \mathrm{d}u = \sec\theta\cdot\tan\theta\,\mathrm{d}\theta & \& & v = \tan\theta. \end{array}}} =$$

$$= \sec\theta\cdot\tan\theta - \int \tan\theta\cdot\sec\theta\cdot\tan\theta\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= \sec\theta\cdot\tan\theta - \int \tan^2\theta\cdot\sec\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

Ahora aplicamos la identidad $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$.

$$\int \sec^3\theta \,\mathrm{d}\theta = \sec\theta \cdot \tan\theta - \int (\sec^2\theta - 1)\sec\theta \,\mathrm{d}\theta = \sec\theta\cdot\tan\theta - \int(\sec^3\theta - \sec\theta)\,\mathrm{d}\theta \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int \sec^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \sec\theta\cdot\tan\theta - \int\sec^3\theta\,\mathrm{d}\theta + \int\sec\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

Por último, despejamos la integral $\int \sec^3\theta\,\mathrm{d}\theta$:

$$\int \sec^3\theta\,\mathrm{d}\theta + \int\sec^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \sec\theta\cdot\tan\theta + \int\sec\theta\,\mathrm{d}\theta \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\int\sec^3\theta = \sec\theta\cdot\tan\theta + \ln(\sec\theta + \tan\theta) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int\sec^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}[\sec\theta\cdot\tan\theta + \ln(\sec\theta+\tan\theta)] + C.$$

□

Ejemplo 2.3.12 *Calcular la integral* $\int e^{\sqrt[3]{t}}\,\mathrm{d}t$.

▼ Primero aplicamos un cambio de variable; si $\sqrt[3]{t} = x$, entonces $t = x^3$ & $\mathrm{d}t = 3x^2\,\mathrm{d}x$. Luego,

$$\int e^{\sqrt[3]{t}}\,\mathrm{d}t = \int e^x 3x^2\,\mathrm{d}x = 3\int x^2e^x\,\mathrm{d}x.$$

Aplicamos dos veces integración por partes, o bien aplicamos dos veces la fórmula de recurrencia obtenida en 1. (pág. 7) para $a = 1$. Primero con $n = 2$,

$$\int x^2e^x\,\mathrm{d}x = x^2\left(\frac{e^x}{1}\right) - \frac{2}{1}\int x^{2-1}e^x\,\mathrm{d}x = x^2e^x - 2\int xe^x\,\mathrm{d}x.$$

Luego con $n = 1$,

$$\int x^2e^x\,\mathrm{d}x = x^2e^x - 2\left[x^1e^x - \int x^{1-1}e^x\,\mathrm{d}x\right] = x^2e^x - 2\left[xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x\right] = x^2e^x - 2(xe^x - e^x) =$$
$$= (x^2 - 2x + 2)\,e^x.$$

Finalmente, rescatando el cambio de variable,

$$\int e^{\sqrt[3]{t}}\,\mathrm{d}t = 3\int x^2e^x\,\mathrm{d}x = 3\,(x^2-2x+2)\,e^x + C = 3\left[\left(\sqrt[3]{t}\right)^2 - 2\left(\sqrt[3]{t}\right) + 2\right]e^{\sqrt[3]{t}} + C =$$
$$= 3\left[\sqrt[3]{t^2} - 2\sqrt[3]{t} + 2\right]e^{\sqrt[3]{t}} + C.$$

□

Ejemplo 2.3.13 *Calcular la integral* $\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$.

▼ Primero aplicamos un cambio de variable: si $\ln x = y$, entonces $x = e^y$ & $\mathrm{d}x = e^y\,\mathrm{d}y$. Así,

$$\int\cos(\ln x)\,\mathrm{d}x = \int\cos(y)\cdot e^y\,\mathrm{d}y = \int e^y\cos y\,\mathrm{d}y.$$

Ahora aplicamos la fórmula obtenida en 7. (pág. 10) para $a = 1$ & $k = 1$.

$$\int e^y\cos y\,\mathrm{d}y = \frac{e^y}{1^2+1^2}(1\,\mathrm{sen}\,y + 1\cos y) + C = \frac{e^y}{2}(\mathrm{sen}\,y + \cos y) + C.$$

Por lo tanto,

$$\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x = \int e^y \cos y\,\mathrm{d}y = \frac{e^y}{2}(\operatorname{sen} y + \cos y) + C = \frac{1}{2}e^{\ln x}[\operatorname{sen}(\ln x) + \cos(\ln x)] + C =$$
$$= \frac{1}{2}x[\operatorname{sen}(\ln x) + \cos(\ln x)] + C = \frac{x}{2}[\operatorname{sen}(\ln x) + \cos(\ln x)] + C.$$

□

Ejemplo 2.3.14 *Calcular la integral* $\int x^4(x-2)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x$.

▼ Aplicamos repetidamente la formula obtenida en 4. (pág. 8). Obtenemos:

$$\int x^4(x-2)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^4(x-2)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} - \frac{4}{\frac{1}{3}+1}\int x^3(x-2)^{\frac{1}{3}+1}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{3x^4(x-2)^{\frac{4}{3}}}{4} - 3\int x^3(x-2)^{\frac{4}{3}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{3}{4}x^4(x-2)^{\frac{4}{3}} - 3\left[\frac{x^3(x-2)^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} - \frac{3}{\frac{4}{3}+1}\int x^2(x-2)^{\frac{4}{3}+1}\,\mathrm{d}x\right] =$$
$$= \frac{3}{4}x^4(x-2)^{\frac{4}{3}} - \frac{3x^3(x-2)^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + \frac{9}{\frac{7}{3}}\left[\frac{x^2(x-2)^{\frac{7}{3}+1}}{\frac{7}{3}+1} - \frac{2}{\frac{7}{3}+1}\int x(x-2)^{\frac{7}{3}+1}\,\mathrm{d}x\right] =$$
$$= \frac{3}{4}x^4(x-2)^{\frac{4}{3}} - \frac{9}{7}x^3(x-2)^{\frac{7}{3}} + \frac{27}{7}\left[\frac{x^2(x-2)^{\frac{10}{3}}}{\frac{10}{3}} - \frac{2}{\frac{10}{3}}\int x(x-2)^{\frac{10}{3}}\,\mathrm{d}x\right] =$$
$$= \frac{3}{4}x^4(x-2)^{\frac{4}{3}} - \frac{9}{7}x^3(x-2)^{\frac{7}{3}} + \frac{81}{70}x^2(x-2)^{\frac{10}{3}} - \frac{162}{70}\left[\frac{x(x-2)^{\frac{10}{3}+1}}{\frac{10}{3}+1} - \frac{1}{\frac{10}{3}+1}\int (x-2)^{\frac{10}{3}+1}\,\mathrm{d}x\right] =$$
$$= \frac{3}{4}x^4(x-2)^{\frac{4}{3}} - \frac{9}{7}x^3(x-2)^{\frac{7}{3}} + \frac{81}{70}x^2(x-2)^{\frac{10}{3}} - \frac{162}{70}\cdot\frac{x(x-2)^{\frac{13}{3}}}{\frac{13}{3}} + \frac{162}{70}\cdot\frac{3}{13}\int (x-2)^{\frac{13}{3}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{3}{4}x^4(x-2)^{\frac{4}{3}} - \frac{9}{7}x^3(x-2)^{\frac{7}{3}} + \frac{81}{70}x^2(x-2)^{\frac{10}{3}} - \frac{486}{910}x(x-2)^{\frac{13}{3}} + \frac{486}{910}\cdot\frac{(x-2)^{\frac{16}{3}}}{\frac{16}{3}} + C =$$
$$= \frac{3}{4}x^4(x-2)^{\frac{4}{3}} - \frac{9}{7}x^3(x-2)^{\frac{7}{3}} + \frac{81}{70}x^2(x-2)^{\frac{10}{3}} - \frac{243}{455}x(x-2)^{\frac{13}{3}} + \frac{729}{7\,280}(x-2)^{\frac{16}{3}} + C.$$

□

Como se mencionó en páginas anteriores, otra manera de calcular esta integral es aplicando un cambio de variable. A saber:

$$x - 2 = y \;\Rightarrow\; x = y + 2 \quad \& \quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}y.$$

Luego,

$$\int x^4(x-2)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \int (y+2)^4 y^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}y = \int \left(y^4 + 8y^3 + 24y^2 + 32y + 16\right) y^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}y =$$
$$= \int \left(y^{\frac{13}{3}} + 8y^{\frac{10}{3}} + 24y^{\frac{7}{3}} + 32y^{\frac{4}{3}} + 16y^{\frac{1}{3}}\right)\mathrm{d}y =$$
$$= \frac{3}{16}y^{\frac{16}{3}} + 8\left(\frac{3}{13}\right)y^{\frac{13}{3}} + 24\left(\frac{3}{10}\right)y^{\frac{10}{3}} + 32\left(\frac{3}{7}\right)y^{\frac{7}{3}} + 16\left(\frac{3}{4}\right)y^{\frac{4}{3}} + C =$$
$$= \frac{3}{16}(x-2)^{\frac{16}{3}} + \frac{24}{13}(x-2)^{\frac{13}{3}} + \frac{36}{5}(x-2)^{\frac{10}{3}} + \frac{96}{7}(x-2)^{\frac{7}{3}} + 12(x-2)^{\frac{4}{3}} + C =$$

$$= 3(x-2)^{\frac{4}{3}}\left[\frac{1}{16}(x-2)^4 + \frac{8}{13}(x-2)^3 + \frac{12}{5}(x-2)^2 + \frac{32}{7}(x-2) + 4\right] + C.$$

Cerramos esta sección con algunos ejemplos de aplicación de la integración por partes para integrales definidas. En este caso se deben evaluar los productos intermedios de la integración en los extremos del intervalo como sigue:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.5}$$

Ejemplo 2.3.15 *Evaluar la integral* $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x$.

▼ Para poder aplicar integración por partes expresamos el numerador x^3 del integrando como el producto $x^3 = \dfrac{x^2}{2}\cdot 2x$. Usamos:

$$\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{2x}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \dfrac{x^2}{2} & \& \quad \mathrm{d}v = \dfrac{2x}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = x\,\mathrm{d}x & \& \quad v = \displaystyle\int \frac{2x}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \frac{-1}{2(1+x^2)^2}. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x &= \frac{x^2}{4}\frac{-1}{(1+x^2)^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{-x\,\mathrm{d}x}{2(1+x^2)^2} = \\
&= \frac{1^2}{4}\left(\frac{-1}{2^2}\right) + \frac{0^2}{4}\left(\frac{1}{1^2}\right) + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} \overset{(*)}{=} \\
&= \frac{-1}{16} + \left(\frac{1}{4}\right)\frac{-1}{(1+x^2)}\Big|_0^1 = \frac{-1}{16} + \frac{1}{4}\left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{1+0^2}\right) = \\
&= \frac{-1}{16} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

En las dos últimas integraciones marcadas con $(*)$ hemos usado:

$$z = 1 + x^2 \Rightarrow \mathrm{d}z = 2x\,\mathrm{d}x;$$

$$\int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} = \int \frac{\mathrm{d}z}{z^n} = \int z^{-n}\,\mathrm{d}z = \frac{z^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{-1}{(n-1)(1+x^2)^{n-1}},$$

donde $n = 3$; $n = 2$, respectivamente.

□

Ejemplo 2.3.16 *Evaluar la integral* $\displaystyle\int_3^8 x^2\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$.

▼ Podemos aplicar la fórmula 4. (pág. 8) con $r = \dfrac{1}{2}$ & $n = 2$ para obtener:

$$\int_3^8 x^2\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_3^8 - \frac{2}{\frac{3}{2}}\int_3^8 x(x+1)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{3}\left[64(9)^{\frac{3}{2}} - 9(4)^{\frac{3}{2}}\right] - \frac{4}{3}\left[\frac{x(x+1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\Bigg|_3^8 - \frac{1}{\frac{5}{2}}\int_3^8 (x+1)^{\frac{5}{2}}\,dx\right] =$$

$$= \frac{2}{3}[64(27) - 9(8)] - \frac{8}{15}\left[8(9)^{\frac{5}{2}} - 3(4)^{\frac{5}{2}} - \frac{(x+1)^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}\Bigg|_3^8\right] =$$

$$= 1\,104 - \frac{8}{15}\left[8(243) - 3(32) - \frac{2}{7}\left(9^{\frac{7}{2}} - 4^{\frac{7}{2}}\right)\right] =$$

$$= 1\,104 - \frac{8}{15}\left(\frac{8\,818}{7}\right) = 1\,104 - \frac{70\,544}{105} = \frac{45\,376}{105}.$$

□

Ejercicios 2.3.1 *Integración por partes.* *Soluciones en la página 16*
Calcular las siguientes integrales indefinidas y derivando verificar cada resultado.

1. $\int x \operatorname{sen} x \,dx.$
2. $\int x \cos x \,dx.$
3. $\int x e^{-x} \,dx.$
4. $\int x \ln x \,dx.$
5. $\int x(x+1)^{99} \,dx.$
6. $\int 4x^2 \cos 2x \,dx.$
7. $\int 9x^2 e^{3x} \,dx.$
8. $\int 4x^2 \operatorname{sen} 2x \,dx.$
9. $\int 8x^2 \sqrt{2x+1} \,dx.$
10. $\int x^3 \ln x^2 \,dx.$
11. $\int \theta \sec^2 \theta \,d\theta.$
12. $\int y 2^{-y} \,dy.$
13. $\int 5y^2 3^{2y} \,dy.$
14. $\int \frac{3u-2}{\sqrt{5-4u}} \,du.$
15. $\int \frac{u\,du}{\sqrt{u^2-1}} \,dx.$
16. $\int \frac{u^3\,du}{\sqrt{u^2-1}}.$
17. $\int x^2 e^{-x} \,dx.$
18. $\int x e^{-x^2} \,dx.$
19. $\int x^3 e^{-x^2} \,dx.$
20. $\int e^{-2x} \cos 3x \,dx.$
21. $\int e^{3x} \operatorname{sen} 2x \,dx.$
22. $\int \operatorname{sen}(\ln x) \,dx.$
23. $\int \sec^5 x \,dx.$
24. $\int (\ln t^2 + 1) \,dt.$
25. $\int \ln(t^2 + 1) \,dt.$
26. $\int (\ln^2 t + 1) \,dt.$
27. $\int \operatorname{arcsen} x \,dx.$
28. $\int \arccos 2x \,dx.$
29. $\int \arctan 2x \,dx.$
30. $\int \operatorname{arccot} x \,dx.$

Aplicando las fórmulas recursivas, calcular las integrales que siguen:

Observación. En el siguiente bloque de ejercicios, del 31. al 54., haremos uso de las siguientes fórmulas (de recurrencia), que anteriormente hemos obtenido.

Con a, b, k constantes, n natural & r racional ($r \neq -1$):

a. $\int x^n e^{ax}\,dx = x^n\left(\frac{e^{ax}}{a}\right) - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx.$

b. $\int x^n \operatorname{sen} ax\,dx = -x^n\left(\frac{\cos ax}{a}\right) + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\,dx.$

c. $\displaystyle\int x^n \cos ax\,\mathrm{d}x = x^n\left(\frac{\operatorname{sen} ax}{a}\right) - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\operatorname{sen} ax\,\mathrm{d}x.$

d. $\displaystyle\int x^n (ax+b)^r\,\mathrm{d}x = x^n\frac{(ax+b)^r}{a(r+1)} - \frac{n}{a(r+1)}\int x^{n-1}(ax+b)^{r+1}\,\mathrm{d}x.$

e. $\displaystyle\int x^r \ln ax\,\mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1}(\ln ax) - \frac{x^{r+1}}{(r+1)^2} + C.$

f. $\displaystyle\int e^{ax}\operatorname{sen} kx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+k^2}(a\operatorname{sen} k - k\cos kx) + C.$

g. $\displaystyle\int e^{ax}\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+k^2}(k\operatorname{sen} k + a\cos kx) + C.$

31. $\displaystyle\int x^3 e^{2x}\,\mathrm{d}x.$

32. $\displaystyle\int x^4 e^{-x}\,\mathrm{d}x.$

33. $\displaystyle\int x^5 e^{x}\,\mathrm{d}x.$

34. $\displaystyle\int x^3 \cos 2x\,\mathrm{d}x.$

35. $\displaystyle\int x^4 \operatorname{sen} 3x\,\mathrm{d}x.$

36. $\displaystyle\int x^5 \cos x\,\mathrm{d}x.$

37. $\displaystyle\int x^3 (3x+2)^5\,\mathrm{d}x.$

38. $\displaystyle\int x^4 \sqrt{2x-3}\,\mathrm{d}x.$

39. $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x.$

40. $\displaystyle\int e^{2x}\cos 3x\,\mathrm{d}x.$

41. $\displaystyle\int e^{-x}\operatorname{sen} 2x\,\mathrm{d}x.$

42. $\displaystyle\int e^{-\frac{x}{2}}\cos 4x\,\mathrm{d}x.$

43. $\displaystyle\int x^5 \ln 3x\,\mathrm{d}x.$

44. $\displaystyle\int x^{-4} \ln x^3\,\mathrm{d}x.$

45. $\displaystyle\int \sqrt{x^5}\ln 3x^2\,\mathrm{d}x.$

46. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 e^{2x}\,\mathrm{d}x.$

47. $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{-x}\,\mathrm{d}x.$

48. $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{x}\,\mathrm{d}x.$

49. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\,\mathrm{d}x.$

50. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^3 \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x.$

51. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^4 \cos x\,\mathrm{d}x.$

52. $\displaystyle\int_0^1 x^3 (2x-1)^5\,\mathrm{d}x.$

53. $\displaystyle\int_2^5 x^4 \sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x.$

54. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x^3}{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x.$

Ejercicios 2.3.1 *Integración por partes.* *Preguntas, página 14*

1. $-x\cos x + \operatorname{sen} x + C.$
2. $x \operatorname{sen} x + \cos x + C.$
3. $-(x+1)e^{-x} + C.$
4. $\dfrac{x^2}{2}\left(\ln x - \dfrac{1}{2}\right) + C.$
5. $\dfrac{1}{100}(x+1)^{100}\left(x - \dfrac{x+1}{101}\right) + C.$
6. $\left(2x^2 - 1\right)\operatorname{sen} 2x + 2x\cos 2x + C.$
7. $\left(3x^2 - 2x + \dfrac{2}{3}\right)e^{3x} + C.$
8. $-2x^2\cos 2x + 2x\operatorname{sen} 2x + \cos 2x + C.$
9. $\dfrac{8}{3}x^2(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{16}{15}x(2x+1)^{\frac{5}{2}} + \dfrac{16}{105}(2x+1)^{\frac{7}{2}} + C.$
10. $\dfrac{x^4}{4}\left(\ln x - \dfrac{1}{4}\right) + C.$
11. $\theta \cdot \tan\theta - \ln|\sec\theta| + C.$
12. $-\dfrac{2^{-y}}{\ln 2}\left(y + \dfrac{1}{\ln 2}\right) + C.$
13. $\dfrac{5}{\ln 9}y^2\, 3^{2y} - \dfrac{10}{(\ln 9)^2}y\, 3^{2y} + \dfrac{10}{(\ln 9)^3}\, 3^{2y} + C.$
14. $-\dfrac{1}{2}(2-3u)(5-4u)^{\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{4}(5-4u)^{\frac{3}{2}} + C.$
15. $\sqrt{u^2-1} + C.$
16. $u^2\sqrt{u^2-1} - \dfrac{2}{3}\sqrt{\left(u^2-1\right)^3} + C.$
17. $-e^{-x}\left(x^2 + 2x + 2\right) + C.$
18. $-\dfrac{1}{2}e^{-x^2} + C.$
19. $-\dfrac{1}{2}\left(x^2+1\right)e^{-x^2} + C.$
20. $\dfrac{1}{13}e^{-2x}(3\operatorname{sen} 3x - 2\cos 3x) + C.$
21. $\dfrac{1}{13}e^{3x}(3\operatorname{sen} 2x - 2\cos 2x) + C.$
22. $\dfrac{x}{2}\left[\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)\right) + C.$
23. $\dfrac{1}{4}\sec^3 x\ \tan x + \dfrac{3}{8}\left[\sec x\ \tan x + \ln(\sec x + \tan x)\right] + C.$
24. $t\left(\ln t^2 - 1\right) + C.$
25. $t\ln\left(t^2+1\right) - 2t + 2\arctan t + C.$
26. $t\left(\ln^2 t - \ln t^2 + 3\right) + C.$
27. $x\operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C.$
28. $x\arccos 2x - \dfrac{1}{2}\sqrt{\arccos 2x} + C.$
29. $x\arctan 2x - \dfrac{1}{4}\ln\left(1+4x^2\right) + C.$

30. $x \operatorname{arccot} x + \ln\sqrt{1+x^2} + C.$

Aplicando las fórmulas recursivas calcular las siguientes integrales.

31. $\dfrac{e^{2x}}{8}\left(4x^3 - 6x^2 + 6x - 3\right) + C.$
32. $-e^{-x}\left(x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24x + 24\right) + C.$
33. $e^x\left(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120\right) + C.$
34. $\dfrac{x}{4}\left(2x^2 - 3\right)\operatorname{sen} 2x + \dfrac{3}{8}\left(2x^2 - 1\right)\cos 2x + C.$
35. $\dfrac{1}{81}\left(-27x^4 + 36x^2 - 8\right)\cos 3x + \dfrac{4x}{27}\left(3x^2 - 8\right)\operatorname{sen} 3x + C.$
36. $x\left(x^4 - 20x^2 + 120\right)\operatorname{sen} x + 5\left(x^4 - 12x^2 + 24\right)\cos x + C.$
37. $\dfrac{x^3}{8}(3x+2)^6 - \dfrac{x^2}{126}(3x+2)^7 + \dfrac{x}{1\,512}(3x+2)^8 - \dfrac{1}{40\,824}(3x+2)^9 + C.$
38. $\dfrac{x^4}{3}(2x-3)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{4x^3}{15}(2x-3)^{\frac{5}{2}} + \dfrac{4x^2}{35}(2x-3)^{\frac{7}{2}} - \dfrac{8x}{315}(2x-3)^{\frac{9}{2}} + \dfrac{8}{3\,465}(2x-3)^{\frac{11}{2}} + C.$
39. $\dfrac{2}{11}(x+1)^{\frac{11}{2}} - \dfrac{10}{9}(x+1)^{\frac{9}{2}} + \dfrac{20}{7}(x+1)^{\frac{7}{2}} - 4(x+1)^{\frac{5}{2}} + \dfrac{10}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + C.$
40. $\dfrac{e^{2x}}{13}(3\operatorname{sen} 3x + 2\cos 3x) + C.$
41. $-\dfrac{e^{-x}}{5}(\operatorname{sen} 2x + 2\cos 2x) + C.$
42. $\dfrac{2}{65}e^{-\frac{x}{2}}(8\operatorname{sen} 4x - \cos 4x) + C.$
43. $\dfrac{x^6}{6}\left(\ln 3x - \dfrac{1}{6}\right) + C.$
44. $-x^{-3}\left(\ln x + \dfrac{1}{3}\right) + C.$
45. $\dfrac{2}{49}x^{\frac{7}{2}}\left(7\ln 3x^2 - 4\right) + C.$
46. $\dfrac{1}{8}(e-2).$
47. $\dfrac{6e-16}{e}.$
48. $6 - 2e.$
49. $\dfrac{1}{4}(\pi^2 - 8).$
50. $0.22036.$
51. $0.04712.$
52. $\dfrac{17}{252}.$
53. $1\,098.385\,.$
54. $\dfrac{836}{35}.$