CAPÍTULO

1

La integral

1.9 Teorema Fundamental del Cálculo II

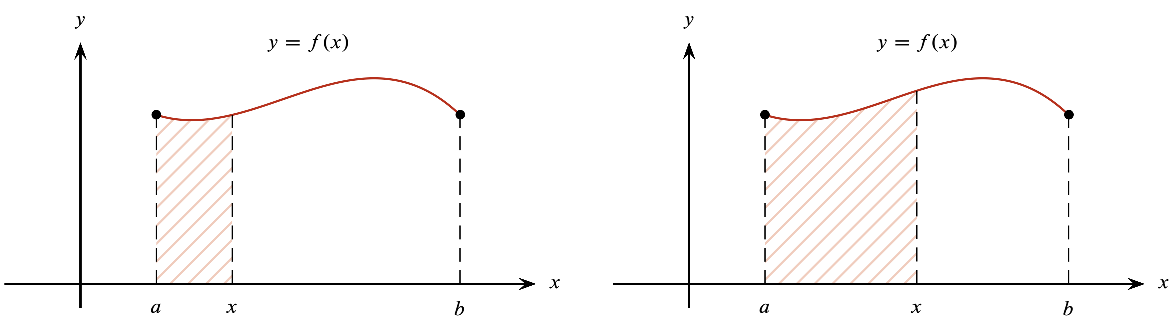
En esta sección presentamos la segunda parte del teorema Fundamental del Cálculo (TFC II), que complementa la sección 1.7 y termina de describir la estrecha relación que hay entre la derivada y la integral.

1.9.1 Funciones definidas mediante integrales

Consideremos una función continua $f(x) \geq 0$ en un intervalo $[a, b]$, y para cualquier $x \in [a, b]$ definamos una nueva función $\phi(x)$ mediante

$$\phi(x) = \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Las siguientes figuras representan dos valores de la función $\phi(x)$ (las áreas de la regiones marcadas) para dos valores distintos de la variable x:



Observe que en el integrando usamos la variable muda t de integración, para que no se confunda con la variable x en el extremo superior de integración.

Esta función $\phi(x)$ representa el área bajo la curva $f(x)$ desde a hasta el punto x. Se puede ver claramente que:

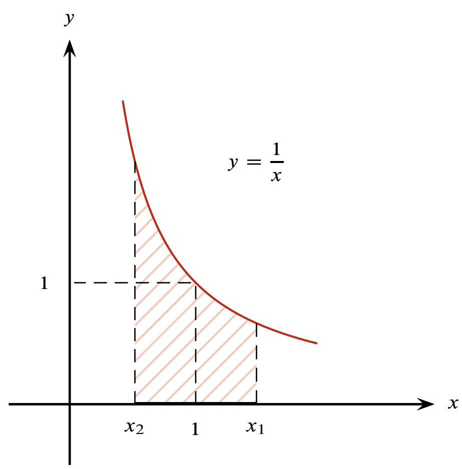
1. canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017

1. $\phi(a) = \int_a^a f(t)\ \mathrm{d}t = 0.$
2. $\phi(b) = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ es el área de la región R, comprendida desde a hasta b.

Se deduce que en todo el intervalo $[a, b]$ esta función $\phi(x)$ es creciente y, como $f(x)$ es continua, es de esperarse que $\phi(x)$ también lo sea, pues un pequeño cambio en la variable x producirá un cambio también pequeño en el área debajo de $y = f(x)$.

Ejemplo 1.9.1 *La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es continua para $x > 0$; utilizando $a = 1$, obtenemos:*

$$\phi(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$



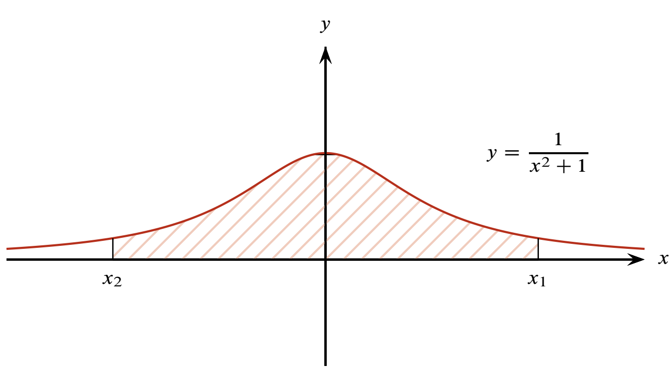
▼ Observe que:

1. Para valores de $x > 1$, como x_1 en la figura, $\phi(x) > 0$.
2. Para valores de x entre 0 y 1, como x_2, $\phi(x) < 0$, por el sentido de la integración.
3. Hay un caso particular $\phi(1) = 0$.
4. ϕ es una función creciente de x.

□

Ejemplo 1.9.2 *La función $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ está definida y es continua para todo $x \epsilon \mathbb{R}$. Tomando $a = 0$, podemos definir*

$$\phi(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}.$$



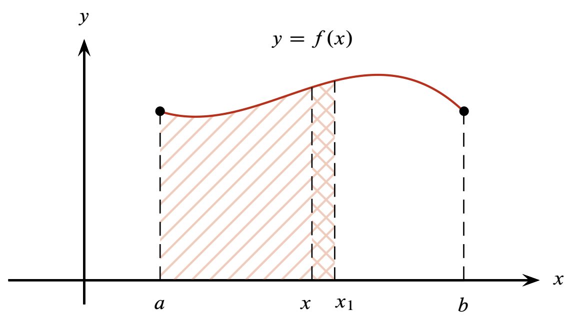
▼ Observe que:

1. Para $x > 0$, como x_1 de la figura, $\phi(x) > 0$.
2. Para $x < 0$, como x_2, $\phi(x) < 0$.
3. Se cumple $\phi(0) = 0$.
4. La función ϕ es creciente.

□

Por el momento nos interesa estudiar cómo es la razón de cambio, es decir, la derivada de la función

$$\phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$



Para esto consideramos x, x_1 arbitrarios en el intervalo $[a, b]$ con $x < x_1$.
La diferencia entre $\phi(x)$ y $\phi(x_1)$ es, de acuerdo con lo que hemos visto antes:

$$\int_x^{x_1} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^{x_1} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^{x} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Por el teorema del Valor Medio para integrales, para algún ξ entre x & x_1:

$$\phi(x_1) - \phi(x) = \int_x^{x_1} f(t)\ \mathrm{d}t = f(\xi)(x_1 - x).$$

Si suponemos $x_1 = x + h$, donde h es la diferencia entre x & x_1, entonces la anterior igualdad se puede escribir como

$$\phi(x+h) - \phi(x) = \int_x^{x+h} f(t)\ \mathrm{d}t = f(\xi)(x+h-x) = f(\xi)h,$$

de donde:

$$\frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} = f(\xi). \tag{1.1}$$

En (1.1) ξ es algún número entre x & $x + h$. Si la función f es continua en x, entonces $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$, así como $\lim\limits_{h\to 0} f(\xi) = f(x)$, ya que $\xi \to x$, cuando $h \to 0$. Por lo tanto:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi) = f(x). \tag{1.2}$$

Recordando la definición de derivada, la igualdad anterior queda:

$$\phi'(x) = f(x). \tag{1.3}$$

El resultado obtenido en (1.3) se puede enunciar como sigue:

- Teorema Fundamental del Cálculo, segunda parte (TFC II)

  Si definimos la función $\phi(x)$ mediante

$$\phi(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t,$$

entonces, en los puntos x donde f es continua, $\phi(x)$ es diferenciable y

$$\phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t = f(x).$$

Ejemplo 1.9.3 *Sea la función $f(x) = x^k$, para $k = 1, 2, 3 \ldots$; calcular la derivada de $\phi(x) = \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$.*

▼ En este caso podemos calcular la integral, usando (**??**) de la página **??** y la notación (**??**) de la página **??**:

$$\phi(x) = \int_0^x t^k\ \mathrm{d}t = \left.\frac{t^{k+1}}{k+1}\right|_0^x = \frac{x^{k+1}}{k+1},$$

se ve entonces que

$$\phi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x t^k\ \mathrm{d}t = x^k = f(x) \qquad \boxed{\text{Usando el TFC II directamente;}}$$

$$\phi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^{k+1}}{k+1}\right) = \frac{(k+1)x^k}{k+1} = x^k = f(x) \qquad \boxed{\text{Derivando la integral conocida.}}$$

□

Ejemplo 1.9.4 *Calcular la derivada de la función*

$$\phi(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t, \text{ para } x > 0.$$

▼ Aplicando el TFC II:

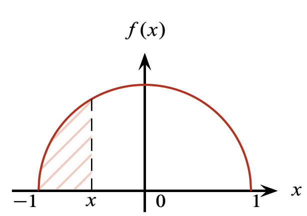
$$\phi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^x \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x},$$

para todo $x > 0$, pues el integrando es una función continua en $(0, \infty)$.

□

Ejemplo 1.9.5 *Calcular la derivada de $\phi(x) = \int_{-1}^x \sqrt{1-t^2}\ \mathrm{d}t$.*

▼ La gráfica de la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ es la parte de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ que se encuentra por encima del eje x para $-1 \le x \le 1$.



Entonces la función definida como
$$\phi(x) = \int_{-1}^{x} \sqrt{1-t^2}\ \mathrm{d}t$$
describe (para $-1 \leq x \leq 1$) el área bajo la circunferencia y sobre el eje x desde -1 hasta x. La razón de cambio de dicha área con respecto a x está dada entonces por la derivada
$$\phi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{-1}^{x} \sqrt{1-t^2}\ \mathrm{d}t = \sqrt{1-x^2}.$$

□

Una manera de parafrasear el TFC II para $f(x) \geq 0$ es la siguiente: la razón de cambio del área bajo la gráfica de una función f sobre el eje x desde un punto a hasta un punto x_0 es, precisamente, el valor de la función en x_0, a condición de que f sea continua en dicho punto.

- Cuando una función se define mediante una integral con la variable en el extremo inferior, se puede recurrir a la convención del signo de la integral cuando se desea calcular su derivada. Si tenemos definida
$$\psi(x) = \int_{x}^{b} f(t)\ \mathrm{d}t,$$
entonces:
$$\psi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{x}^{b} f(t)\ \mathrm{d}t\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\int_{b}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{b}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t\right) = -f(x),$$
siempre que exista $\int_{x}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ y siempre que f sea continua en x.

Ejemplo 1.9.6 *Calcule la derivada de la siguiente función:*
$$\phi(x) = \int_{2}^{x} \frac{t^3-2t^2+1}{t^2-1}\ \mathrm{d}t.$$

▼ Aplicando el TFC II se obtiene:
$$\phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_{2}^{x} \frac{t^3-2t^2+1}{t^2-1}\ \mathrm{d}t = \frac{x^3-2x^2+1}{x^2-1};$$
lo anterior se cumple en los puntos x de modo que la integral $\int_{2}^{x}$ esté definida y que $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2+1}{x^2-1}$ sea continua. Un intervalo donde esto es válido es el abierto $(1, \infty)$ (puede ser $x < 2$ por la convención del signo de la integral).

□

- Al combinar el TFC II con la regla de la Cadena, se puede calcular la derivada de funciones del tipo:
$$g(x) = \int_{a}^{\phi(x)} f(t)\ \mathrm{d}t,$$
donde $\phi(x)$ es una función derivable.

El cálculo de $g'(x)$ se logra a partir de la composición de funciones:

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\phi"] \arrow[rr, bend right, "\sigma \circ \phi"'] & y = \phi(x) \arrow[r, "\sigma"] & u = \displaystyle\int_a^y f(t)\, \mathrm{d}t,
\end{tikzcd}
$$

de donde se infiere que

$$g(x) = (\sigma \circ \phi)(x) = \sigma[\phi(x)] = \int_a^{\phi(x)} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Entonces, por la regla de la Cadena:

$$g'(x) = \frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} u = \left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{d}{dy}\int_a^y f(t)\, \mathrm{d}t\right)\left(\frac{d}{dx}\phi(x)\right) =$$
$$= f(y) \cdot \phi'(x) = f[\phi(x)] \cdot \phi'(x).$$

Esto es:

$$\frac{d}{dx}\int_a^{\phi(x)} f(t)\, \mathrm{d}t = f[\phi(x)]) \cdot \phi'(x).$$

Ejemplo 1.9.7 *Calcular la derivada:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^{x^2} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

▼ Usando el resultado anterior:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^{x^2} f(t)\, \mathrm{d}t = f(x^2) \cdot 2x.$$

□

Ejemplo 1.9.8 *Calcular la derivada:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^{x^2} 3t\sqrt{t^4+1}\, \mathrm{d}t.$$

▼

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^{x^2} 3t\sqrt{t^4+1}\, \mathrm{d}t = \left[3(x^2)\sqrt{(x^2)^4+1}\right]\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2\right) = \left[3(x^2)\sqrt{(x^2)^4+1}\right]2x = 6x^3\sqrt{x^8+1}.$$

□

Ejemplo 1.9.9 *Calcular la derivada:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_3^{\sqrt{x}} (2t - t^{\frac{1}{2}})\, \mathrm{d}t.$$

▼

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_3^{\sqrt{x}} (2t - t^{\frac{1}{2}})\, \mathrm{d}t = \left[2\sqrt{x} - (\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}\right]\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x}\right) = \left(2\sqrt{x} - x^{\frac{1}{4}}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{2\sqrt[4]{x}}.$$

□

Ejemplo 1.9.10 *Calcular la derivada:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_2^{\cos x^2} \tan(\sqrt{t}\,)\, \mathrm{d}t.$$

▼

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_2^{\cos x^2} \tan(\sqrt{t}\,)\ \mathrm{d}t = \tan(\sqrt{\cos x^2})\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x^2\right) = \tan(\sqrt{\cos x^2})\cdot(-\operatorname{sen} x^2)\cdot 2x.$$

□

Ejemplo 1.9.11 *Calcular la derivada:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^3}^{5}(4t+2)\ \mathrm{d}t.$$

▼

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^3}^{5}(4t+2)\ \mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{5}^{x^3}(4t+2)\ \mathrm{d}t = -\left[4(x^3)+2\right]\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^3\right) = -(4x^3+2)3x^2 = -12x^5-6x^2.$$

□

- Los resultados anteriores se aplican para derivar una integral cuyos extremos son dos funciones $g(x)$ & $h(x)$ derivables. Considerando un punto fijo a entre $g(x)$ & $h(x)$, así como la propiedad de aditividad respecto del intervalo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{g(x)}^{a} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_{a}^{h(x)} f(t)\ \mathrm{d}t\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{a}^{h(x)} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_{a}^{g(x)} f(t)\ \mathrm{d}t\right] =$$
$$= f[h(x)]h'(x) - f[g(x)]g'(x).$$

Esto es:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\ \mathrm{d}t = f[h(x)]h'(x) - f[g(x)]g'(x).$$

Ejemplo 1.9.12 *Calcular la derivada:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{x^3} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

▼

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{x^3} f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{x^2}^{a} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_{a}^{x^3} f(t)\ \mathrm{d}t\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[-\int_{a}^{x^2} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_{a}^{x^3} f(t)\ \mathrm{d}t\right] =$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a}^{x^3} f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a}^{x^2} f(t)\ \mathrm{d}t = f(x^3)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^3\right) - f(x^2)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2\right) =$$
$$= f(x^3)3x^2 - f(x^2)2x.$$

□

Ejemplo 1.9.13 *Calcular la derivada de la función:*

$$\phi(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^3}\left(\frac{t^2-1}{t+4}\right)\mathrm{d}t.$$

▼

$$\phi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{\sqrt{x}}^{1}\left(\frac{t^2-1}{t+4}\right)\mathrm{d}t + \int_{1}^{x^3}\left(\frac{t^2-1}{t+4}\right)\mathrm{d}t\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{1}^{x^3}\left(\frac{t^2-1}{t+4}\right)\mathrm{d}t - \int_{1}^{\sqrt{x}}\left(\frac{t^2-1}{t+4}\right)\mathrm{d}t\right] =$$
$$= \left[\frac{(x^3)^2-1}{(x^3)+4}\right]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3) - \left[\frac{(\sqrt{x})^2-1}{\sqrt{x}+4}\right]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{x}) = \frac{x^6-1}{x^3+4}\cdot 3x^2 - \frac{x-1}{\sqrt{x}+4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} =$$
$$= \frac{3x^8-3x^2}{x^3+4} - \frac{x-1}{2x+8\sqrt{x}}.$$

□

Ejemplo 1.9.14 *Calcular la derivada de la función:*

$$f(x) = \int_{e^{5x}}^{\ln x^7} \tan(\sqrt{t^2})\, \mathrm{d}t.$$

▼

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tan\left(\sqrt{\ln^2 x^7}\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x^7) - \tan\sqrt{e^{10x}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{5x}) = \\ &= \tan\left(\sqrt{\ln^2 x^7}\right)\left(\frac{1}{x^7}\right) \cdot 7x^6 - \tan\sqrt{e^{10x}} \cdot e^{5x} \cdot 5 = \\ &= 7\tan\left(\sqrt{\ln^2 x^7}\right)\left(\frac{1}{x}\right) - 5\tan\sqrt{e^{10x}} \cdot e^{5x}. \end{aligned}$$

□

Ejercicios 1.9.1 *TFC II.* *Soluciones en la página 9*

1. Calcular las derivadas de las funciones siguientes (especificando para qué valores de x es válida la expresión obtenida):

   a. $\phi(x) = \int_0^x \left[\sqrt{1+\sqrt{t}}\right]^5 \mathrm{d}t.$

   b. $\psi(x) = \int_{-3}^x \sqrt{t^2+4t+2}\, \mathrm{d}t.$

   c. $\rho(x) = \int_x^2 [t^{\frac{5}{2}} - 2t^{\frac{3}{2}} + 1]\, \mathrm{d}t.$

   d. $\phi(x) = \int_1^{x^3} \sqrt{t^2+2}\, \mathrm{d}t.$

   e. $f(x) = \int_1^{\operatorname{sen} x} e^{t^2}\, \mathrm{d}t.$

   f. $g(x) = \int_{\cos x^3}^1 e^{t^2}\, \mathrm{d}t.$

   g. $h(x) = \int_2^{e^{2x}} \operatorname{sen} t^3\, \mathrm{d}t.$

   h. $i(x) = \int_{\cos x^2}^3 \operatorname{sen} t^3\, \mathrm{d}t.$

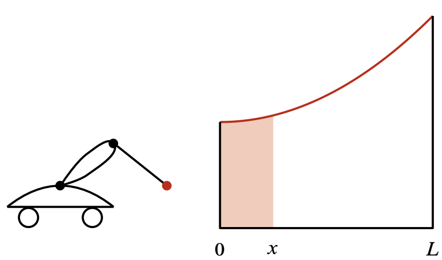
   i. $\psi(x) = \int_x^{x^2+1} \frac{\mathrm{d}t}{t+2}.$

   j. $\rho(x) = \int_{x^3}^{x+5} \frac{t+3}{t-2}\, \mathrm{d}t.$

   k. $j(x) = \int_{\operatorname{sen} x^3}^{\cos x^5} e^{t^2}\, \mathrm{d}t.$

   l. $k(x) = \int_{\ln x^5}^{e^{7x}} \operatorname{sen} t^3\, \mathrm{d}t.$

2. Un brazo robótico está programado para pintar una pieza metálica plana cuya forma es como las regiones cuya área hemos estado considerando, para un intervalo de 0 a L, debajo de una curva $f(x)$ y sobre el eje x.



   El brazo pinta de arriba hacia abajo en franjas muy delgadas (que podríamos pensar infinitamente pequeñas) y se traslada horizontalmente de 0 a L mediante un mecanismo de locomoción. Al llegar al punto x del intervalo $[0, L]$, ¿cómo está cambiando la cantidad de pintura que utiliza el robot?

Ejercicios 1.9.1 *TFC II. Preguntas, página 8*

1. Calcular las derivadas de las funciones siguientes; específicamente para qué valores de x es válida la expresión obtenida.
   a. $\phi'(x) = \left[\sqrt{1+\sqrt{x}}\right]^5$.
   b. $\psi'(x) = \sqrt{x^2+4x+2}$.
   c. $\rho'(x) = -[x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} + 1]$.
   d. $\phi'(x) = (\sqrt{x^6+2})(3x^2)$.
   e. $f'(x) = e^{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \cos x$.
   f. $g'(x) = e^{\cos^2 x^3} \cdot \operatorname{sen} x^3 \cdot 3x^2$.
   g. $h'(x) = \operatorname{sen} e^{6x} \cdot e^{2x} \cdot 2$.
   h. $i'(x) = \operatorname{sen}(\cos^3 x^2) \cdot \operatorname{sen} x^2 \cdot 2x$.
   i. $\psi'(x) = \left(\dfrac{1}{x^2+3}\right)(2x) - \dfrac{1}{x+2}$.
   j. $\rho'(x) = \dfrac{x+8}{x+3} - \left(\dfrac{x^3+3}{x^3-2}\right)(3x^2)$.
   k. $j'(x) = e^{\cos^2 x^5} \cdot (-\operatorname{sen} x^5) \cdot 5x^4 - e^{\operatorname{sen}^2 x^3} \cdot \cos x^3 \cdot 3x^2$.
   l. $k'(x) = \operatorname{sen}(e^{21x}) \cdot e^{7x} \cdot 7 - \operatorname{sen}(\ln^3 x^5) \cdot \dfrac{1}{x^5} \cdot 5x^4$.
2. Si la función que define la gráfica de la región es $f(x)$, el cambio de la pintura que utiliza el robot es $f(x)$.