CAPÍTULO

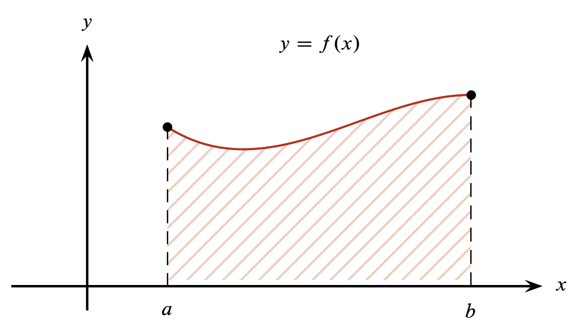
1

La integral

1.5 Definición de la integral. Sumas de Riemann

1.5.1 Aproximación del área de una región

En esta sección precisamos algunas ideas expuestas previamente, con respecto al problema de encontrar el área de la región bajo la gráfica de una función $y = f(x)$ continua y no negativa, en un intervalo cerrado $[a, b]$.



- Una *partición* del intervalo $[a, b]$ es un conjunto de puntos $\mathcal{P} = \{ x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \}$, que cumplen

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

de tal manera que el intervalo original puede descomponerse en la unión de n subintervalos:

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup \ldots \cup [x_{n-1}, x_n].$$

canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017

Observe que n es el número de subintervalos en que se parte el intervalo original. El ancho de cada subintervalo, que denotaremos Δx_k, es la diferencia formada por su extremo derecho menos el izquierdo, es decir:

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= x_1 - x_0,\\ \Delta x_2 &= x_2 - x_1,\\ &\vdots\\ \Delta x_n &= x_n - x_{n-1}.\end{aligned}$$

En general,

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \text{ para } k = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Con mucha frecuencia las particiones del intervalo $[a, b]$ que tomaremos en los ejemplos son de tal forma que los puntos consecutivos están igualmente espaciados (aunque no se requiere forzosamente que sea así), es decir, están dispuestos de tal forma que

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_n = \frac{b-a}{n},$$

y en ese caso no será necesario distinguir los Δx_k con un subíndice y escribimos simplemente Δx para indicar el ancho de cualquier subintervalo; si hay n subintervalos de igual longitud entonces es claro que cada uno tiene una longitud de:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

También podemos decir en este caso que tendremos

$$x_0 = a,\ x_1 = a + \Delta x,\ x_2 = a + 2\Delta x,\ \ldots,\ x_k = a + k\Delta x,\ \ldots,\ x_n = a + n\Delta x = b.$$

Así por ejemplo, para partir el intervalo $[1, 10]$ en $n = 12$ subintervalos iguales, tenemos que

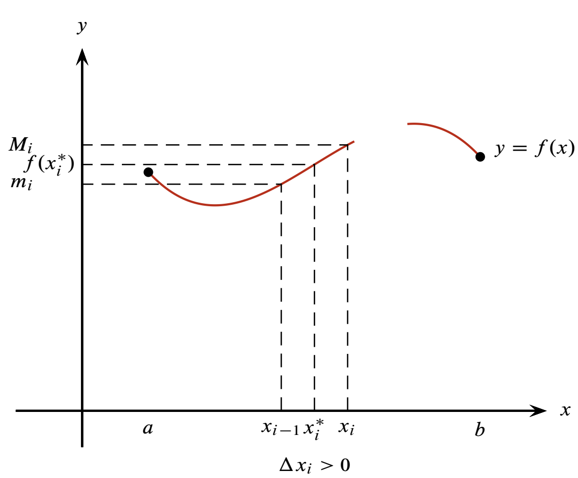
$$\Delta x = \frac{10-1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0.75$$

y con esto se definen las x_i

$$\begin{array}{lllllll} x_0 = 1, & x_1 = 1.75, & x_2 = 2.5, & x_3 = 3.25, & x_4 = 4, & x_5 = 4.75, & x_6 = 5.5,\\ x_7 = 6.25, & x_8 = 7, & x_9 = 7.75, & x_{10} = 8.5, & x_{11} = 9.25, & x_{12} = 10. & \end{array}$$

Ahora bien, para la partición dada $\mathcal{P} = \{\, a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b \,\}$ del intervalo $[a, b]$ denotemos para cada $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} m_i &= \text{mínimo de } f(x) \text{ en el subintervalo } [x_{i-1}, x_i];\\ M_i &= \text{máximo de } f(x) \text{ en el subintervalo } [x_{i-1}, x_i];\\ x_i^* &= \text{un punto del subintervalo } [x_{i-1}, x_i] \text{ elegido arbitrariamente.}\end{aligned}$$



Entonces en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$,

$$m_i \le f(x_i^*) \le M_i$$

y debido a que el ancho $\Delta x_i > 0$ de cada subintervalo es positivo:

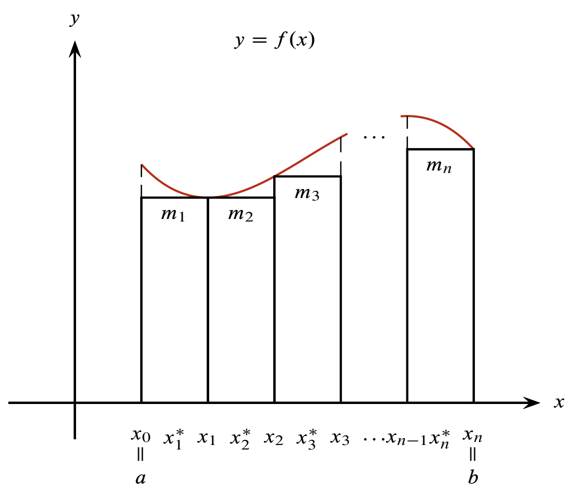
$$m_i \Delta x_i \le f(x_i^*)\Delta x_i \le M_i \Delta x_i, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n.$$

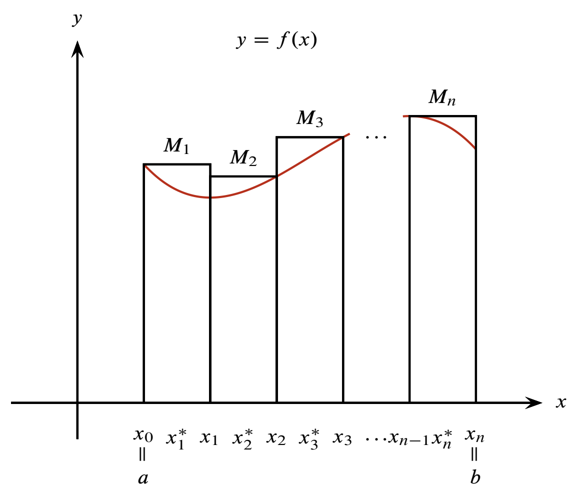
Lo que en la figura se traduce en que el rectángulo de altura $f(x_i^*)$ tiene mayor área que el rectángulo de altura m_i y a la vez tiene menor área que el rectángulo de altura M_i; esto sucede en cada subintervalo. También, si sumamos las anteriores desigualdades, válidas para cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ desde $i = 1$ hasta $i = n$, obtenemos:

$$m_1 \Delta x_1 + \ldots + m_n \Delta x_n \le f(x_1^*)\Delta x_1 + \ldots + f(x_n^*)\Delta x_n \le M_1 \Delta x_1 + \ldots + M_n \Delta x_n. \tag{1.1}$$

Utilizando la notación $\sum$ para sumas podemos escribir esta doble desigualdad de manera más compacta como sigue:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i. \tag{1.2}$$





En la doble desigualdad (1.2) podemos identificar en el extremo izquierdo la suma de áreas de los rectángulos inferiores (figura izquierda anterior) y en el extremo derecho la suma de las áreas de los rectángulos superiores (figura derecha anterior) . También se puede afirmar que se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le A(R) \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i. \tag{1.3}$$

Las desigualdades (1.2) y (1.3) son similares, pero no necesariamente podemos concluir del parecido entre ellas que

$$A(R) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i,$$

sino solamente que $A(R)$ es aproximada por $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$, es decir,

$$A(R) \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i.$$

Lo que sí se puede afirmar es que, para cualquier partición $\mathcal{P} = \{ a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b \}$, tanto el área $A(R)$ como la suma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$ están acotadas (limitadas) por las sumas inferior $S_I = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ y superior $S_S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$.

Entonces, si hacemos más fina la partición (lo que se logra añadiendo cada vez más puntos y en consecuencia teniendo subintervalos cada vez más pequeños) se espera que el valor de la suma inferior S_I aumente y el valor de la suma superior S_S disminuya, propiciando con esto que la diferencia entre esta sumas $(S_S - S_I)$ sea cada vez más pequeña y tienda a cero.

Al suceder:

$$S_I \le A(R) \le S_S; \quad S_I \le \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i \le S_S \quad \& \quad (S_S - S_I) \longrightarrow 0,$$

se espera que $A(R)$ y la suma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$ estén cada vez más próximos, es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i \longrightarrow A(R).$$

Esto es, podemos definir el área $A(R)$ de la región R mediante

$$A(R) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i .$$

1.5.2 Sumas de Riemann

Definición. Para una partición $\mathcal{P} = \{ a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b \}$ del intervalo $[a, b]$, si x_i^* es un punto del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ arbitrariamente elegido para $i = 1, 2, \ldots, n$, a la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

se le denomina suma de Riemann para la función $y = f(x)$ con respecto a la partición $\mathcal{P}$.

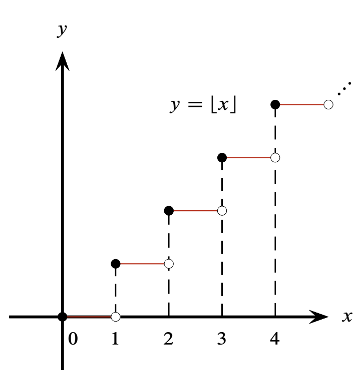
Ejemplo 1.5.1 *Calcular la suma de Riemann $A(R)$ para una función $f(x) \ge 0$ que es constante por intervalos.*

▼

1. Consideremos por ejemplo la "función máximo entero" definida para $x \in \mathbb{R}$ mediante

$$f(x) = \lfloor x \rfloor = \text{máximo entero menor o igual a } x, \quad x \ge 0.$$

   Cuya gráfica es



Para poder obtener un área finita tenemos que restringir el dominio de la función. Por ejemplo; el área $A(R)$, bajo $f(x)$ sobre el eje x entre 0 y 4, se obtiene tomando la partición:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 4;$$

restringiendo la elección de los x_i^* a cualquier punto del subintervalo diferente al lado derecho, por ejemplo $x_i^* = x_{i-1}$. Se tiene que $\Delta x = 1$, mediante

$$A(R) = \sum_{i=1}^{4} f(x_{i-1})\Delta x = 0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 = 6.$$

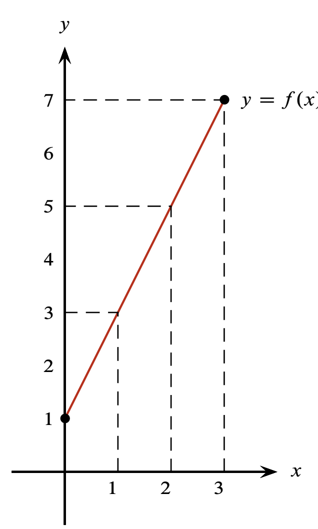
Para cualquier función escalonada, el área $A(R)$ se obtendrá tomando como puntos de la partición precisamente a los puntos en donde la función tiene sus discontinuidades. Así, en general, si $f(x) = c_i$ para $x_{i-1} \le x \le x_i$ e $i = 1, 2, \ldots, n$, el área es

$$A(R) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}).$$

□

Ejemplo 1.5.2 *Para la función $f(x) = 2x + 1$ utilizar sumas de Riemann para aproximar el área $A(R)$ bajo su gráfica, sobre el eje x, desde $x = 0$ hasta $x = 3$, eligiendo $x_i^* = x_i$; considerando:*

1. *3 subintervalos,*
2. *6 subintervalos,*
3. *n subintervalos.*



▼

1. Con 3 subintervalos de igual tamaño tenemos $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$; $\Delta x = \dfrac{3-0}{3} = 1$;

$$A(R) \approx \sum_{i=1}^{3} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{3} f(x_i)\Delta x = f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + f(3)\cdot 1 = 3 + 5 + 7 = 15.$$

2. Con 6 subintervalos de igual longitud Δx tenemos $\Delta x = \dfrac{3-0}{6} = 0.5$, así que

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0.5,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1.5,\ x_4 = 2,\ x_5 = 2.5,\ x_6 = 3;$$

$$A(R) \approx \sum_{i=1}^{6} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{6} f(x_i)\Delta x = [f(0.5) + f(1) + f(1.5) + f(2) + f(2.5) + f(3)](0.5) =$$
$$= [2+3+4+5+6+7](0.5) = 13.5.$$

3. Con n subintervalos de igual longitud Δx tenemos

$$\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}; \quad x_i = x_0 + i\,\Delta x = 0 + i\left(\frac{3}{n}\right) = \frac{3i}{n};$$

$$f(x_i) = 2x_i + 1 = 2\left(\frac{3i}{n}\right) + 1 = 1 + \frac{6i}{n};$$

en consecuencia, la suma que aproxima $A(R)$ es

$$\begin{aligned}
A(R) &\approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{6i}{n}\right)\frac{3}{n} = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{6i}{n}\right) = \\
&= \frac{3}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{6i}{n}\right] = \\
&= \frac{3}{n}\left[n + \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} i\right] = \\
&= \frac{3}{n}\left[n + \frac{6}{\cancel{n}}\frac{\cancel{n}(n+1)}{2}\right] = \\
&= \frac{3}{n}[n + 3(n+1)] = \frac{3}{n}(4n+3) = \\
&= \frac{12\cancel{n}}{\cancel{n}} + \frac{9}{n} = 12 + \frac{9}{n}.
\end{aligned}$$

Hemos podido sacar $\dfrac{3}{n}$ de la sumatoria ya que es un factor constante con respecto al índice i.

Se pudo sacar $\dfrac{6}{n}$ de la sumatoria ya que es un factor constante con respecto al índice i.

Se ha usado la suma de los primeros n enteros positivos.

Observe que en esta estimación, a medida que n aumenta, el valor de la suma se aproxima a 12.

Los resultados de las sumas con $n = 3$ & $n = 6$ que calculamos antes, también se obtienen con la anterior fórmula:

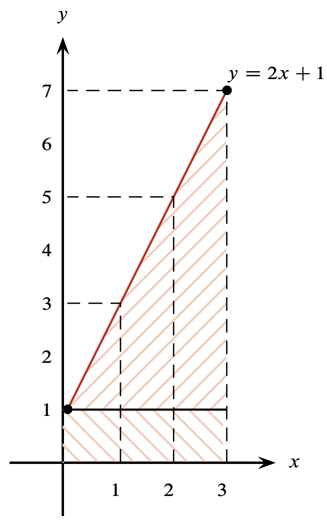
Si $n = 3$: $A(R) \approx 12 + \dfrac{9}{n} = 12 + \dfrac{9}{3} = 15.$

Si $n = 6$: $A(R) \approx 12 + \dfrac{9}{n} = 12 + \dfrac{9}{6} = 12 + 1.5 = 13.5.$

Así tenemos que tomando el límite cuando $n \to \infty$,

$$A(R) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\left(12 + \frac{9}{n}\right) = 12.$$

Vale la pena comentar que el área $A(R)$ se puede obtener alternativamente sumando el área de un rectángulo (base 3, altura 1) y un triángulo (base 3, altura 6), como se muestra en la siguiente figura.



□

Ejemplo 1.5.3 *Para la función $f(x) = x^2$ encontrar la suma de Riemann que aproxima el área $A(R)$ bajo su gráfica, sobre el eje x entre $x = 0$ & $x = 2$, para un número n de subintervalos, tomando $x_i^* = x_i$.*

▼ Si usamos n subintervalos de igual longitud Δx tendremos $\Delta x = \dfrac{2-0}{n} = \dfrac{2}{n}$, los x_i son

$$x_i = x_0 + i\,\Delta x = 0 + i\,\Delta x = \frac{2i}{n},$$

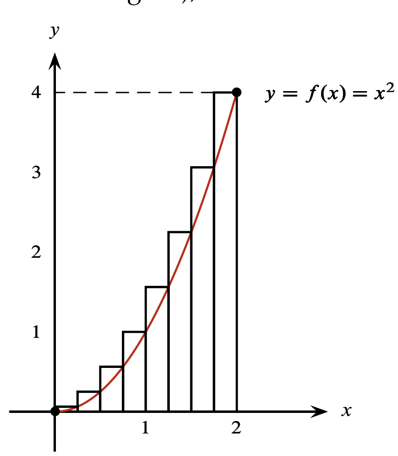
por lo que

$$f(x_i^*) = f(x_i) = x_i^2 = \left(\frac{2i}{n}\right)^2 = \frac{4i^2}{n^2}.$$

Por lo tanto:

$$A(R) \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4i^2}{n^2}\right)\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \overset{*}{=} \frac{8}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) =$$
$$= \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} = \frac{4}{3}\left(\frac{2n^2+3n+1}{n^2}\right) = \frac{4}{3}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}.$$

En la igualdad (*) anterior hemos empleado la fórmula (**??**) de la página **??** para la suma de los cuadrados de los n primeros enteros positivos.
Así por ejemplo si $n = 8$ (como se muestra en la figura), entonces:



$$A(R) \approx \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} \ \Rightarrow\ A(R) \approx \frac{8}{3} + \frac{4}{8} + \frac{4}{3(8)^2} \approx 3.1875.$$

□

De nuevo podemos observar que, si al aumentar el número n de subintervalos la aproximación mejora, entonces, al tomar el límite cuando $n \to \infty$ deberíamos obtener el valor real de $A(R)$. Este valor es

$$A(R) = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{4}{3}\lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{4}{3}\cdot 2 = \frac{8}{3}.$$

Ejemplo 1.5.4 *Para la función $f(x) = x$ encontrar la suma de Riemann que aproxima el área $A(R)$ bajo su gráfica, sobre el eje x entre $x = a$ & $x = b$, para un número n de subintervalos de igual longitud y tomando $x_i^* = x_i$ (el extremo derecho de cada subintervalo).*

▼ Si usamos n subintervalos de igual longitud Δx tendremos $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ y los puntos x_i son

$$x_i = a + i\,\Delta x = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right); \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, n.$$

Por lo que:

$$f(x_i^*) = f(x_i) = x_i = a + i\,\Delta x = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right); \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, n.$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x &= \sum_{i=1}^{n}\left[a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right]\left(\frac{b-a}{n}\right) = \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left[a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right] = \\
&= \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[\sum_{i=1}^{n} a + \sum_{i=1}^{n} i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right] = \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[\sum_{i=1}^{n} a + \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} i\right] = \\
&\overset{*}{=} \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[na + \left(\frac{b-a}{n}\right)\frac{n(n+1)}{2}\right] = \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[na + \frac{b-a}{2}(n+1)\right] = \\
&= (b-a)\left[\frac{na}{n} + \frac{b-a}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)\right] = \\
&= (b-a)\left[a + \frac{b-a}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\Delta x = (b-a)\left[a + \frac{b-a}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]. \tag{1.4}$$

En la igualdad $(*)$ de este desarrollo hemos empleado la fórmula (**??**) de la página **??** para la suma de los primeros n naturales.

□

Ejemplo 1.5.5 *Para la función $f(x) = x^2$, obtener la suma de Riemann que aproxima el área $A(R)$ limitada por su gráfica, sobre el eje x entre $x = a$, $x = b$, para un número n de subintervalos de igual longitud y tomando $x_i^* = x_i$ (el extremo derecho de cada subintervalo).*

▼ Si usamos n subintervalos de igual longitud $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, tendremos los puntos:

$$x_i = a + i\,\Delta x = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right); \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, n.$$

Por lo que:

$$f(x_i^*) = f(x_i) = x_i^2 = [a + i\,\Delta x]^2 = \left[a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right]^2; \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, n.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x &= \sum_{i=1}^{n}\left[a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right]^2\left(\frac{b-a}{n}\right) = \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left[a^2 + 2ai\left(\frac{b-a}{n}\right) + i^2\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\right] = \\
&= \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[\sum_{i=1}^{n} a^2 + \sum_{i=1}^{n} 2ai\left(\frac{b-a}{n}\right) + \sum_{i=1}^{n} i^2\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\right] = \\
&= \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[\sum_{i=1}^{n} a^2 + 2a\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} i + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2\sum_{i=1}^{n} i^2\right] = \\
&\overset{*}{=} \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[na^2 + 2a\left(\frac{b-a}{n}\right)\frac{n(n+1)}{2} + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \\
&= \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[na^2 + a(b-a)(n+1) + \frac{(b-a)^2}{6}\frac{(n+1)(2n+1)}{n}\right] = \\
&= (b-a)\left[\frac{na^2}{n} + a(b-a)\frac{n+1}{n} + \frac{(b-a)^2}{6}\frac{2n^2+3n+1}{n^2}\right] = \\
&= (b-a)\left[a^2 + a(b-a)\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{(b-a)^2}{6}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\Delta x = (b-a)\left[a^2 + a(b-a)\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{(b-a)^2}{6}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right]. \tag{1.5}$$

En la igualdad $(*)$ de este desarrollo hemos utilizado las fórmulas (**??**) de la página **??** para la suma de los primeros n naturales y (**??**) de la página **??** para la suma de los cuadrados de los primeros n naturales.

□

Ejemplo 1.5.6 *Para la función $f(x) = x^3$, obtener la suma de Riemann que aproxima el área $A(R)$ bajo su gráfica sobre el eje x, entre $x = a$, $x = b$, para un número n de subintervalos de igual longitud y tomando $x_i^* = x_i$ (el extremo derecho de cada subintervalo).*

▼ Usando n subintervalos de igual longitud $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, tendremos los puntos:

$$x_i = a + i\,\Delta x = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right); \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, n.$$

Por lo que:

$$f(x_i^*) = f(x_i) = x_i^3 = [a + i\,\Delta x]^3 = \left[a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right]^3; \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, n.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x &= \sum_{i=1}^{n}\left[a+i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right]^3\left(\frac{b-a}{n}\right) = \\
&= \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left[a^3+3a^2 i\left(\frac{b-a}{n}\right)+3ai^2\left(\frac{b-a}{n}\right)^2+i^3\left(\frac{b-a}{n}\right)^3\right] = \\
&= \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[\sum_{i=1}^{n}a^3+\sum_{i=1}^{n}3a^2 i\left(\frac{b-a}{n}\right)+\sum_{i=1}^{n}3ai^2\left(\frac{b-a}{n}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}i^3\left(\frac{b-a}{n}\right)^3\right] = \\
&= \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[\sum_{i=1}^{n}a^3+3a^2\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}i+3a\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\sum_{i=1}^{n}i^2+\left(\frac{b-a}{n}\right)^3\sum_{i=1}^{n}i^3\right] = \\
&\overset{*}{=} \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[na^3+3a^2\left(\frac{b-a}{n}\right)\frac{n(n+1)}{2}+3a\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\right. \\
&\qquad\qquad\left.+\left(\frac{b-a}{n}\right)^3\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right] = \\
&= \left(\frac{b-a}{n}\right)\left[na^3+\frac{3}{2}a^2(b-a)(n+1)+\frac{1}{2}a(b-a)^2\frac{(n+1)(2n+1)}{n}+\frac{1}{4}(b-a)^3\frac{(n+1)^2}{n}\right] = \\
&= (b-a)\left[a^3+\frac{3}{2}a^2(b-a)\frac{n+1}{n}+\frac{1}{2}a(b-a)^2\frac{2n^2+3n+1}{n^2}+\frac{1}{4}(b-a)^3\frac{(n+1)^2}{n^2}\right] = \\
&= (b-a)\left[a^3+\frac{3}{2}a^2(b-a)\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}a(b-a)^2\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{4}(b-a)^3\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} x_i^3\Delta x = (b-a)\left[a^3+\frac{3}{2}a^2(b-a)\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}a(b-a)^2\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}(b-a)^3\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right]. \tag{1.6}$$

En la igualdad ($*$) de este desarrollo hemos usado las fórmulas (**??**) de la página **??** para la suma de los primeros n naturales, (**??**) de la página **??** de los cuadrados de los primeros n naturales y (**??**) de la página **??** de los cubos del los primeros n naturales.

□

1.5.3 Definición de la integral

- **Definición.** Si $P_n = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, de manera que cuando $n \to \infty$ la máxima de las distancias $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ tiende a 0, se define la integral definida de $f(x)$ desde a hasta b mediante

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i, \tag{1.7}$$

siempre que el límite exista, donde x_i^* denota un punto arbitrario en $[x_{i-1}, x_i]$ y donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Cuando este límite existe, se dice que f es una función integrable en el intervalo $[a, b]$.

Observaciones:

1. La integral se ha definido para funciones $f(x)$ a las que no se exige que cumplan $f(x) \geq 0$.

2. La notación que se emplea para la integral fue introducida por Leibnitz, quien la representó originalmente mediante la letra S alargada (por suma); con el tiempo fue alargándose más hasta tener su forma actual. Los valores a, b se llaman extremos o límites de integración; a es el inferior, b es el superior. A la función $f(x)$ se le denomina integrando. La expresión $\mathrm{d}x$ se llama diferencial de x. El símbolo de integral $\int$, el integrando, los límites de integración $\int_a^b$ y la diferencial de x $\mathrm{d}x$ corresponden, respectivamente, al símbolo de suma ($\sum$), a los valores $f(x_i)$ de la función, a los valores mínimo y máximo del índice i ($i = 1$ hasta n) y a los anchos de los subintervalos (Δx_i). Esquemáticamente:

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} & f(x_i^*) & \Delta x_i \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \displaystyle\int_a^b & f(x) & \mathrm{d}x \end{array}$$

3. El proceso mediante el cual se calcula $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ es algo complicado, pues involucra sumas que se deben simplificar antes de tomar el $\lim\limits_{n\to\infty}$; veremos en las secciones siguientes que existen varias formas de simplificar dicho proceso.

De toda la discusión previa podemos decir lo siguiente:

- Definición. Si $f(x) \geq 0$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces el área $A(R)$ de la región del plano bajo la gráfica de $f(x)$, sobre el eje x entre $x = a$ & $x = b$ es

$$A(R) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ejemplo 1.5.7 *Demostrar que:*

$$\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2.$$

▼ Usando la igualdad (1.4) de la página 8 obtenida cuando se calculó la suma de Riemann de la función $f(x) = x$, tomando el límite $\lim\limits_{n\to\infty}$ y un poco de álgebra:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x = (b-a)\left[a + \frac{b-a}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] \underset{\lim\limits_{n\to\infty}}{\to} (b-a)\left[a + \frac{b-a}{2}\right] =$$

$$= a(b-a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 = ab - a^2 + \frac{1}{2}(b^2 - 2ab + a^2) = ab - a^2 + \frac{1}{2}b^2 - ab + \frac{1}{2}a^2 =$$

$$= \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2.$$

□

Ejemplo 1.5.8 *Demostrar que:*

$$\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3.$$

▼ Usando la igualdad (1.5) de la página 9 obtenida cuando se calculó la suma de Riemann de la función $f(x) = x^2$, tomando el límite $\lim\limits_{n\to\infty}$ y un poco de álgebra:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\Delta x = (b-a)\left[a^2 + a(b-a)\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{(b-a)^2}{6}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right] \underset{\lim\limits_{n\to\infty}}{\rightarrow}$$

$$\underset{\lim\limits_{n\to\infty}}{\rightarrow} (b-a)\left[a^2 + a(b-a) + \frac{1}{3}(b^2-2ab+a^2)\right] =$$

$$= (b-a)\left[a^2 + ab - a^2 + \frac{1}{3}b^2 - \frac{2}{3}ab + \frac{1}{3}a^2\right] = (b-a)\left[\frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{3}ab + \frac{1}{3}a^2\right] =$$

$$= \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3.$$

□

Ejemplo 1.5.9 *Demostrar que:*

$$\int_a^b x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}b^4 - \frac{1}{4}a^4.$$

▼ Usando la igualdad (1.6) de la página 10 obtenida cuando se calculó la suma de Riemann de la función $f(x) = x^3$, tomando el límite $\lim\limits_{n\to\infty}$ y un poco de álgebra:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} x_i^3\Delta x = (b-a)\left[a^3 + \frac{3}{2}a^2(b-a)\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}a(b-a)^2\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}(b-a)^3\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right] \underset{\lim\limits_{n\to\infty}}{\rightarrow} (b-a)\left[a^3 + \frac{3}{2}a^2(b-a) + a(b-a)^2 + \frac{1}{4}(b-a)^3\right].$$

Si multiplicamos $(b-a)$ por cada término del factor de la derecha y colocamos términos semejantes por columnas:

$$\begin{array}{rcccccc}
(b-a)a^3 & = & & & & a^3b & -a^4; \\
(b-a)\frac{3}{2}a^2(b-a) & = & & & \frac{3}{2}a^2b^2 & -3a^3b & +\frac{3}{2}a^4; \\
(b-a)a(b-a)^2 & = & & ab^3 & -3a^2b^2 & +3a^3b & -a^4; \\
(b-a)\frac{1}{4}(b-a)^3 & = & \frac{1}{4}b^4 & -ab^3 & \frac{3}{2}a^2b^2 & -a^3b & \frac{1}{4}a^4,
\end{array}$$

obtenemos el resultado deseado: $\frac{1}{4}b^4 - \frac{1}{4}a^4$. □

Ejercicios 1.5.1 *Sumas de Riemann.* *Soluciones en la página 15*

1. Aproximar el área $A(R)$ de la región R bajo la gráfica de la función $f(x) = x$, sobre el eje x desde $x = 1$ hasta $x = 5$, utilizando una suma de Riemann. Considere 4 subintervalos de igual longitud y también $x_i^* = x_i$.

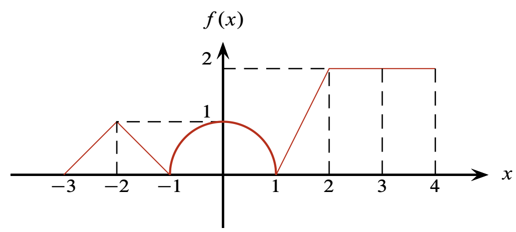
2. Aproximar el área $A(R)$ de la región R bajo la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{7}{3}$, sobre el eje x desde $x = -4$ hasta $x = 2$ utilizando una suma de Riemann. Considere 6 subintervalos de igual longitud y también $x_i^* = x_i$.

3. Aproximar el área $A(R)$ de la región R bajo la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 4$, sobre el eje x desde $x = -2$ hasta $x = 2$. Considere 4 subintervalos de igual longitud y también $x_i^* = x_i$.

4. Para la función $f(x) = 2x$, encontrar la suma de Riemann que aproxima el área $A(R)$ de la región R bajo su gráfica y sobre el eje x desde $x = 0$ hasta $x = 4$; use un número n de subintervalos de igual longitud. Considere $x_i^* = x_i$.

5. Encontrar la suma de Riemann que aproxima el área $A(R)$ de la región R bajo la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x}{5} + 4$, sobre el eje x desde $x = -2$ hasta $x = 3$; use un número n de subintervalos de igual longitud. Considere $x_i^* = x_i$.

6. Dado que $A(R) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, determine las integrales que se piden para la función dada en la gráfica siguiente:



a. $\int_{-3}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

b. $\int_{-2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

c. $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

d. $\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

e. $\int_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

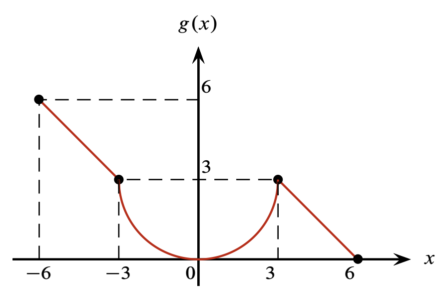
f. $\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

g. $\int_{-3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$.

h. $\int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

i. $\int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

7. Considerando la gráfica de la función $g(x)$ que se muestra a continuación, determine las integrales indicadas,



a. $\int_{-6}^{-3} g(x)\,\mathrm{d}x$.

b. $\int_{-3}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x$.

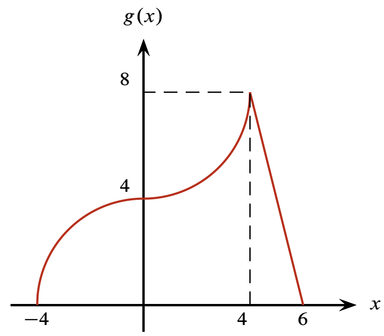
c. $\int_{0}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x$.

d. $\int_{-3}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x$.

e. $\int_{3}^{6} g(x)\,\mathrm{d}x$.

f. $\int_{-6}^{6} g(x)\,\mathrm{d}x$.

8. Considerando la gráfica de la función $g(x)$ que se muestra a continuación, determine las integrales indicadas,



a. $\int_{-4}^{0} h(x)\ \mathrm{d}x$.

b. $\int_{0}^{4} h(x)\ \mathrm{d}x$.

c. $\int_{4}^{6} h(x)\ \mathrm{d}x$.

d. $\int_{-4}^{6} h(x)\ \mathrm{d}x$.

9. Sea la función:

$$g(x) = \begin{cases} -x-3, & \text{si } -5 \leq x \leq -3; \\ \sqrt{9-x^2}, & \text{si } -3 < x < 3; \\ -|\,x-4\,|+1, & \text{si } 3 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Determine las integrales indicadas considerando el bosquejo de la gráfica de la función.

a. $\displaystyle\int_{-5}^{0} g(x)\ \mathrm{d}x$.

b. $\displaystyle\int_{-3}^{3} g(x)\ \mathrm{d}x$.

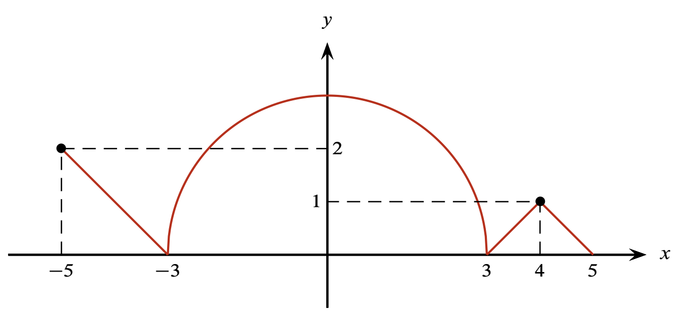
c. $\displaystyle\int_{3}^{4} g(x)\ \mathrm{d}x$.

d. $\displaystyle\int_{3}^{5} g(x)\ \mathrm{d}x$.

e. $\displaystyle\int_{-5}^{5} g(x)\ \mathrm{d}x$.

Ejercicios 1.5.1 *Sumas de Riemann.* *Preguntas, página 12*

1. 10.
2. 12.8889.
3. 10.
4. $\dfrac{16(n+1)}{n}$.
5. $\dfrac{5+41n}{2n}$.
6. a. $\dfrac{1}{2}$.
   b. $\dfrac{1}{2}$.
   c. $\dfrac{1}{2}\pi$.
   d. 1.
   e. 4.
   f. $\dfrac{1}{2}(1+\pi)$.
   g. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\pi$.
   h. $\dfrac{1}{4}\pi+3$.
   i. 5.
7. a. 13.5.
   b. 1.9314.
   c. 1.9314.
   d. 3.8628.
   e. $\dfrac{9}{2}$.
   f. 12.86.
8. a. 4π.
   b. $32-4\pi$.
   c. 8.
   d. 40.
9. La gráfica de la función:



   a. $2+\dfrac{9}{4}\pi$.
   b. $\dfrac{9}{2}\pi$.
   c. $\dfrac{1}{2}$.
   d. 1.
   e. $\dfrac{7}{2}+\dfrac{9}{2}\pi$.