CAPÍTULO

1

La integral

1.4 Notación Σ para sumas

En esta sección introducimos una notación que sirve para abreviar la escritura de sumas en general. Se utiliza la letra griega sigma mayúscula (Σ) para abreviar sumas como sigue:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n .$$

El símbolo $\sum$ se lee: la suma de los términos a_i desde $i = 1$ hasta $i = n$. La letra i denota un índice, que varía desde el número 1 hasta n (denominados límites o extremos de i), y el símbolo a_i es el término general de la suma, que puede ser cualquier expresión que contenga el índice i.

1. Algunos ejemplos del uso de esta notación son los siguientes:

   a. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n.$

   b. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2.$

   c. $\displaystyle\sum_{j=1}^{10} j(j+1) = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + 10\cdot 11.$

   d. $$\sum_{k=1}^{5} \frac{k^2+2}{k+1} = \frac{1^2+2}{1+1} + \frac{2^2+2}{2+1} + \frac{3^2+2}{3+1} + \frac{4^2+2}{4+1} + \frac{5^2+2}{5+1} =$$
   $$= \frac{3}{2} + \frac{6}{3} + \frac{11}{4} + \frac{18}{5} + \frac{27}{6} = \frac{90+120+165+216+270}{60} = \frac{287}{20}.$$

   e. $\displaystyle\sum_{l=1}^{n} m_l \Delta x_l = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n.$

1. canek.azc.uam.mx: 22/ 1/ 2017

f. $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} f(x_j^*)\Delta x_j = f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + \ldots + f(x_m^*)\Delta x_m.$

Como puede apreciarse en estos ejemplos, la notación $\sum$ para sumas es una manera de abreviar sumas que de otra forma ocuparían mucho espacio al escribirse. Se debe tomar en cuenta al usarla que la expresión $i = 1$ en la parte inferior de la $\sum$ es la que define cuál es el índice que varía a lo largo de la suma y cuál es su valor inicial; el número o letra encima de la $\sum$ indica cuál es el valor final del índice en la suma.

2. En ocasiones se añaden algunas condiciones adicionales sobre los índices en la parte inferior. Dos ejemplos de la notación sigma modificada se muestran a continuación:

$$\sum_{\substack{p=3 \\ p \text{ primo}}}^{17} (p^2-1) = (3^2-1) + (5^2-1) + (7^2-1) + (11^2-1) + (13^2-1) + (17^2-1) = 656.$$

$$\sum_{\substack{k=6 \\ k \text{ par}}}^{12} \left(\frac{k^3-2k+5}{k-3}\right) 2^k = \left(\frac{6^3-12+5}{3}\right) 2^6 + \left(\frac{8^3-16+5}{5}\right) 2^8 +$$

$$+ \left(\frac{10^3-20+5}{7}\right) 2^{10} + \left(\frac{12^3-24+5}{9}\right) 2^{12}.$$

Al usar la notación $\sum$ junto con las propiedades algebraicas ya conocidas de los números reales se obtienen resultados muy útiles para algunos cálculos como los siguientes:

3. Para cualquier constante a que sea el término general de una suma:

$$\sum_{i=1}^{n} a = \underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{n} = a \cdot n.$$

Así por ejemplo:

$$\sum_{i=1}^{8} 3 = 3(8) = 24, \qquad \sum_{i=1}^{30} 5 = 5(30) = 150, \qquad \sum_{k=5}^{10} 20 = 20(6) = 120.$$

4. Como consecuencia de la conmutatividad y asociatividad de la suma de números reales, en una suma de muchos términos, estos se pueden reordenar y reagrupar, y así obtenemos lo siguiente para una suma en la que los términos generales son a su vez sumas:

$$\sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) = \qquad \text{(reordenando y reagrupando)}$$

$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j + \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

De esta manera, podemos partir una suma en varias sumas mas sencillas, como por ejemplo:

$$\sum_{i=1}^{n} (i^2 + 3i) = \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} 3i;$$

$$\sum_{j=1}^{100} (j^3 - 2j^2 + 3^{-j}) = \sum_{j=1}^{100} j^3 - \sum_{j=1}^{100} 2j^2 + \sum_{j=1}^{100} 3^{-j}.$$

5. Otra propiedad que se obtiene a partir de la distributividad del producto sobre la suma es la siguiente, para cualquier constante c y término general a_k:

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = (ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n) = c(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = c\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

   Como ejemplos sencillos de la aplicación de esta propiedad tenemos los siguientes:

$$\sum_{i=1}^{n} 3i = 3\sum_{i=1}^{n} i;$$
$$\sum_{j=1}^{100} 2j^2 = 2\sum_{j=1}^{100} j^2;$$
$$\sum_{k=1}^{80}(3k^2 + 2\sqrt{k-1}) = 3\sum_{k=1}^{80} k^2 + 2\sum_{k=1}^{80}\sqrt{k-1}.$$

6. Una observación pertinente al usar la notación $\sum$ es que los índices se tratan como variables mudas en el sentido de que se puede cambiar su nombre sin alterar el resultado. Así las siguientes sumas tienen el mismo resultado:

$$\sum_{i=1}^{10}(i^2 - 5i + 2) = \sum_{j=1}^{10}(j^2 - 5j + 2) = \sum_{k=1}^{10}(k^2 - 5k + 2);$$
$$\sum_{m=0}^{N}(2^m + m^2) = \sum_{n=0}^{N}(2^n + n^2) = \sum_{\alpha=0}^{N}(2^\alpha + \alpha^2).$$

7. De manera similar al cambio de nombre para un índice, en ocasiones se hacen corrimientos de índices. Esto consiste en reemplazar un índice y sus límites inferior y superior por otro índice al que se le suma o resta un número entero, por ejemplo:

$$\sum_{i=1}^{20}(i^2 + 3i) = \sum_{j=0}^{19}[(j+1)^2 + 3(j+1)].$$

   Donde $i = j + 1$ y además $i = 1 \Rightarrow j = 0 \quad \& \quad i = 20 \Rightarrow j = 19$.

$$\sum_{j=1}^{40}(j+5)^3 - 3^{j+5} = \sum_{k=6}^{45}(k^3 - 3^k).$$

   Donde $j + 5 = k$ y además $j = 1 \Rightarrow k = 6 \quad \& \quad j = 40 \Rightarrow k = 45$.

Vamos a enlistar a continuación algunos resultados particulares sobre sumas especiales, que nos serán muy útiles mas adelante.

1. La suma de los primeros n números enteros positivos se calcula con la formula siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.1}$$

   Podemos convencernos de la validez de esta fórmula si sumamos los enteros de 1 a n en orden ascendente con los mismos enteros de forma descendente, como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{rccccccccccccc}
S_n = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\
S_n = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2S_n = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots & + & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}$$

La suma del primer y segundo renglón (horizontalmente) coinciden con $S_n = \sum_{i=1}^{n} i$; en el tercer renglón tenemos las sumas verticales, hay n sumandos iguales a $n+1$, por lo que la suma total es $2S_n = n(n+1)$. Por lo tanto:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Como ejemplo concreto:

$$\sum_{i=1}^{100} i = 1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{100(100+1)}{2} = 5\,050.$$

Sobre esta suma en particular, se cuenta la anécdota de que la descubrió el famoso matematico Carl Friedrich Gauss (1777–1855) cuando era un niño.

2. Sumas telescópicas. Se llaman así a las sumas en las que por razones de signo se cancelan por parejas todos los términos, excepto el primero y el último término.

Ejemplo 1.4.1 *Determinar el resultado final de las siguientes sumas telescópicas:*

a. $\sum_{i=1}^{m} (a_i - a_{i-1})$.

b. $\sum_{j=1}^{n} (b_{j+1}^2 - b_j^2)$.

c. $\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$.

d. $\sum_{l=1}^{M} \frac{1}{l(l+1)}$.

▼ Basta con utilizar la propiedad telescópica en los tres primeros ejercicios:

a. $\sum_{i=1}^{m} (a_i - a_{i-1}) = (\cancel{a_1} - a_0) + (\cancel{a_2} - \cancel{a_1}) + (\cancel{a_3} - \cancel{a_2}) + \dots + (\cancel{a_{m-1}} - \cancel{a_{m-2}}) + (a_m - \cancel{a_{m-1}}) = a_m - a_0$.

b. $\sum_{j=1}^{n} (b_{j+1}^2 - b_j^2) = (\cancel{b_2^2} - b_1^2) + (\cancel{b_3^2} - \cancel{b_2^2}) + (\cancel{b_4^2} - \cancel{b_3^2}) + \dots + (\cancel{b_n^2} - \cancel{b_{n-1}^2}) + (b_{n+1}^2 - \cancel{b_n^2}) = b_{n+1}^2 - b_1^2$.

c.

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \dots +$$
$$+ \left(\cancel{\frac{1}{N-1}} - \cancel{\frac{1}{N}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{N}} - \frac{1}{N+1}\right) =$$
$$= 1 - \frac{1}{N+1} = \frac{N}{N+1}.$$

d. Este último ejemplo es más difícil, pues no parece ser una suma telescópica. Pero se resuelve, dado que:

$$\frac{1}{l} - \frac{1}{l+1} = \frac{(l+1) - l}{l(l+1)} = \frac{1}{l(l+1)}.$$

De esta forma, usando esta igualdad:

$$\sum_{l=1}^{M} \frac{1}{l(l+1)} = \sum_{l=1}^{M} \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l+1}\right) = 1 - \frac{1}{M+1} = \frac{M}{M+1}.$$

□

3. La suma de los cuadrados de los primeros n enteros positivos está dada por la fórmula siguiente:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{1.2}$$

Es este caso es algo más complicado verificar la validez de esta fórmula, pero se puede lograr utilizando algo de álgebra, Empecemos por usar la identidad del cubo de un binomio:

$$(n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1,$$

de donde, transponiendo términos, obtenemos:

$$3n^2 - 3n + 1 = n^3 - (n-1)^3,$$

que es válida para todo entero n. Si ahora escribimos esta fórmula de manera sucesiva para n, $n-1$, $n-2$, $\ldots$, $3, 2, 1$ y sumamos columnas, obtendremos:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
3n^2 & - & 3n & + & 1 & = & n^3 & - & (n-1)^3 \\
3(n-1)^2 & - & 3(n-1) & + & 1 & = & (n-1)^3 & - & (n-2)^3 \\
3(n-2)^2 & - & 3(n-2) & + & 1 & = & (n-2)^3 & - & (n-3)^3 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
3(3)^2 & - & 3(3) & + & 1 & = & (3)^3 & - & 2^3 \\
3(2)^2 & - & 3(2) & + & 1 & = & (2)^3 & - & 1^3 \\
3(1)^2 & - & 3(1) & + & 1 & = & (1)^3 & - & 0^3 \\
\hline
3\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 & - & 3\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k & + & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 & = & n^3 & - & 0^3
\end{array}$$

ya que la suma de los lados derechos es telescópica (excepto los extremos, los términos se anulan por parejas). De aquí resulta que

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = n^3 - \sum_{k=1}^{n} 1 + 3\sum_{k=1}^{n} k = n^3 - n + 3\frac{n(n+1)}{2}.$$

Entonces:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2(n^3-n) + 3n(n+1)}{6} = \frac{2n^3 - 2n + 3n^2 + 3n}{6} = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

O sea:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Como ejemplo concreto de aplicación de esta fórmula tenemos:

$$\sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{10(10+1)[2(10)+1]}{6} = \frac{10(11)(21)}{6} = 385.$$

4. La suma de los cubos de los primeros n enteros positivos está dada por la fórmula siguiente:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2. \tag{1.3}$$

Para verificar la validez de esta igualdad se utiliza un procedimiento similar al aplicado en el caso anterior. Empecemos usando la identidad:

$$(n-1)^4 = n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1,$$

de donde, trasponiendo términos, obtenemos:

$$4n^3 - 6n^2 + 4n - 1 = n^4 - (n-1)^4,$$

que es válida para todo entero n. Si ahora escribimos esta fórmula de manera sucesiva para n, $n-1$, $n-2$, $\dots$, 3, 2, 1 y sumamos columnas, obtendremos:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
4n^3 & - & 6n^2 & + & 4n & - & 1 & = & n^4 & - & (n-1)^4 \\
4(n-1)^3 & - & 6(n-1)^2 & + & 4(n-1) & - & 1 & = & (n-1)^4 & - & (n-2)^4 \\
4(n-2)^3 & - & 6(n-2)^2 & + & 4(n-2) & - & 1 & = & (n-2)^4 & - & (n-3)^4 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
4(3)^3 & - & 6(3)^2 & + & 4(3) & - & 1 & = & 3^4 & - & 2^4 \\
4(2)^3 & - & 6(2)^2 & + & 4(2) & - & 1 & = & 2^4 & - & 1^4 \\
4(1)^3 & - & 6(1)^2 & + & 4(1) & - & 1 & = & 1^4 & - & 0^4 \\
\hline
4\sum_{k=1}^{n} k^3 & - & 6\sum_{k=1}^{n} k^2 & + & 4\sum_{k=1}^{n} k & - & n & = & n^4 & - & 0^4.
\end{array}$$

ya que la suma de los lados derechos es telescópica (excepto los extremos, los términos se anulan por parejas).

De aquí resulta:

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^4 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k + n;$$

ahora utilizamos las fórmulas (1.1) de la página 3 y (1.2) de la página 5:

$$\begin{aligned}
4\sum_{k=1}^{n} k^3 &= n^4 + 6\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] - 4\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] + n = \\
&= n^4 + n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n = \\
&= n^4 + 2n^3 + 3n^2 + n - 2n^2 - 2n + n = \\
&= n^4 + 2n^3 + n^2 = n^2(n^2 + 2n + 1) = n^2(n+1)^2,
\end{aligned}$$

de donde

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

que es la suma que se quería verificar.

Si bien es posible encontrar fórmulas similares para la suma de potencias de cualquier orden de los primeros n enteros positivos, no nos ocuparemos de ellas. Tales fórmulas fueron encontradas por el matemático suizo Jacques Bernoulli.

5. Suma de una progresión geométrica: se denomina progresión geométrica con razón r a la secuencia de números

$$r^0, r^1, r^2, \dots, r^n.$$

Para $r = 1$ la progresión geométrica es constante:

$$1^0, 1^1, 1^2, \dots, 1^n$$

y su suma es n. Comprobaremos que para $r \neq 1$ se cumple:

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = r^0 + r^1 + r^2 + \ldots + r^n = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}.$$

Para comprobar el resultado anterior denotemos por S_n a la suma y observemos lo que sucede cuando multiplicamos S_n por r y le restamos S_n:

$$\begin{array}{rrcccccccccccc} & rS_n & = & \cancel{r} & + & \cancel{r^2} & + & \cancel{r^3} & \ldots & + & \cancel{r^n} & + & r^{n+1} \\ - & S_n & = & 1 & + & \cancel{r} & + & \cancel{r^2} & + & \cancel{r^3} & \ldots & + & \cancel{r^n} \\ \hline & rS_n - S_n & = & r^{n+1} & - & 1. & & & & & & & \end{array}$$

Por lo tanto:

$$(r-1)S_n = r^{n+1} - 1,$$

y, tomando en cuenta que $r \neq 1$, de modo que $r - 1 \neq 0$, tenemos:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = r^0 + r^1 + r^2 + \ldots + r^n = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}.$$

Ejemplo concreto de aplicación de esta fórmula es el célebre problema del inventor del ajedrez a quien el rey de la India, impresionado por el invento ofreció darle lo que pidiera. Según la leyenda le pidió al rey que le diera un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta y asi sucesivamente, duplicando cada vez el número de granos; el numero total que recibiría el inventor en total sería:

$$\sum_{k=0}^{63} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{63} = \frac{2^{64}-1}{2-1} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

¡Más de 18 millones de billones de granos de trigo!

Otro ejemplo:

$$\sum_{k=0}^{100} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^{100} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{101} - 1}{\frac{2}{3} - 1} = 2.99999999999999995080691\ldots$$

¿Qué sucederá si añadimos más términos a la progresión? Invitamos al lector a plantear sus hipótesis.

Ejercicios 1.4.1 *Notación Σ. Soluciones en la página 9*

Determinar el resultado de las siguientes sumas:

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} \frac{k}{k+1}$.
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{3^i}{i}$.
3. $\displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ par}}}^{17} \frac{(j)^2}{j+1}$.
4. $\displaystyle\sum_{a=1}^{10} 5$.

5. $\displaystyle\sum_{i=0}^{6}(2i^2-5i)$.
6. $\displaystyle\sum_{k=4}^{8}(-1)^k k^2$.
7. $\displaystyle\sum_{i=-2}^{3}(2^i+(-1)^i i^2)$.
8. $\displaystyle\sum_{j=2}^{2}(4j+h)$.
9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{7}\frac{3k^2+5}{k+6}$.

Ejercicios 1.4.1 *Notación* Σ. *Preguntas, página 7*

1. 3.55.
2. 16.5.
3. 65.0806.
4. 50.
5. 77.
6. 42.
7. 12.75.
8. $8 + h$.
9. 40.5051.