CAPÍTULO

1

La integral

[1]

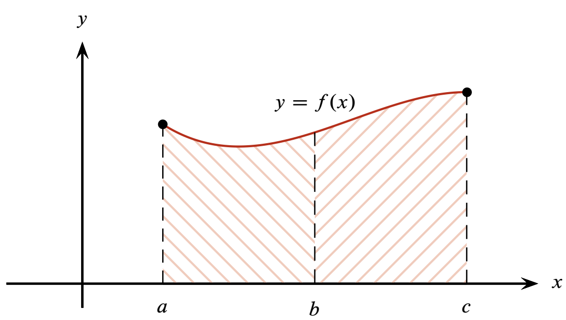
1.6 Propiedades fundamentales de la integral

En esta sección presentamos algunas propiedades básicas de la integral que facilitan su cálculo.

- *Aditividad respecto del intervalo.* Si $a < b < c$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.1}$$

Esta propiedad proviene de la aditividad del área y se puede ver gráficamente en la siguiente figura:



Donde el área bajo la curva $y = f(x)$ y sobre el eje x desde a hasta c es lo mismo que el área desde a hasta b, más el área desde b hasta c, dado que esas dos regiones no se traslapan y su unión forma la región desde a hasta c.

Observe que una expresión equivalente a (1.1) es

$$\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1.2}$$

1. canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017

que equivale a decir que si al área total bajo $f(x)$ entre $x = a$ & $x = c$ le restamos el área comprendida entre $x = a$ & $x = b$, entonces nos quedará sólo el área entre $x = b$ & $x = c$.

Ahora bien, hasta aquí hay un significado para el símbolo $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ considerando que $a < b$, pero no hay un significado para el signo $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ si $a < b$. Para esto convenimos:

- $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

  Es decir, una integral en la que el extremo inferior es un número mayor que el extremo superior es el negativo de la integral con los extremos puestos en el orden contrario (el extremo inferior menor que el extremo superior).

  Con esto ya tenemos un significado para el símbolo $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ no importando si $a < b$ o bien si $a > b$.

Una consecuencia inmediata de esta convención es

- $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

  Ya que
  $$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

  Por supuesto, también podemos concluir que $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, argumentando que $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x$ es el área del segmento de recta bajo $f(a)$ y sobre el eje x, considerado como un rectángulo de base cero.

Ejemplo 1.6.1 *Determinar el valor de la integral* $\int_{10}^4 x^3\,\mathrm{d}x$.

▼
$$\int_{10}^4 x^3\,\mathrm{d}x = -\int_4^{10} x^3\,\mathrm{d}x = -\left(\frac{10^4}{4} - \frac{4^4}{4}\right) = -(2\,500 - 64) = -2\,436.$$

□

Ejemplo 1.6.2 *Calcular el valor de la integral* $\int_5^5 (x^3 - 8x^2 + 9x)\,\mathrm{d}x$.

▼ Por la propiedad enunciada antes, $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, tenemos:
$$\int_5^5 (x^3 - 8x^2 + 9x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

□

- *Linealidad.* Esta propiedad se puede enunciar como sigue: para funciones $f(x), g(x)$ en $[a, b]$ que se puedan integrar y constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
  $$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.3}$$

  Esta igualdad proviene de forma casi directa de la propia definición de la integral como límite de sumas tales como:
  $$\sum_{i=1}^n [\alpha f(x_i^*) + \beta g(x_i^*)]\Delta x_i = \sum_{i=1}^n [\alpha f(x_i^*)\Delta x_i + \beta g(x_i^*)\Delta x_i] =$$
  $$= \alpha \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i + \beta \sum_{i=1}^n g(x_i^*)\Delta x_i.$$

  Estas sumas dan lugar a las integrales en (1.3) cuando se toma el límite $(n \to \infty)$.

- *Positividad.* Si $f(x) \geq 0$ en el intervalo $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geq 0.$$

  Esto es claro pues la integral es un límite de sumas de términos de la forma $f(x_i^*)\Delta x_i$, en los que tanto $f(x_i^*)$ como Δx_i son ≥ 0 y, por ser el límite de una suma de términos ≥ 0, el resultado final es ≥ 0.

- *Monotonía.* Si $f(x) \geq g(x)$ para todo x en el intervalo $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

  Como $f(x) - g(x) \geq 0$ en el intervalo $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\ \mathrm{d}x \geq 0 \ \Rightarrow\ \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x \geq 0 \ \Rightarrow\ \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x\,.$$

Estas propiedades se han utilizado implícitamente con anterioridad, por ejemplo, cuando se hizo la estimación de que, si $m \leq f(x) \leq M$ en el intervalo $[a, b]$, entonces:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq M(b-a).$$

Las expresiones $m(b-a)$, $M(b-a)$, pueden interpretarse como integrales de las funciones constantes m & M respectivamente, pues como se observó antes y podemos ver ahora a partir de la definición, para cualquier constante C y partición $P = \{\, a = x_0 < x_1 < \ \dots\ < x_n = b \,\}$:

$$\begin{aligned}
\int_a^b C\ \mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} C\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \left[C \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \right] = \\
&= C \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = C \cdot \lim_{n\to\infty} (x_n - x_0) = C \cdot \lim_{n\to\infty} (b-a) = \\
&= C \cdot (b-a).
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.6.3 *Evaluar la integral* $\displaystyle\int_1^4 (2x+1)\,\mathrm{d}x$.

▼ Usando linealidad:

$$\int_1^4 (2x+1)\ \mathrm{d}x = 2\int_1^4 x\ \mathrm{d}x + \int_1^4 \mathrm{d}x = 2\left(\frac{4^2 - 1^2}{2}\right) + (4-1) = 18.$$

□

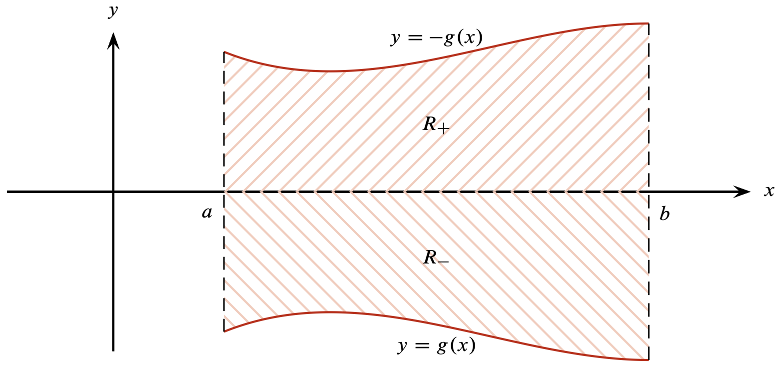
Ejemplo 1.6.4 *Calcular la integral* $\displaystyle\int_0^5 (x^2 - 3x + 2)\,\mathrm{d}x$.

▼ De nuevo por la linealidad,

$$\int_0^5 (x^2 - 3x + 2)\ \mathrm{d}x = \int_0^5 x^2\ \mathrm{d}x - 3\int_0^5 x\ \mathrm{d}x + 2\int_0^5 \mathrm{d}x = \frac{5^3}{3} - 3\left(\frac{5^2}{2}\right) + 2(5) = \frac{125}{3} - \frac{75}{2} + 10 = \frac{85}{6}.$$

□

- *Convención para funciones negativas.* Hasta el momento hemos considerado el cálculo del área de regiones bajo la gráfica de una función $f(x) \geq 0$ con gráfica sobre el eje x. Sin embargo, la definición de la integral de una función como límite de sumas no implica que las funciones deban ser positivas. Si una función $g(x)$ es negativa en todo un intervalo $[a, b]$, entonces es claro que su negativa $-g(x)$ es positiva en el mismo intervalo.



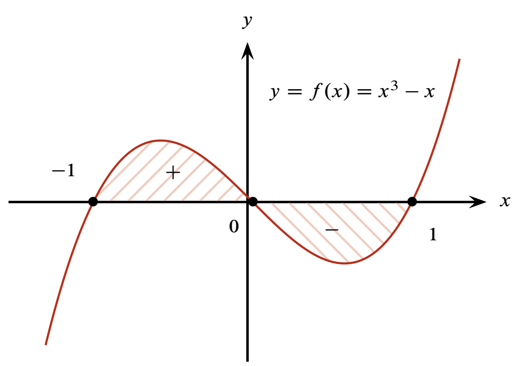
La gráfica de $-g(x)$ es el reflejo de $g(x)$ con respecto al eje x, de manera que el área de la región R_+ entre la gráfica de $-g(x)$ y, el eje x mide lo mismo que el área de la región R_- entre la gráfica de $g(x)$ y el eje x. Además, el área encima del eje x es

$$A(R_+) = \int_a^b -g(x)\ \mathrm{d}x = -\int_a^b g(x) = -A(R_-).$$

Donde identificamos, como parece razonable, a $A(R_-)$ con $\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$, lo que nos lleva de manera natural a tomar la convención de que las áreas de regiones debajo del eje x se deben considerar como negativas.

En general, las áreas de regiones por encima del eje x se toman con signo positivo y las regiones por debajo del eje x con signo negativo. De aquí que, en el contexto de áreas, la integral definida $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ es una suma algebraica de áreas cuyo resultado puede ser positivo, negativo o cero.

Ejemplo 1.6.5 *Calcular* $\int_{-1}^{1} f(x)\ \mathrm{d}x$ *de la siguiente figura.*



▼ De acuerdo con la convención anterior, la integral definida $\int_{-1}^{1} f(x)\ \mathrm{d}x$ para la función $f(x) = x^3 - x$ es cero, porque (véase figura) dicha función tiene una gráfica simétrica con respecto al origen, por ser una función impar, y corta al eje x en -1, 0 y en 1.

- El área entre la gráfica y el eje x de $\int_{-1}^{0} (x^3 - x)\ \mathrm{d}x$ se toma con signo $+$.
- El área entre la gráfica y el eje x de $\int_{0}^{1} (x^3 - x)\ \mathrm{d}x$ se toma con signo $-$.
- Por simetría, las áreas son iguales, por lo tanto $\int_{-1}^{1} (x^3 - x)\ \mathrm{d}x = 0$.

□

A continuación enunciamos dos resultados importantes de la integral definida.

Teorema 1.1 *Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces existe la integral definida*

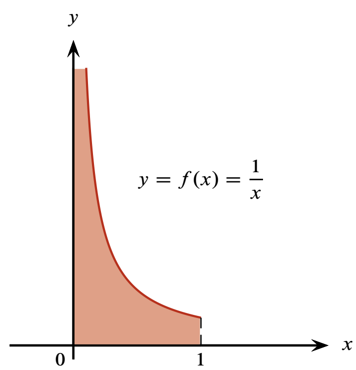
$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Esto es, toda función continua es integrable en intervalos cerrados y acotados.
Si la función no es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, no se puede asegurar la existencia de la integral definida $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$.

Ejemplo 1.6.6 *La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ no es continua en el intervalo $[0, 1]$.*

▼ $f(0) \notin \mathbb{R}$ (no está definido) y además

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty.$$



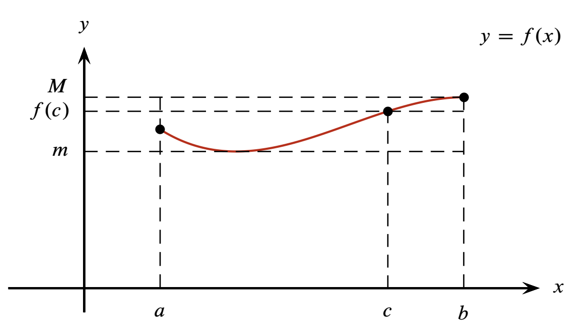
Aquí, no se puede asegurar la existencia de la integral definida:

$$\int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x.$$

□

Teorema 1.2 *Del valor medio para integrales. Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces existe al menos un punto c en el intervalo $[a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = f(c)(b-a).$$



Esta propiedad establece un hecho que se puede deducir de la figura anterior. La función tiene un valor mínimo m y un máximo M, por ser continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces, dado que el rectángulo con base $[a, b]$ y altura m se encuentra contenido en la región R bajo $f(x)$, sobre el eje x, y entre $x = a$, $x = b$, a la vez esta región R queda inscrita dentro del rectángulo con la misma base y altura M, vemos:

$$m(b-a) \leq A(R) = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \leq M(b-a).$$

También se puede escribir, de manera equivalente,

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \leq M.$$

Ahora bien, por el teorema del Valor Intermedio para funciones continuas, dado que el número

$$\gamma = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$$

se encuentra entre m & M, y dado que f es continua, existe al menos un punto c en el intervalo $[a, b]$ de manera que $f(c) = \gamma$. Es decir,

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \quad \text{o bien} \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = f(c)(b-a).$$

Al número $f(c)$ se le denomina valor promedio de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Por esto, podemos decir que toda función continua tiene un valor promedio en cualquier intervalo cerrado.

Ejemplo 1.6.7 *Encontrar el valor promedio de $f(x) = x^k$ para $k = 1, 2, 3$ en el intervalo $[0, a]$.*

▼

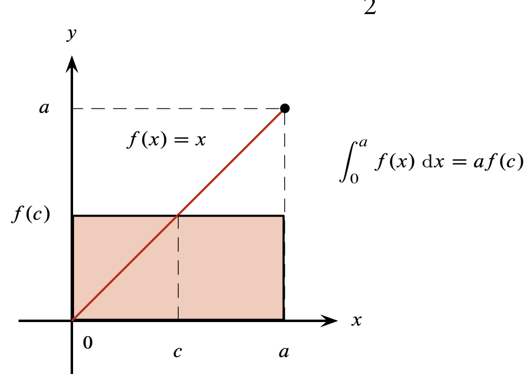
1. Para la función $f(x) = x$ en el intervalo $[0, a]$:

$$\int_0^a x\, \mathrm{d}x = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^a = \frac{a^2}{2}.$$

   El valor promedio buscado es una $f(c)$ con c en $[0, a]$ que cumple

$$f(c) = \frac{1}{a-0} \int_0^a f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \int_0^a x\, \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\left(\frac{a^2}{2}\right) = \frac{a}{2}.$$

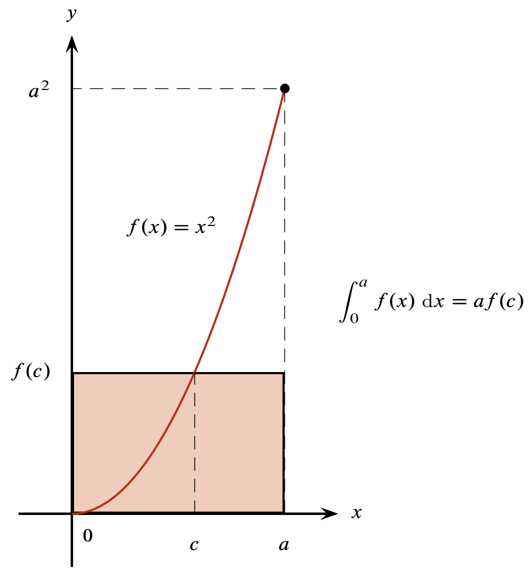
   Dado que $f(x) = x$, dicho valor promedio se obtiene cuando $c = \dfrac{a}{2}$.



2. El valor promedio para $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, a]$ debe cumplir

$$f(c) = \frac{1}{a-0}\int_0^a f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_0^a x^2\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\left(\frac{a^3}{3}\right) = \frac{a^2}{3}.$$

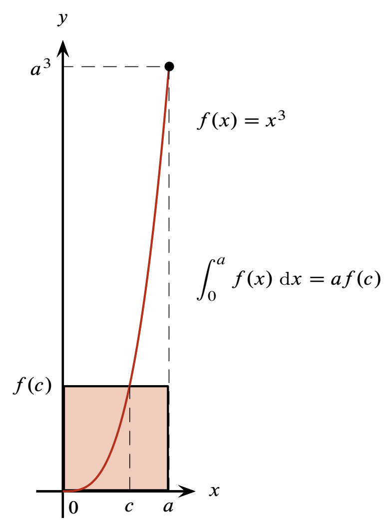
Por lo tanto, como $f(x) = x^2$, se debe cumplir $c^2 = \frac{a^2}{3}$, de donde $c = \frac{a}{\sqrt{3}}$ es el punto en el que $f(c) = \frac{a^2}{3}$.



3. Para la función $f(x) = x^3$ en el intervalo $[0, a]$ el valor promedio $f(c)$ debe satisfacer

$$f(c) = \frac{1}{a-0}\int_0^a f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_0^a x^3\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\left(\frac{a^4}{4}\right) = \frac{a^3}{4}.$$

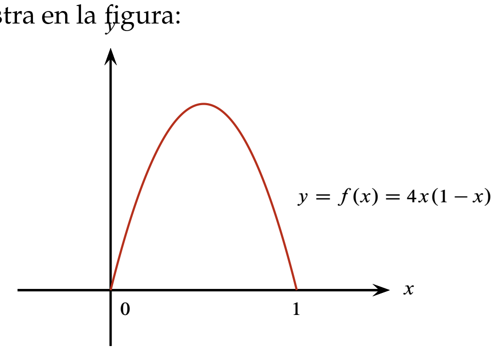
El punto c donde se obtiene dicho valor cumple $c^3 = \frac{a^3}{4}$, de donde $c = \frac{a}{\sqrt[3]{4}}$ es el punto en el que $f(c) = \frac{a^3}{4}$.



□

Ejemplo 1.6.8 *Encontrar el valor promedio de la función* $f(x) = 4x(1-x)$ *en el intervalo* $[0, 1]$ *y el o los puntos* c *en que se cumple* $f(c) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

▼ La gráfica de la función se muestra en la figura:

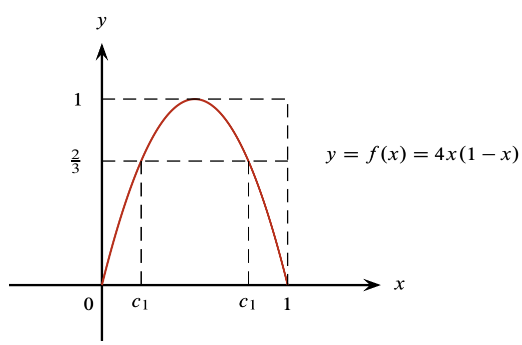


Se debe cumplir para el punto c:

$$f(c) = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 4x(1-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (4x-4x^2)\,\mathrm{d}x =$$
$$= 4\int_0^1 x\,\mathrm{d}x - 4\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = 4\left(\frac{1^2}{2}\right) - 4\left(\frac{1^3}{3}\right) = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

Es decir, $f(c) = 4c(1-c) = \frac{2}{3}$, así que $c - c^2 = \frac{1}{6}$ o bien $c^2 - c + \frac{1}{6} = 0$.

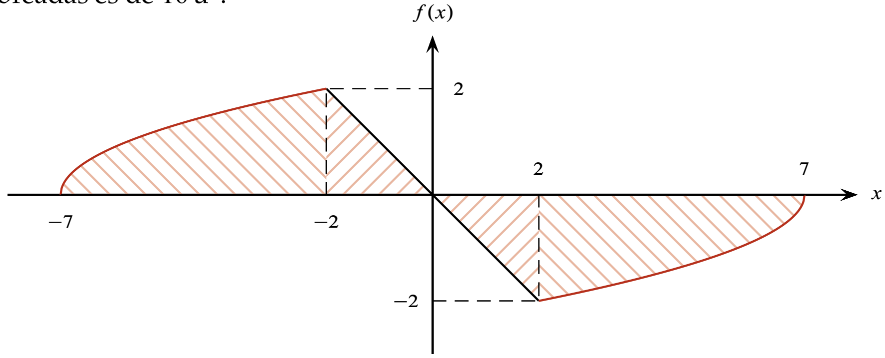
Entonces, $c = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-\frac{4}{6}}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}}{2}$, de modo que el valor promedio es $\frac{2}{3}$ y se alcanza en los puntos $c_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$; $c_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$.



□

Ejercicios 1.6.1 *Propiedes de la integral.* *Soluciones en la página 14*

1. En el plano se representa el bosquejo de la gráfica de la función impar $f(x)$. El área de todas las regiones sombreadas es de $16\,\mathrm{u}^2$.



Calcular:

a. $\displaystyle\int_{-7}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x$;

b. $\displaystyle\int_{-7}^{7} f(x)\,\mathrm{d}x$;

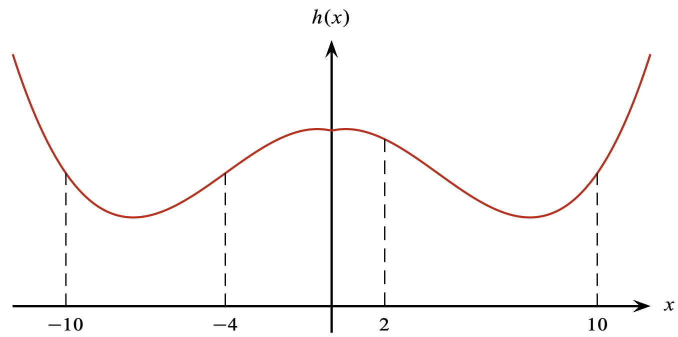
c. $\displaystyle\int_{-2}^{7} f(x)\,\mathrm{d}x$;

d. $\displaystyle\int_{-7}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$;

e. $\displaystyle\int_{0}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x$;

f. $\displaystyle\int_{0}^{7} f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Considere el bosquejo de la gráfica de la función par $h(x)$ que se muestra a continuación:



Obtener las siguientes integrales si:

$$\int_{-10}^{10} h(x)\,\mathrm{d}x = 28 \quad \& \quad \int_{-4}^{0} h(x)\,\mathrm{d}x = 6.$$

a. $\displaystyle\int_{0}^{10} h(x)\,\mathrm{d}x$;

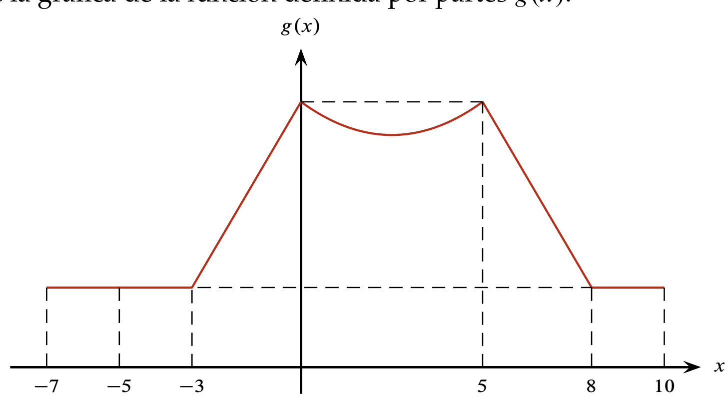
b. $\displaystyle\int_{4}^{10} h(x)\,\mathrm{d}x$;

c. $\displaystyle\int_{-4}^{-10} h(x)\,\mathrm{d}x$;

d. $\displaystyle\int_{-4}^{4} h(x)\,\mathrm{d}x$;

e. $\displaystyle\int_{-10}^{4} h(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Dado el bosquejo de la gráfica de la función definida por partes $g(x)$:



Considere:

$$\int_{-3}^{-5} g(x)\,\mathrm{d}x = -4, \int_{0}^{-3} g(x)\,\mathrm{d}x = -9 \quad \& \quad \int_{-7}^{10} g(x)\,\mathrm{d}x = 45.$$

Calcule:

a. $\displaystyle\int_{-7}^{-3} g(x)\,\mathrm{d}x;$

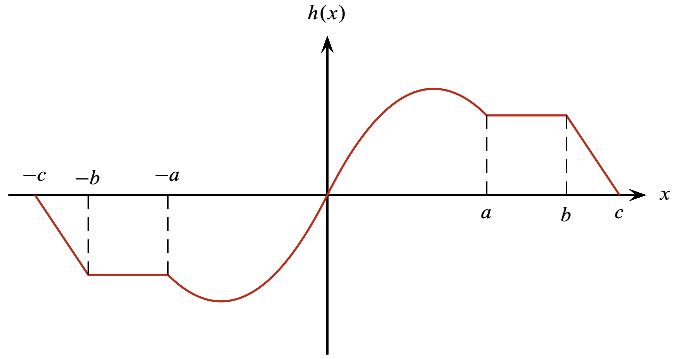
b. $\displaystyle\int_{-3}^{5} g(x)\,\mathrm{d}x;$

c. $\displaystyle\int_{8}^{5} g(x)\,\mathrm{d}x;$

d. $\displaystyle\int_{-7}^{-3} g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{10}^{8} g(x)\,\mathrm{d}x;$

e. $\displaystyle\int_{0}^{-5} g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{5}^{10} g(x)\,\mathrm{d}x.$

4. Considere el bosquejo de la gráfica de la función impar definida por partes $h(x)$ que se muestra a continuación.



Obtenga:

a. $\displaystyle\int_{0}^{c} h(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-b}^{-a} h(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-c}^{-b} h(x)\,\mathrm{d}x;$

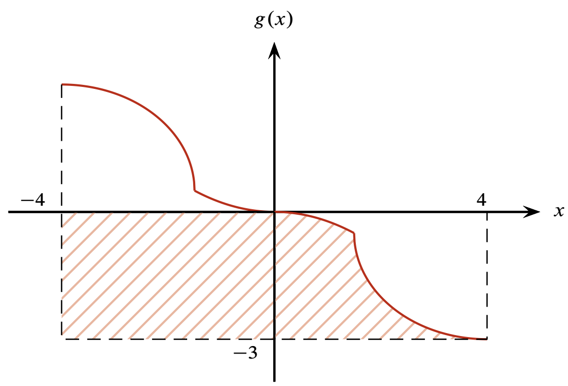
b. $\displaystyle\int_{-c}^{-a} h(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b}^{a} h(x)\,\mathrm{d}x;$

c. $\displaystyle\int_{0}^{-a} h(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-a}^{0} h(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} h(x)\,\mathrm{d}x;$

d. $\displaystyle\int_{a}^{c} h(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-a}^{-c} h(x)\,\mathrm{d}x;$

e. $\displaystyle\int_{b}^{-b} h(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b}^{c} h(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-b}^{-c} h(x)\,\mathrm{d}x.$

5. El bosquejo presentado es de la gráfica de la función impar $g(x)$. El área de la región sombreada es de $18\,\mathrm{u}^2$.



Calcule las siguientes integrales:

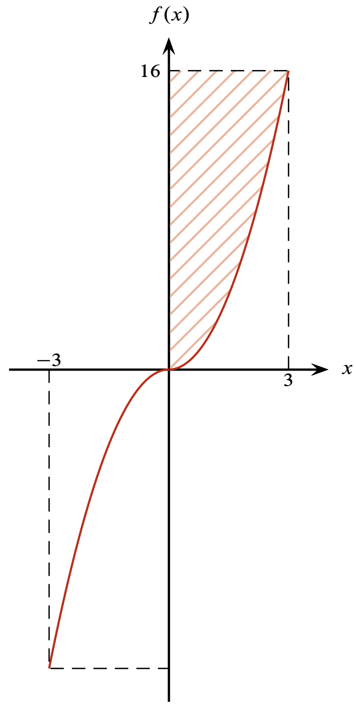
a. $\displaystyle\int_{-4}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x;$

b. $\displaystyle\int_{0}^{4} g(x)\,\mathrm{d}x;$

c. $\displaystyle\int_{-4}^{4} g(x)\,\mathrm{d}x;$

d. $\displaystyle\int_{0}^{-4} g(x)\,\mathrm{d}x.$

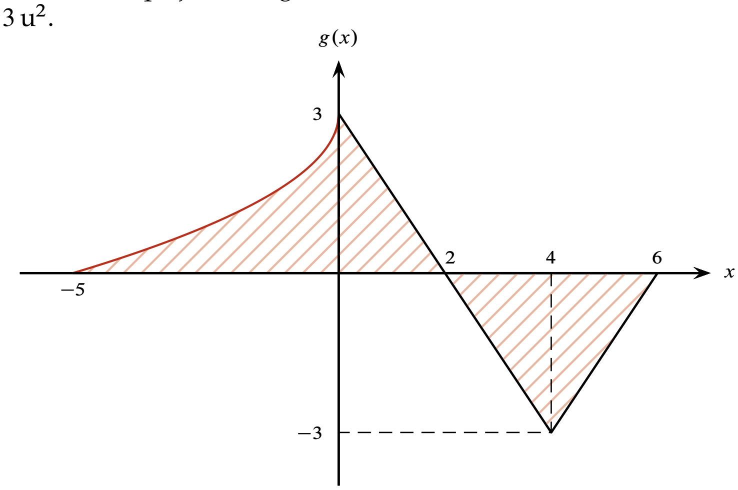
6. El plano muestra el bosquejo de la gráfica de la función impar $f(x)$. El área de la región sombreada es de $18\,\mathrm{u}^2$.



Calcule las siguientes integrales:

a. $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$; b. $\displaystyle\int_0^{-3} f(x)\,\mathrm{d}x$; c. $\displaystyle\int_{-3}^3 f(x)\,\mathrm{d}x$; d. $\displaystyle\int_{-3}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$.

7. En el plano se presenta el bosquejo de la gráfica de la función $g(x)$. El área de todas las regiones sombreadas es de $13\,\mathrm{u}^2$.

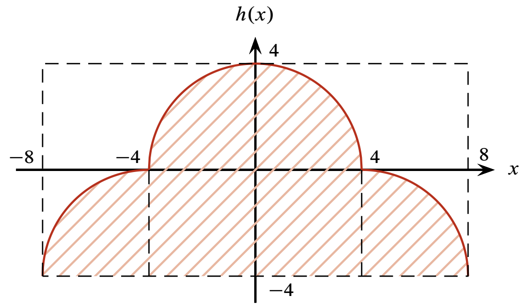


Calcule:

a. $\displaystyle\int_0^{-5} g(x)\,\mathrm{d}x$; c. $\displaystyle\int_{-5}^6 g(x)\,\mathrm{d}x$; e. $\displaystyle\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x$; g. $\displaystyle\int_0^4 g(x)\,\mathrm{d}x$;

b. $\displaystyle\int_4^6 g(x)\,\mathrm{d}x$; d. $\displaystyle\int_2^6 g(x)\,\mathrm{d}x$; f. $\displaystyle\int_{-5}^2 g(x)\,\mathrm{d}x$; h. $\displaystyle\int_4^{-5} g(x)\,\mathrm{d}x$.

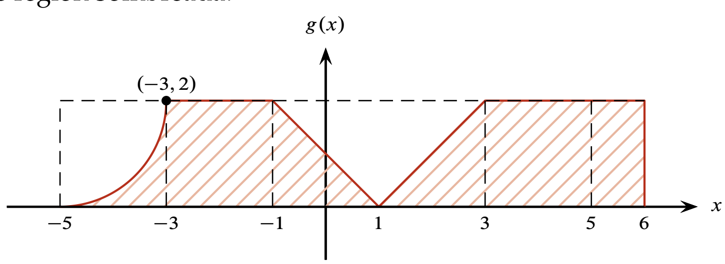
8. En el siguiente plano se muestra el bosquejo de la gráfica de la función par $h(x)$. El área de la región sombreada es de $16(\pi+2)\,\mathrm{u}^2$.



Obtenga el resultado de las siguientes integrales:

a. $\int_{4}^{8} h(x)\,\mathrm{d}x$;
b. $\int_{-4}^{4} h(x)\,\mathrm{d}x$;
c. $\int_{0}^{-4} h(x)\,\mathrm{d}x$;
d. $\int_{-8}^{-4} h(x)\,\mathrm{d}x$;
e. $\int_{-8}^{8} h(x)\,\mathrm{d}x$;
f. $\int_{-4}^{-8} h(x)\,\mathrm{d}x$;
g. $\int_{-4}^{8} h(x)\,\mathrm{d}x$;
h. $\int_{0}^{-8} h(x)\,\mathrm{d}x$.

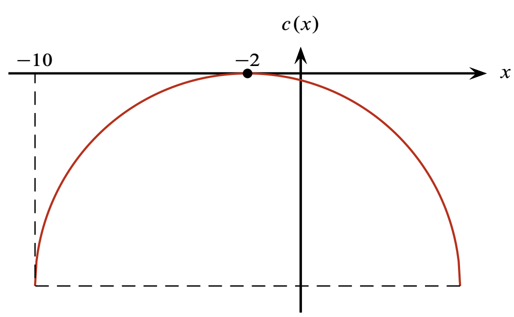
9. Calcule el área de las región sombreada.



Y obtenga el resultado de las siguientes integrales:

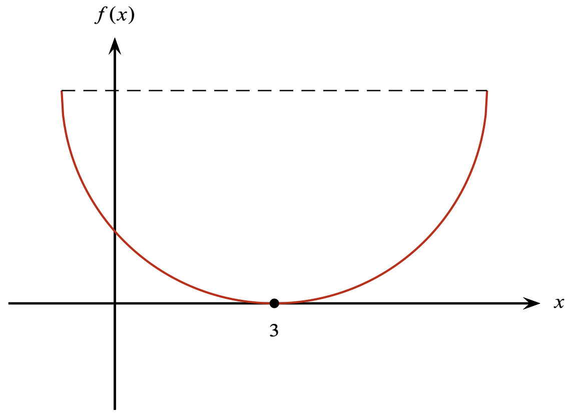
a. $\int_{-5}^{-1} g(x)\,\mathrm{d}x$;
b. $\int_{3}^{5} g(x)\,\mathrm{d}x$;
c. $\int_{1}^{6} g(x)\,\mathrm{d}x$;
d. $\int_{1}^{-1} g(x)\,\mathrm{d}x$;
e. $\int_{-3}^{-5} g(x)\,\mathrm{d}x$;
f. $\int_{-5}^{6} g(x)\,\mathrm{d}x$.

10. Considerando la gráfica de la semicircunferencia $c(x)$, calcule las siguientes integrales:



a. $\int_{-2}^{-10} c(x)\,\mathrm{d}x$;
b. $\int_{-2}^{6} c(x)\,\mathrm{d}x$;
c. $\int_{6}^{-10} c(x)\,\mathrm{d}x$;
d. $\int_{-10}^{6} c(x)\,\mathrm{d}x$.

11. Considerando el bosquejo de la gráfica de una semicircunferencia $f(x)$ con un radio de 4 u,



calcule las siguientes integrales:

a. $\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$; b. $\int_{-1}^{7} f(x)\,\mathrm{d}x$; c. $\int_{3}^{7} f(x)\,\mathrm{d}x$; d. $\int_{7}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

12. Calcule las siguientes integrales:

    a. $\int_{1}^{8} (3t-2)\ \mathrm{d}t$.
    b. $\int_{2}^{6} (x^2-3x+5)\ \mathrm{d}x$.
    c. $\int_{0}^{3} (4y^3-2y+7)\ \mathrm{d}y$.

13. Calcule las siguientes integrales:

    a. $\int_{-2}^{2} (x^3+4x)\ \mathrm{d}x$.
    b. $\int_{-5}^{5} 7x^5\ \mathrm{d}x$.
    c. $\int_{-1}^{1} (x^7-3x^5+2x^3-10x)\ \mathrm{d}x$.

14. Encuentre el valor promedio de las siguientes funciones en los intervalos dados:

    a. $f(x)=3x^2$ en $[1,6]$.
    b. $f(x)=3x-2$ en $[-1,3]$.
    c. $f(x)=x^k$ en $[a,b]$ para $k=1,2,3$ con $0<a<b$.

Ejercicios 1.6.1 *Propiedes de la integral.* *Preguntas, página 8*

1. a. 6. b. 16. c. -6. d. 8. e. -2. f. -8.

2. a. 14. b. 8. c. -8. d. 12. e. 20.

3. a. 8. b. 24. c. -9. d. $8+4=12$. e. $-13+13=0$.

4. a. $\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$.
   b. $\int_b^c h(x)\,\mathrm{d}x$.
   c. $3\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$.
   d. $2\int_a^c h(x)\,\mathrm{d}x$.
   e. $2\int_b^c h(x)\,\mathrm{d}x$.

5. a. 6. b. 6. c. 0. d. -6.

6. a. 30. b. 30. c. 0. d. -30.

7. a. -4. b. 3. c. 1. d. 6. e. 3. f. 7. g. -1. h. -4.

8. a. $16-4\pi$. b. 8π. c. -4π. d. $16-4\pi$. e. 32. f. $4\pi-16$. g. $16+4\pi$. h. -16.

9. a. $8-\pi$. b. 4. c. 10. d. -2. e. $\pi-4$. f. $20-\pi$.

10. a. $64-16\pi$. b. $16\pi-64$. c. $32\pi-128$. d. $128-32\pi$.

11. a. $16-4\pi$. b. $32-8\pi$. c. $16-4\pi$. d. $4\pi-16$.

12. a. 76.5.
    b. 41.3333.
    c. 93.

13. a. 0.
    b. 0.
    c. 0.

14. a. $c=2.6458$.
    b. $c=2$.
    c. $f(x)=x^k$ en $[a,b]$ para $k=1,2,3$ con $0<a<b$.
       i. Para $x=1$, $c=\dfrac{1}{2}(b+a)$.
       ii. Para $x=2$, $c=\sqrt{\dfrac{b^2+ab+a^2}{3}}$.
       iii. Para $x=3$, $c=\sqrt[3]{\dfrac{b^3+ab^2+a^2b+a^3}{4}}$.