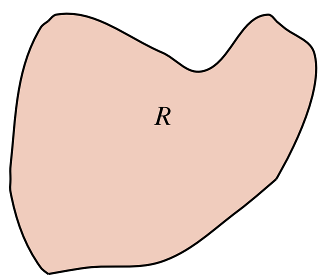
CAPÍTULO

1

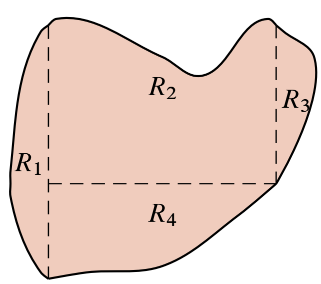
La integral

1.3 Cálculo aproximado del área de una región plana bajo una curva

Retomamos en esta sección el problema del cálculo de áreas, introduciendo algunas simplificaciones y notaciones que nos permitirán resolverlo. Supongamos que se desea calcular el área de una región del plano acotada por una curva continua como la mostrada en la siguiente figura:



Basados en las propiedades del área enunciadas anteriormente, vemos que se puede subdividir la región R en varias subregiones como sigue:

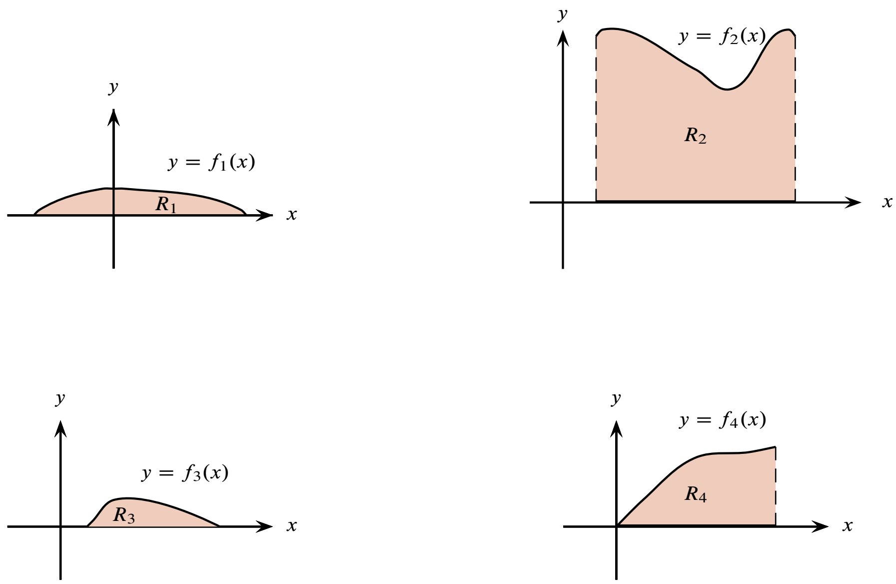


y, por tratarse de regiones que no se traslapan, tenemos entonces:

$$A(R) = A(R_1) + A(R_2) + A(R_3) + A(R_4).$$

1. canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017

Si rotamos algunas de las subregiones de la figura anterior y además introducimos ejes coordenados, vemos que habrá que calcular las áreas de las siguientes regiones para encontrar $A(R)$:

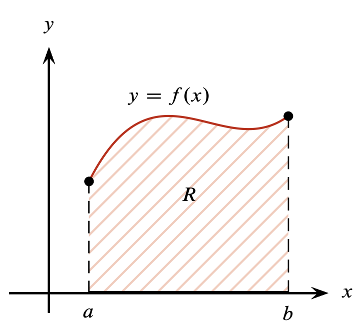


La observación importante ahora es que estas cuatro regiones tienen algo en común:

1. Todas ellas se ven como una región limitada arriba por una curva, abajo por el eje horizontal x y a los lados (en el caso de R_2 y R_4) por rectas verticales.
2. Suponemos que las curvas que acotan por arriba cada una de estas regiones representan la gráfica de una función continua $y_i = f_i(x)$ con $i = 1, 2, 3, 4$.
3. Por la forma como se han situado en el plano cartesiano estas funciones cumplen que $f_i(x) \geq 0$.

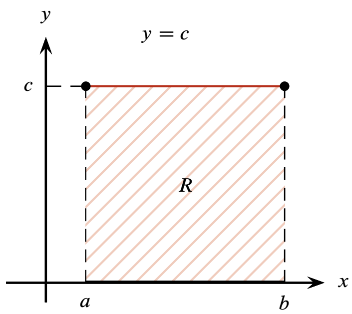
Por lo anterior, vemos que el cálculo de $A(R_1), A(R_2), A(R_3)$ o $A(R_4)$ se reduce a resolver el problema siguiente:

- Calcular el área de una región R acotada arriba por una función continua $y = f(x) \geq 0$, abajo por el eje x, así como a los lados por las rectas verticales $x = a$ & $x = b$.

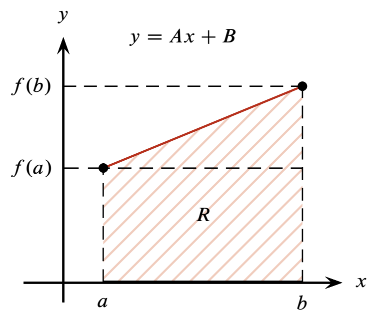


Casos particulares

1. El cálculo del área que se pide en este problema sería muy fácil si la función $f(x)$ fuese constante (pues entonces la región sería un rectángulo) o lineal (porque entonces la región sería un trapecio). En estos casos:



$f(x) = c$,
así que el área es
$A(R) = (b - a) \cdot c$,
es decir, base × altura.



$f(x) = Ax+B \Rightarrow f(a) = Aa+B$ & $f(b) = Ab+B$,
así que el área es

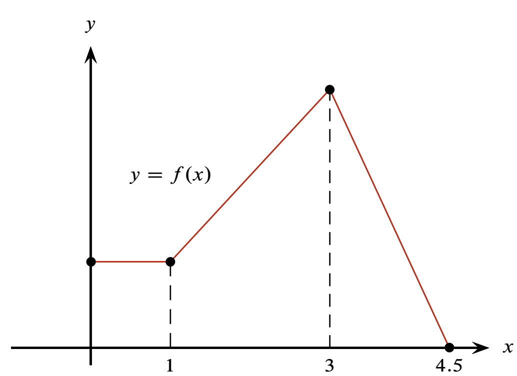
$$A(R) = (b-a)f(a) + \frac{1}{2}(b-a)[f(b) - f(a)] =$$
$$= \frac{1}{2}(b-a)[f(a) + f(b)].$$

2. Un caso más en el que se puede calcular $A(R)$ con relativa facilidad es cuando la función $f(x)$ es lineal por tramos, es decir, cuando hay un conjunto finito de puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ de modo tal que en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ la función $f(x)$ es constante o lineal. En tales casos, calcular el área $A(R)$ se reduce a calcular el área correspondiente a cada subintervalo como en el caso anterior y sumar dichas áreas.

Ejemplo 1.3.1 *Sea la función $f(x)$ definida como sigue:*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \le x \le 1; \\ x, & \text{si } 1 < x \le 3; \\ 9 - 2x, & \text{si } 3 < x \le 4.5. \end{cases}$$

Calcular el área bajo la gráfica de $f(x)$, sobre el eje x en el intervalo $[0, 4.5]$.



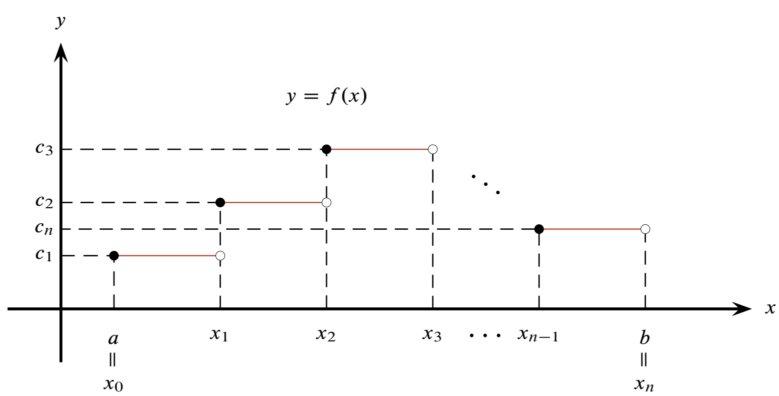
▼ Aquí $x_0 = 0 < x_1 = 1 < x_2 = 3 < x_3 = 4.5$, y, por ser $f(x)$ una función lineal por tramos, usando los resultados del caso 1. anterior, tenemos:

$$
\begin{aligned}
A(R) &= 1 \cdot (x_1 - x_0) + && \boxed{\text{Tramo } [x_0, x_1]}\\
&+ \frac{1}{2}(x_2 - x_1)[f(x_1) + f(x_2)] + && \boxed{\text{Tramo } [x_1, x_2]}\\
&+ \frac{1}{2}(x_3 - x_2)[f(x_2) + f(x_3)] = && \boxed{\text{Tramo } [x_2, x_3]}\\
&= 1 \cdot (1 - 0) + \frac{1}{2}(3 - 1)[1 + 3] + \frac{1}{2}(4.5 - 3)[3 + 0] = \\
&= 1 + 4 + \frac{1}{2}(1.5)(3) = 5 + \frac{1}{2}(4.5) = 5 + 2.25 = 7.25.
\end{aligned}
$$

□

3. Es posible resolver casos en los que la función no es continua, pero es constante por tramos. A estas funciones se les llama comúnmente funciones escalonadas. En general, una función escalonada tiene la forma siguiente: para un conjunto finito de puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, en donde $f(x) = c_i$ para $x_{i-1} < x < x_i$, con $i = 1, 2, \ldots, n,$ & $c_i \geq 0$.

Ejemplo 1.3.2 *Calcular el área bajo la gráfica de dicha función y sobre el eje x.*



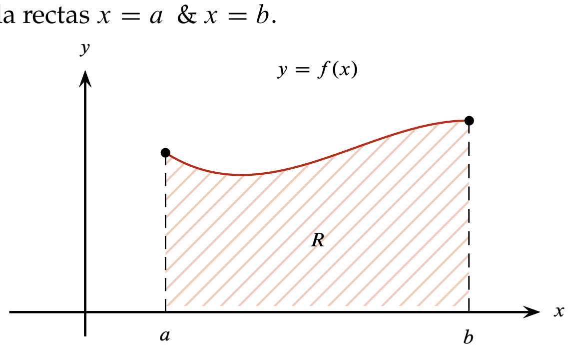
▼ Con los datos disponibles se puede calcular el área como sigue, de acuerdo con las observaciones previas:

$$
\begin{aligned}
A(R) &= c_1(x_1 - x_0) + c_2(x_2 - x_1) + c_3(x_3 - x_2) + \ldots + c_n(x_n - x_{n-1}) = \\
&= c_1\Delta x_1 + c_2\Delta x_2 + c_3\Delta x_3 + \ldots + c_n\Delta x_n,
\end{aligned}
$$

donde hemos denotado $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

□

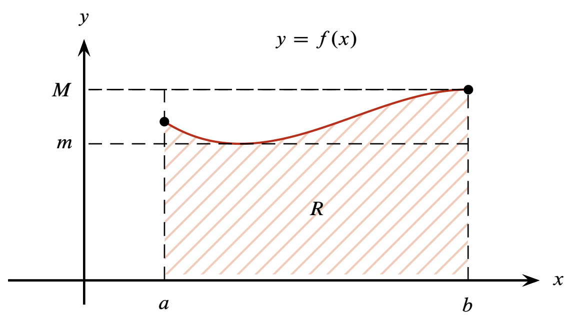
Volvamos al caso general del cálculo del área $A(R)$ de la región R limitada por la gráfica de una función continua $f(x) \geq 0$, el eje x, y la rectas $x = a$ & $x = b$.



Para una función f dada de manera arbitraria es imposible, con las herramientas de que disponemos, dar el valor exacto del área $A(R)$. Sin embargo es posible hacer algo respecto al problema.
Procederemos de la siguiente manera:

1. Relacionaremos nuestro problema con otro similar, pero más fácil de resolver.
2. Generaremos un procedimiento o criterio que nos permita obtener aproximaciones o estimaciones para $A(R)$.
3. Cada aproximación será acompañada de una estimación del error cometido.
4. Aplicaremos el nuevo procedimiento o criterio para obtener, cada vez, aproximaciones mejores y acompañadas de errores cada vez más pequeños.

- Primera aproximación.



Como el intervalo $[a, b]$ es cerrado y acotado, y la función $y = f(x)$ es continua, esta debe alcanzar sus valores mínimo y máximo en ese intervalo, denotémoslos por m y M respectivamente. Entonces el rectángulo menor con base $[a, b]$ y altura m queda comprendido totalmente dentro de la región R, y esta a su vez comprendida en el rectángulo mayor con la misma base y altura M. Entonces las áreas cumplen las desigualdades:

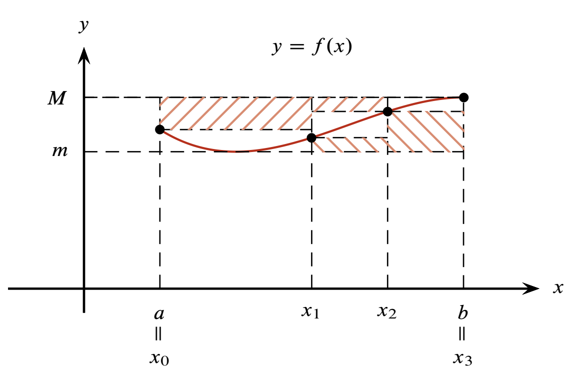
$$A(\text{rectángulo menor}) \leq A(R) \leq A(\text{rectángulo mayor}),$$

es decir,

$$m(b - a) \leq A(R) \leq M(b - a).$$

Tenemos que admitir que esta primera aproximación puede que no sea muy buena, así que debemos buscar alguna manera de mejorarla.

- Segunda aproximación. Si hacemos una subdivisión del intervalo original $[a, b]$ y repetimos la aproximación que acabamos de hacer en cada uno de los subintervalos, obtendremos al sumar las aproximaciones así realizadas, una desigualdad mejorada. Por ejemplo, en la siguiente figura hemos partido el intervalo original de la figura anterior en tres subintervalos al introducir $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 = b$.



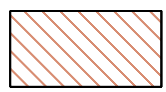
En cada subintervalo hay un valor mínimo y otro máximo de la función. Podemos denotar con m_1, M_1 (respectivamente) para el primer subintervalo $[x_0, x_1]$; con m_2, M_2 (respectivamente) para el segundo subintervalo $[x_1, x_2]$; y con m_3, M_3 (respectivamente) para el tercer subintervalo $[x_2, x_3]$. Si denotamos con R_1, R_2 & R_3 las porciones de R contenidas en el primero, segundo y tercer subintervalo, respectivamente, tendremos que, al igual que antes,

$$\begin{aligned} m_1(x_1 - x_0) &\le A(R_1) \le M_1(x_1 - x_0); \\ m_2(x_2 - x_1) &\le A(R_2) \le M_2(x_2 - x_1); \\ m_3(x_3 - x_2) &\le A(R_3) \le M_3(x_3 - x_2). \end{aligned}$$

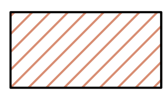
De esta forma al sumar las anteriores desigualdades resulta:

$$m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + m_3(x_3 - x_2) \le A(R) \le M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + M_3(x_3 - x_2),$$

ya que $A(R_1) + A(R_2) + A(R_3) = A(R)$. Esta última desigualdad es mejor que la que teníamos antes, pues la suma de las áreas de los rectángulos inferiores aumentó en las áreas de los rectángulos sombreados

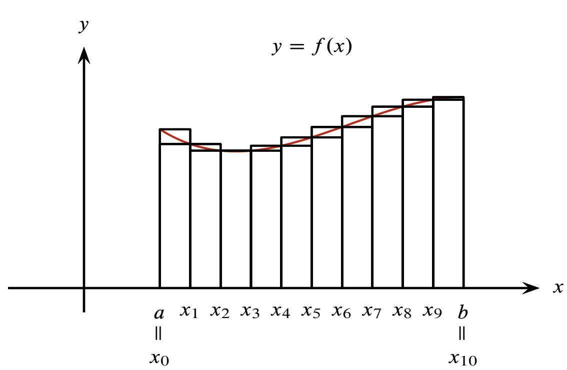


mientras que la suma de las áreas de los rectángulos superiores disminuyó en las áreas de los rectángulos sombreados



de manera que el valor real del área $A(R)$ se encuentra ahora entre dos números más cercanos uno del otro.

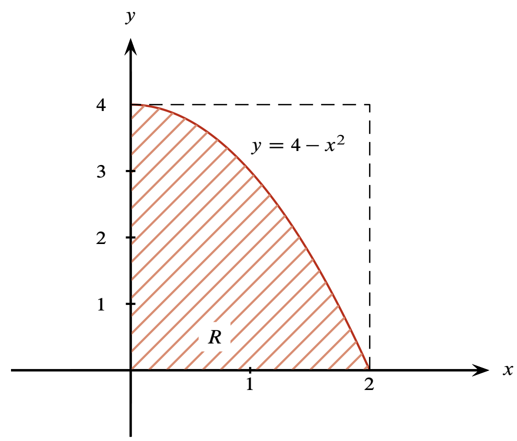
El procedimiento de aumentar el número de subintervalos puede repetirse a voluntad, y podemos así subdividir el rectángulo en 5, 10, 100 o 1 000 subintervalos y mientras más subintervalos haya debemos obtener mejores aproximaciones. La siguiente figura muestra cómo se vería una aproximación al partir el intervalo $[a, b]$ de la figura original en 10 subintervalos:



Se puede observar que la suma de áreas de los rectángulos inferiores (respectivamente superiores) nos da una mejor aproximación al valor de $A(R)$, pues los inferiores casi llenan la region R, y los superiores cubren a R con muy poco espacio de más. La diferencia entre los superiores y los inferiores es mucho menor que al principio, y es de esperarse que a medida que aumente el número n de subintervalos, o que $n \to \infty$, la suma de las áreas de rectángulos superiores e inferiores tiendan a ser iguales; pero como $A(R)$ está comprendida entre estas dos sumas, se espera que su valor sea igual al valor común de los límites.

Ejemplo 1.3.3 *Estimar el área debajo de la gráfica de* $f(x) = 4 - x^2$, *sobre el eje* x, *entre* $x = 0$ & $x = 2$, *con un error menor o igual a* 0.5 *unidades cuadradas.*

▼ El área a estimar es la que se muestra sombreada en la siguiente figura, en la que se puede apreciar que el máximo de la función en el intervalo $[0, 2]$ es $M = f(0) = 4$, y el mínimo es $m = f(2) = 0$.



De esta forma, la primera aproximación que tenemos es

$$0 \cdot (2 - 0) \le A(R) \le 4 \cdot (2 - 0),$$

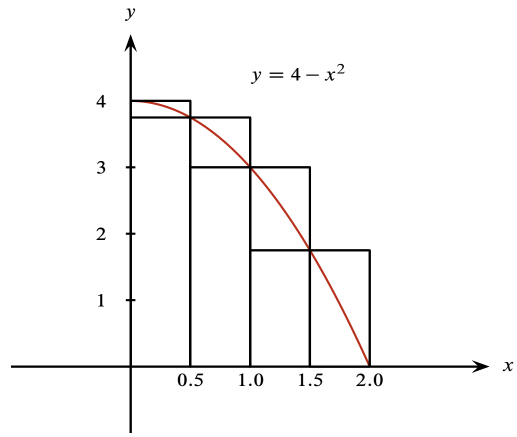
es decir, $0 \le A(R) \le 8$. La diferencia entre los dos extremos de estas desigualdades es tan grande que resulta evidente que el error de aproximación no es menor o igual a 0.5 unidades cuadradas.
Si hacemos un segundo intento tomando cuatro subintervalos de igual longitud podemos entonces tomar

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0.5,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1.5\ \ \&\ \ x_4 = 2.$$

Como puede observarse directamente [o también tomando la derivada $f'(x) = -2x < 0$ en el intervalo $(0, 2)$], la función $f(x)$ es decreciente así que en cada subintervalo su máximo es el valor de $f(x)$ en el extremo izquierdo y su mínimo el valor de $f(x)$ en el extremo derecho, por lo que dichos máximos y mínimos son como se muestra en la siguiente tabla:

Intervalo	Extremos	Valor mínimo m_i	Valor máximo M_i
1	$[0, 0.5]$	$m_1 = f(0.5) = 3.75$	$M_1 = f(0) = 4$
2	$[0.5, 1]$	$m_2 = f(1) = 3$	$M_2 = f(0.5) = 3.75$
3	$[1, 1.5]$	$m_3 = f(1.5) = 1.75$	$M_3 = f(1) = 3$
4	$[1.5, 2]$	$m_4 = f(2) = 0$	$M_4 = f(1.5) = 1.75$

La siguiente figura muestra los rectángulos que aproximan el área $A(R)$ por debajo y por encima, y a continuación están los cálculos de la suma de áreas de los rectángulos inferiores y superiores:



Suma de áreas de los rectángulos inferiores (suma inferior):

$$\begin{aligned} 3.75(0.5-0)+3(1-0.5)+1.75(1.5-1)+0(2-1.5) &= 0.5(3.75+3+1.75+0) = \\ &= 0.5(8.5) = 4.25\,. \end{aligned}$$

Suma de áreas de los rectángulos superiores (suma superior):

$$\begin{aligned} 4(0.5-0)+3.75(1-0.5)+3(1.5-1)+1.75(2-1.5) &= 0.5(4+3.75+3+1.75) = \\ &= 0.5(12.5) = 6.25\,. \end{aligned}$$

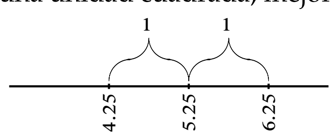
Por lo anterior:

$$4.25 \le A(R) \le 6.25.$$

Con esta segunda aproximación la diferencia entre las sumas inferior y superior disminuyó a 2 unidades cuadradas, y si diéramos como aproximación de $A(R)$, digamos

$$A(R) = \frac{4.25+6.25}{2} = \frac{10.5}{2} = 5.25 \text{ unidades cuadradas } (\text{u}^2)\,,$$

el error cometido sería menor o igual a una unidad cuadrada, mejorando la aproximación anterior pero aún no suficiente.



El siguiente intento de mejorar la aproximación lo haremos con 8 subintervalos de igual longitud: la elección de este número de subintervalos es arbitraria y se hace simplemente por facilidad. La siguiente tabla muestra los valores de los x_i, m_i, M_i.

Intervalo	Extremos	m_i	M_i
1	$[0, 0.25]$	$m_1 = f(0.25) = 3.9375$	$M_1 = f(0) = 4$
2	$[0.25, 0.5]$	$m_2 = f(0.5) = 3.75$	$M_2 = f(0.25) = 3.9375$
3	$[0.5, 0.75]$	$m_3 = f(0.75) = 3.4375$	$M_3 = f(0.5) = 3.75$
4	$[0.75, 1]$	$m_4 = f(1) = 3$	$M_4 = f(0.75) = 3.4375$
5	$[1, 1.25]$	$m_5 = f(1.25) = 2.4375$	$M_5 = f(1) = 3$
6	$[1.25, 1.5]$	$m_6 = f(1.5) = 1.75$	$M_6 = f(1.25) = 2.4375$
7	$[1.5, 1.75]$	$m_7 = f(1.75) = 0.9375$	$M_7 = f(1.5) = 1.75$
8	$[1.75, 2]$	$m_8 = f(2) = 0$	$M_8 = f(1.75) = 0.9375$
		suma $= 19.25$	SUMA $= 23.25$

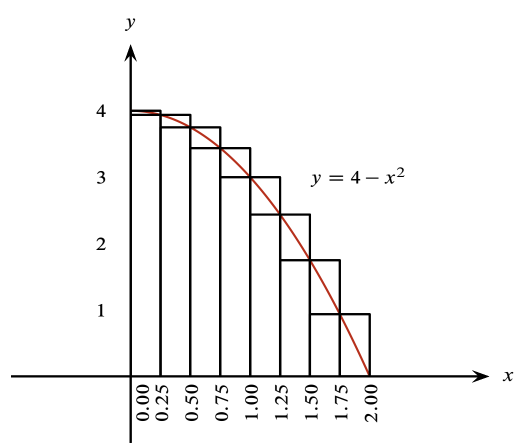
Las áreas inferior $A(\underline{R})$ y superior $A(\overline{R})$ se calculan multiplicando las sumas que aparecen en el renglón inferior por el valor $\Delta x = 0.25$, que es el ancho de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ para $i = 1, 2, \ldots, 8$, así obtenemos:

Suma inferior:

$$A(\underline{R}) = m_1\Delta x + m_2\Delta x + \ldots + m_8\Delta x = (m_1 + m_2 + \ldots + m_8)\Delta x =$$
$$= (\text{suma})\Delta x = 19.25(0.25) = 4.8125.$$

Suma superior:

$$A(\overline{R}) = M_1\Delta x + M_2\Delta x + \ldots + M_8\Delta x = (M_1 + M_2 + \ldots + M_8)\Delta x =$$
$$= (\text{SUMA})\Delta x = 23.25(0.25) = 5.8125.$$



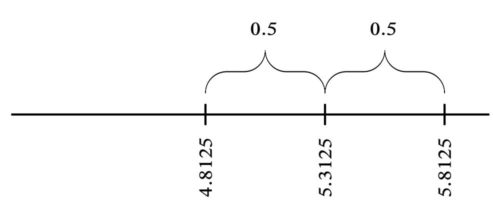
Así con esta aproximación hemos obtenido:

$$A(\underline{R}) = 4.8125 \le A(R) \le 5.8125 = A(\overline{R}).$$

Como $A(R)$ se encuentra entre 4.8125 y 5.8125, podríamos decir que

$$A(R) \approx \frac{A(\underline{R}) + A(\overline{R})}{2} = 5.3125 \text{ unidades al cuadrado } (\text{u}^2),$$

con un error menor o igual a 0.5 u^2.



Aunque no conocemos en este momento el valor de $A(R)$ sí sabemos que se encuentra dentro del intervalo [4.8125, 5.8125] y que su distancia al valor aproximado 5.3125, que es el punto medio del intervalo, debe ser menor o igual que la mitad del ancho del intervalo, así:

$$\text{error} \le \frac{1}{2}[5.8125 - 4.8125] = 0.5 \text{ u}^2.$$

$\square$

Este ejemplo muestra que, dada una función continua $f(x) \geq 0$ en un intervalo $[a, b]$, siempre podemos estimar el valor del área bajo la curva $y = f(x)$, sobre el eje x y entre las rectas $x = a$, $x = b$. La aproximación se puede mejorar introduciendo cada vez más puntos x_i para hacer que la partición del intervalo original en subintervalos sea cada vez más fina (lo cual implica que habrá un mayor número de subintervalos). No tenemos aún un criterio preciso que nos diga en cuántos subintervalos debemos partir el intervalo original para obtener una aproximación con un error menor que un valor dado de antemano, solamente sabemos que partiendo el intervalo original en un mayor número de subintervalos se tendrán estimaciones cada vez más precisas. En las secciones que siguen veremos cómo pasar de las aproximaciones al valor exacto de $A(R)$.

Ejercicios 1.3.1 *Cálculo aproximado del área.* *Soluciones en la página 11*

1. Estime el área bajo la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$, sobre el eje x para los siguientes intervalos usando particiones de $2, 4$ y 8 subintervalos.

   a. En el intervalo $[0, 4]$;

   b. En el intervalo $[0, 1]$;

   c. En el intervalo $[1, 4]$.

   ¿Se pueden usar las aproximaciones obtenidas en los dos últimos incisos para mejorar la aproximación en el primer inciso? Explique.

2. Aproximar el área $A(R)$ debajo de la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[\pi/2, \pi]$, calculando $A(\underline{R})$ y $A(\overline{R})$. Use una partición de 8 subintevalos y proporcione el valor del error que se comete.

3. Para la función $g(x) = \tan x$, encontrar la suma de Riemann que aproxima el área $A(R)$ bajo su gráfica y sobre el eje x, desde $x = \pi/4$ hasta $x = \pi/3$; use 8 subintervalos de igual longitud calculando $A(\underline{R})$ y $A(\overline{R})$. Proporcione el error que se comete.

4. De acuerdo con la geometría elemental, el área de un círculo es $A = \pi r^2$, donde r es su radio. Considere el área bajo la curva $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, sobre el eje x y entre $x = 0$, $x = 2$. Observe que la región en cuestión es la cuarta parte de un círculo de radio 2, comprendida en el primer cuadrante del plano cartesiano. ¿Cuál es el valor del área de esa región? Estime el valor del área partiendo el intervalo $[0, 2]$ en $2, 4$ y 8 subintervalos. Estime el error de aproximación en cada caso.

Ejercicios 1.3.1 *Cálculo aproximado del área.* *Preguntas, página 10*

1. a. $[0,4]$.
      i. 2 subintervalos.
         $A(\underline{R}) = 2.8284$; $A(\overline{R}) = 6.8284$; promedio $= 4.8284$; error ≤ 2.
      ii. 4 subintervalos.
         $A(\underline{R}) = 4.1463$; $A(\overline{R}) = 4.1463$; promedio $= 5.1463$; error ≤ 1.
      iii. 8 subintervalos.
         $A(\underline{R}) = 4.7650$; $A(\overline{R}) = 5.7650$; promedio $= 5.2650$; error ≤ 0.5.
   b. $[0,1]$.
      i. 2 subintervalos.
         $A(\underline{R}) = 0.3536$; $A(\overline{R}) = 0.8536$; promedio $= 0.6036$; error ≤ 0.25.
      ii. 4 subintervalos.
         $A(\underline{R}) = 0.5183$; $A(\overline{R}) = 0.7683$; promedio $= 0.6433$; error ≤ 0.125.
      iii. 8 subintervalos.
         $A(\underline{R}) = 0.5956$; $A(\overline{R}) = 0.7203$; promedio $= 0.6581$; error ≤ 0.0625.
   c. $[1,4]$.
      i. 2 subintervalos.
         $A(\underline{R}) = 3.8717$; $A(\overline{R}) = 5.3715$; promedio $= 4.6217$; error ≤ 0.75.
      ii. 4 subintervalos.
         $A(\underline{R}) = 4.2801$; $A(\overline{R}) = 5.03101$; promedio $= 4.6551$; error ≤ 0.375.
      iii. 8 subintervalos.
         $A(\underline{R}) = 4.4563$; $A(\overline{R}) = 4.8513$; promedio $= 4.6678$; error ≤ 0.1875.
   d. Si usamos los resultados de los intervalos $[0,1]$ y $[1,4]$ para 8 subintervalos, obtendremos una mejor aproximación, ya que se tendrían 16 subintervalos de $[0,4]$.
2. $A(\underline{R}) = 0.8986$; $A(\overline{R}) = 1.095$; promedio $= 0.9968$; error ≤ 0.0982.
3. $A(\underline{R}) = 0.3348$; $A(\overline{R}) = 0.3587$; promedio $= 0.3468$; error ≤ 0.006.
4. a. $[0,2]$.
      i. 2 subintervalos.
         $A(\underline{R}) = 1.7321$; $A(\overline{R}) = 3.7321$; promedio $= 2.7321$; error ≤ 1.
      ii. 4 subintervalos.
         $A(\underline{R}) = 2.4957$; $A(\overline{R}) = 3.4957$; promedio $= 2.9957$; error ≤ 0.5.
      iii. 8 subintervalos.
         $A(\underline{R}) = 2.8398$; $A(\overline{R}) = 3.3398$; promedio $= 3.0892$; error ≤ 0.25.