CAPÍTULO

1

La integral

1.2 Problemas que dan origen a la integral

Iniciamos con la presentación de la integral mostrando los problemas que motivaron su definición. Para mayor claridad en la exposición los presentamos en varias subsecciones; en la primera introducimos algunas nociones generales y en las siguientes tratamos los problemas.

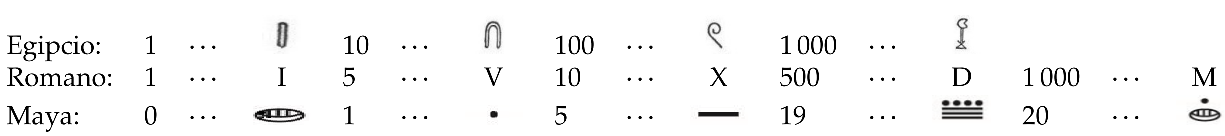
1.2.1 Conteo y medición

Desde que empezaron a surgir las primeras civilizaciones, el hombre ha tenido la necesidad de contar y medir diversos objetos para poder establecer intercambios económicos justos (o al menos equilibrados), realizar tareas de producción o elaborar obras que proporcionen alguna satisfacción estética (por ejemplo diseños artísticos, ejecuciones musicales, construcción de monumentos arquitectónicos, etcétera).

El proceso de contar está incluido en el medir y es un poco más sencillo. A pesar de esto, es de suponerse que llegar a tener claro este proceso debe haber costado varios miles de años de evolución a los primeros homínidos. La importancia de que se haya perfeccionado este proceso se puede apreciar con un simple ejemplo: imaginemos la diferencia entre ver llegar a un *homo sapiens* corriendo a su aldea gritando, “me siguen dos búfalos” (saquen las lanzas, arcos, flechas y matémoslos para comer) o, por el contrario, “me siguen cien búfalos” (¡corran a ponerse a salvo de la estampida!).

Con el tiempo, para contar y hacer operaciones se fueron refinando los sistemas numéricos dando notaciones especiales (símbolos) a los números. Dependiendo muchas veces de razones religiosas o culturales, los sistemas numéricos tuvieron diferentes bases y algunos se hicieron posicionales.

La siguiente figura muestra los sistemas numéricos de algunas culturas. Ciertos documentos históricos como el papiro de Ahmes (Egipto, siglo XIX aC) y la tablilla Plimpton 322 (Babilonia, cerca de 1800 aC) demuestran el grado de avance alcanzado en matemáticas.



1. canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017

Al avanzar en el manejo de los números y la escritura, se desarrollaron los algoritmos para realizar operaciones y la aritmética en general. Con esto surgieron los números naturales

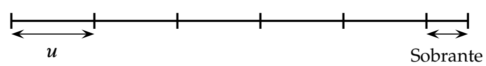
$$\mathbb{N} = \{\, 1, 2, 3, \ldots \}$$

y los enteros

$$\mathbb{Z} = \{\ldots\,, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}\,.$$

Se puede decir que con los números naturales se tiene todo lo necesario para contar, sin embargo los números negativos y el 0 (cero) de los enteros son necesarios para que en la suma tengamos el elemento neutro aditivo y los inversos aditivos.

Por otra parte el proceso de medir es más complicado. Se puede decir que medir es lo mismo que contar cuántas veces está contenida una unidad dada o patrón en lo que se desea medir. Por ejemplo, para medir la longitud de un lado de una mesa, se considera una unidad patrón (metro, pie, pulgada, centímetro ...) y se cuenta el número de veces que se encuentra contenida en la longitud mencionada. Muy pronto podemos ver que, este proceso de contar cuántas veces cabe la unidad dada, rara vez nos dará un valor exacto; con frecuencia nos sobrará algo después de poner un número entero de la unidad patrón, por ejemplo:



En esos casos, para hacer más precisa la medición tomamos subdivisiones de la unidad patrón, por ejemplo:

$$(\text{Metro} \;\rightarrow\; \text{decímetro} \;\rightarrow\; \text{centímetro} \;\rightarrow\; \text{milímetro})$$

y volvemos a contar con estas subdivisiones como un nuevo patrón. Este proceso puede repetirse de manera indefinida; surgen así los números racionales positivos, o fracciones positivas, y luego los números racionales, que es el conjunto:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{Z} \;\&\; n \neq 0 \right\},$$

el cual también puede ser definido como:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z} \;\&\; q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Con la ayuda de estos números podríamos determinar cuál es la longitud de casi cualquier cosa, de manera aproximada. Podríamos decir, por ejemplo, que la longitud del lado de una mesa es $\frac{6}{5}$ m, o equivalentemente 120 cm o 1 200 mm.
Los números racionales no se representan de manera única: todo numero racional se puede escribir de una infinidad de maneras distintas, por ejemplo:

$$\frac{6}{5} = \frac{12}{10} = \frac{24}{20} = \frac{120}{100} = \frac{1\,200}{1\,000} = \ldots$$

Aunado a esta propiedad está la frecuente dificultad que tiene mucha gente para operar con fracciones, pues olvidan que para sumar o restar dos números racionales deben tener el mismo denominador, por ejemplo:

$$\frac{6}{5} + \frac{3}{4} = \frac{24}{20} + \frac{15}{20} = \frac{39}{20}.$$

En la primera igualdad sustituimos las fracciones originales por fracciones equivalentes con el mismo denominador, mientras que en la segunda sólo sumamos los numeradores de las fracciones.
Para facilitar de alguna manera la escritura y operaciones con números racionales se usa la notación con punto decimal en la que, por ejemplo, 1.25 representa al número

$$1 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{125}{100} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}.$$

Cada dígito después del punto decimal se multiplica por una potencia negativa de 10, así por ejemplo:

$$3.8374 = 3 + 8 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-4},$$

que se podría escribir también como $\frac{38\,374}{10\,000}$ o bien como una fracción equivalente más simple; la fracción ideal se obtiene eliminando todos los factores comunes en el denominador y numerador. Es fácil operar con números en notación de punto decimal, pues los algoritmos para operaciones son prácticamente los mismos que con los números enteros, por esa razón mucha gente prefiere usar notación con punto decimal en vez de fracciones. Además es fácil convertir fracciones a decimales simplemente haciendo la división, por ejemplo $\frac{132}{8}$ se convierte así:

$$\begin{array}{r|l} & \;\;16.5 \\ \hline 8 & \;\;132.0 \\ & \;\;\;\;52 \\ & \;\;\;\;\;\;40 \\ & \;\;\;\;\;\;\;\;0 \end{array} \qquad \Rightarrow \frac{132}{8} = 16.5.$$

En este ejemplo la división termina al obtenerse el residuo 0. Sin embargo, es bien sabido que hay casos en los que la división nunca termina y podría prolongarse *ad infinitum*, por ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} & \;\;3.333\ldots \\ \hline 3 & \;\;10.000 \\ & \;\;\;\;10 \\ & \;\;\;\;\;\;10 \end{array} \qquad \Rightarrow \frac{10}{3} = 3.333\ldots$$

O también

$$\begin{array}{r|l} & \;\;0.428571\ldots \\ \hline 7 & \;\;3.000 \\ & \;\;\;20 \\ & \;\;\;\;\;60 \\ & \;\;\;\;\;\;\;40 \\ & \;\;\;\;\;\;\;\;\;50 \\ & \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;10 \\ & \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;3 \end{array} \qquad \Rightarrow \frac{3}{7} = 0.428571428571\ldots$$

Aunque estos ejemplos nos parezcan impactantes, sucede simplemente que la notación con punto decimal no puede representar todos los números racionales mediante expansiones con un numero finito de dígitos. De hecho, las fracciones representables con unos cuantos dígitos decimales son la excepción y no la regla. Más aún, ocurre que cualquier fracción al expresarse en forma decimal siempre tiene una expansión en la que uno o mas dígitos (agrupados en lo que se llama periodo) se repiten en el mismo orden hasta el infinito, como

$$\frac{132}{8} = 16.500\ldots, \quad \frac{32}{7} = 4.571428\ldots, \quad \frac{10}{3} = 3.333\ldots, \quad \frac{23}{9} = 2.555\ldots, \quad \frac{125}{999} = 0.125125125\ldots$$

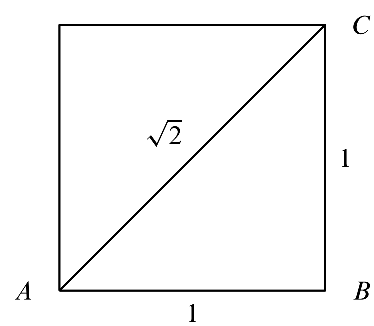
Por el momento deseamos observar que una breve reflexión nos lleva a ver que una fracción tan simple como $\frac{22}{7}$ tiene al expresarse como decimal, una expansión infinita:

$$\frac{22}{7} = 3.142857142857\ldots$$

donde los dígitos 142857 se repiten indefinidamente. ¿Cómo interpretar este hecho? Por lo regular no nos detenemos demasiado a pensar en cosas que no podemos descifrar completamente, en lugar de eso simplemente nos conformamos con aproximar un decimal infinito mediante uno que tenga solamente unos cuantos dígitos; lo expresamos así:

$$\frac{22}{7} \approx 3.142857, \quad \frac{10}{3} \approx 3.33, \quad \frac{23}{9} \approx 2.56 \quad \frac{125}{999} \approx 0.125\ldots, \text{ etc,}$$

donde $\approx$ significa aproximadamente igual.
Hacemos esta clase de aproximaciones basándonos en razones puramente prácticas: si en la solución de un problema el resultado fuese una longitud de $\frac{23}{9} = 2.555\ldots$, y quisiéramos marcar un segmento de línea de esa longitud usando una regla graduada, no tendríamos ningún problema, pues $2.555\ldots$ son 2 unidades, 5 decímetros, 5 centímetros, 5 milímetros, pero sería muy difícil ir más allá en exactitud (bien sabemos que la punta del más fino marcador o lápiz es mayor que 0.0005).
Sin embargo, si la longitud $\frac{23}{9}$ cm fuese necesario medirla con mayor precisión (si fuera parte de un aparato o mecanismo de alta precisión), seguramente haríamos un esfuerzo mayor para obtener esa precisión.
Otra problema que enfrentamos con los números racionales es que con ellos no es posible representar cualquier longitud.
Por ejemplo, si se tiene una mesa cuadrada de lado 1 m, entonces su diagonal mide $\sqrt{2}$.



Por Pitágoras:

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2;$

$\overline{AC} = \sqrt{2}.$

Desde el siglo III aC los matemáticos griegos de la escuela pitagórica descubrieron el número $\sqrt{2}$; este es la longitud de la diagonal anterior y no puede representarse como un número racional (cociente de dos enteros); lo mismo sucede con muchos otros más. Hoy en día sabemos que los números no expresables como cociente de enteros, llamados irracionales, son una infinidad mayor que la infinidad de números racionales. Si vemos la expansión decimal de un número racional A y otro irracional B, hay una forma de distinguirlos: ambas serían infinitas, pero en la expansión decimal de A debe haber un periodo (grupo de dígitos) que se repite hasta el infinito y en el irracional B nunca veríamos un periodo, lo cual no es fácil de afirmar.

Ejemplos:

1. $A = 35.783425783425783425\ldots$ es racional, ya que se repite el periodo $\widehat{783425}$.
2. $B = 2.10111213141516171819110111\ldots$ es irracional (sin periodo).
3. $\sqrt{2} = 1.4142135623731\ldots$ es irracional (sin periodo).
4. $\pi = 3.1415926535897931\ldots$ es irracional (sin periodo).
5. $\frac{58}{13} = 4.4615384646153846\ldots$ es racional, con periodo $\widehat{46153846}$.

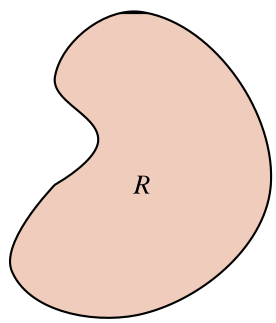
Finalmente, al considerar todos los números que pueden expresarse como una expansión decimal infinita (con o sin periodo) obtenemos los números reales:

$$\mathbb{R} = \left\{ a_0.a_1a_2a_3\ldots \,\middle|\, a_0 \text{ es un entero } \& \, a_i \text{ son dígitos para } i = 1, 2, 3, \ldots \right\}.$$

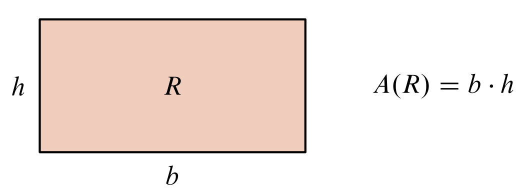
Cada número real tiene, como dice la definición anterior, una expansión decimal infinita; se puede pensar en aproximarlo mediante números con una sucesión finita de dígitos después del punto, digamos 8 o 16 dígitos. En ese caso estaremos manejando aproximaciones del valor exacto del número; mientras esto produzca números razonablemente válidos, obtendremos lo que necesitamos de nuestros cálculos, de lo contrario tendremos que aumentar la precisión según se necesite.
Es común afirmar en matemática que "podemos aproximar un valor tanto como se quiera", refiriéndonos a lo que sucede, en lo expresado anteriormente. Con mucha frecuencia en este texto estaremos analizando el tema de la aproximación y cómo mejorarla usando métodos matemáticos.

1.2.2 Medición de áreas

Lo explicado anteriormente sobre medición de longitudes podría parecer suficiente para medir cualquier clase de magnitud, pero es preferible dedicar algo de atención a las áreas, como lo haremos después con otras cantidades como volúmenes, longitud de curvas y otras más.
La medición de áreas ha sido importante desde la antigüedad, pues tuvo aplicación directa en la agricultura (área de terrenos, para determinar su valor o estimar la cosecha) y el comercio (las telas, producto de trabajo artesanal, tenían valor proporcional a su área; lo mismo las pieles curtidas de animales). ¿Qué es el área? ¿Cómo medir las áreas?
Para comenzar podemos decir que el área es una medida de la extensión de una región plana cerrada. Si R es una región, denotaremos su área por $A(R)$ y observamos que debe cumplir las siguientes propiedades:



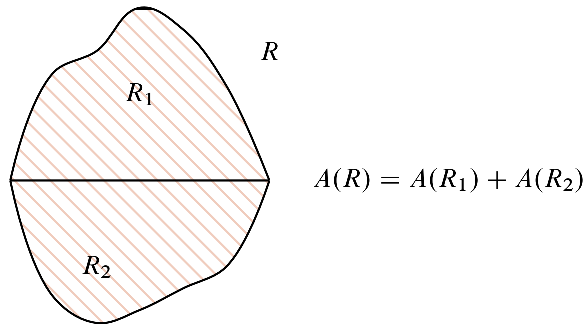
1. Positividad: $A(R) \geq 0$.
2. Aditividad: si R es la unión de dos o más regiones que no se traslapan, es decir:
$$R = R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_n,$$
entonces:
$$A(R) = A(R_1) + A(R_2) + \ldots + A(R_n).$$
3. Normalización: el área de un rectángulo R cuya base tiene longitud b, altura h, es
$$A(R) = b \cdot h \quad \text{(unidades cuadradas).}$$



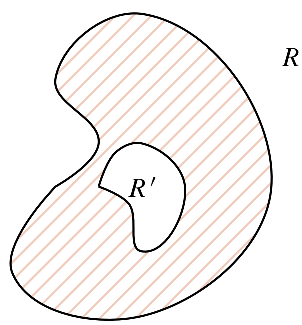
Es oportuno hacer algunos comentarios sobre estas propiedades:

1. Sobre la positividad, podemos decir que es lo que se espera de la medida de la extensión de una región: a los conjuntos muy pequeños como un punto, una línea (recta o curva) o colección finita de estos se les asigna un valor de área 0, lo que va de acuerdo con nuestra experiencia; por otro lado, como medida del tamaño o extensión de una región, es de esperarse que su valor sea positivo cuando no sea cero. Más adelante se podrá hablar de áreas con valor negativo, pero sólo como una convención para cumplir ciertos requisitos de orientación o signo.

2. La aditividad proviene del sentido común: una región R al seccionarse en partes tiene la misma área que la suma de las áreas de sus partes.



De aquí se desprende otra importante propiedad, llamada monotonía del área: Si R' es una región contenida en R, entonces $A(R') \leq A(R)$. Dicho de otra forma, regiones más grandes deben tener un área más grande.



Esto es así porque, como se muestra en la figura anterior, R sería entonces la unión de R' con su complemento en R, que es $R - R'$. Por consiguiente, $R = R' \cup (R - R')$ y, como esas regiones no se traslapan, entonces:

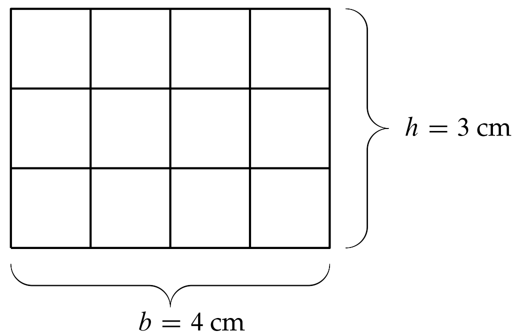
$$A(R) = A(R') + A(R - R'),$$

pero como $A(R - R') \geq 0$, al omitir este sumando en el lado derecho de la igualdad anterior obtenemos:

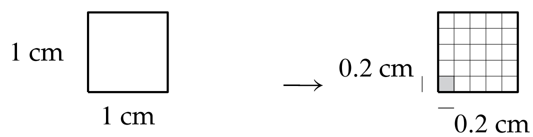
$$A(R) \geq A(R') \quad \text{o bien} \quad A(R') \leq A(R).$$

3. La normalización que utilizamos merece la pena comentarse. ¿Porqué definir el área de un rectángulo como se hace?

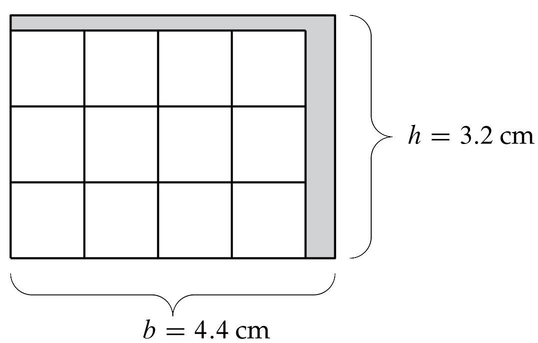
   La respuesta puede dejarnos ver algo sobre la consistencia de la matemática pues, como se dijo antes, medir es contar cuántas veces está contenida una unidad patrón en lo que se desea medir. Para medir áreas se utiliza como patrón un cuadrado que tenga por lado la unidad de longitud, y su área sea una "unidad cuadrada"; así por ejemplo, un rectángulo que tenga por base 4 cm y altura 3 cm, tendrá exactamente 12 cm^2 de área, como se puede ver contando los cuadrados unitarios de la figura siguiente:



Si la base y la altura de un rectángulo tienen longitudes que son múltiplos enteros de la unidad, vemos que su área será $A(R) = b \cdot h$. Para el caso de longitudes fraccionarias, se tendrá que dividir el cuadrado unitario que sirve de patrón y utilizar proporcionalidad para obtener el área correspondiente. Así, por ejemplo, para un rectángulo que tuviera base $b = 4.4$ cm y altura $h = 3.2$ cm, podríamos dividir cada lado del cuadrado unitario que usamos en la figura anterior en cinco partes iguales:

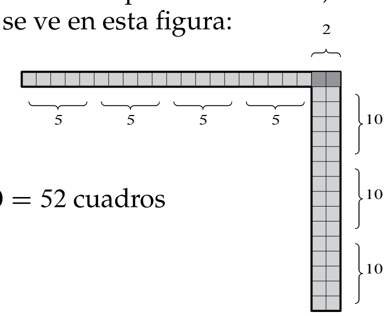


Ya hemos visto cuántas veces cabe el cuadrado unitario (de 1 cm de lado) en el rectángulo original; necesitamos ver ahora cuántas veces cabe el cuadrado de 0.2 cm de lado, en la región no cubierta anteriormente, como sigue:



El área del rectángulo R será la suma del área del rectángulo sin sombrear más el área de la parte sombreada (es decir, 12 cm^2 más el área de la parte sombreada). Para esta última podemos contar los cuadrados de 0.2 cm de lado como se ve en esta figura:

$$5 + 5 + 5 + 5 + 2 + 10 + 10 + 10 = 52 \text{ cuadros}$$



Así, el borde sombreado contiene 52 cuadros de 0.2 cm de lado; el área de cada uno de estos cuadritos es $\frac{1}{25} = 0.04$ del cm^2 que teníamos originalmente, de modo que la región sombreada tiene un área de $\frac{52}{25} = 2.08\ \text{cm}^2$, y el área total del rectángulo es entonces:

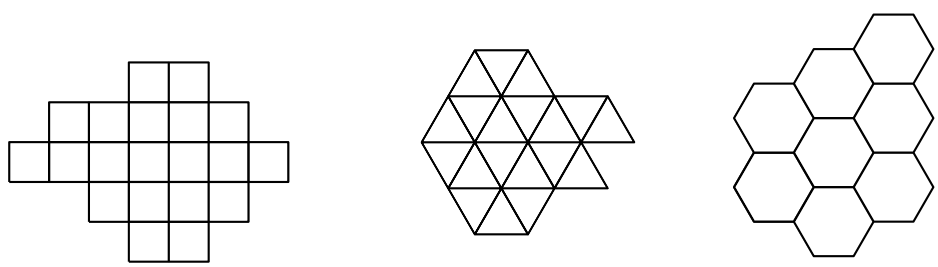
$$A(R) = 12 + 2.08 = 14.08\ \text{cm}^2.$$

Desde luego, el mismo resultado se obtiene cuando simplemente se multiplican la base por la altura: $A(R) = (4.4)(3.2) = 14.08\ \text{cm}^2$.

El argumento anterior se presentó para que el lector pueda apreciar la concordancia entre las ideas básicas del área de una región y lo que hacemos comúnmente para calcular áreas.

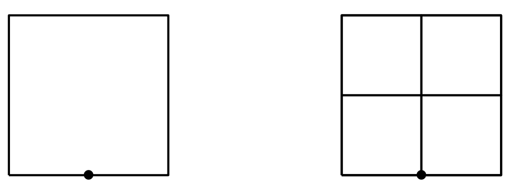
- ¿Porqué se utilizan unidades cuadradas? ¿Podrían emplearse unidades que no sean cuadradas?

Considerando polígonos regulares, además de utilizar cuadrados, podríamos utilizar otros dos tipos de figuras, a saber, triángulos equiláteros y hexágonos regulares, pues con cada una de estas tres figuras (del mismo tipo y tamaño) es posible cubrir el plano. Sin embargo por su facilidad o por tradición y costumbre, se utilizan como patrón los cuadrados y en tres dimensiones los cubos, en vez de triángulos y tetrahedros, respectivamente.



Con relación a los polígonos regulares mencionados (cuadrados, triángulos y hexágonos regulares), es importante lo siguiente:

⋆ En un cuadrado se pueden inscribir cuatro cuadrados de un mismo tamaño. El lado de estos tiene una longitud igual a la mitad de la longitud del lado del cuadrado original.



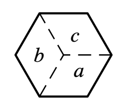
⋆ Se pueden inscribir nueve cuadrados de un mismo tamaño. El lado de estos tiene una longitud igual a la tercera parte de la longitud del lado del cuadrado original.

⋆ En un triángulo equilátero se pueden inscribir cuatro triángulos de un mismo tamaño. El lado de estos tiene una longitud igual a la mitad de la longitud del lado del triángulo original.

- En un triángulo equilátero se pueden inscribir nueve triángulos de un mismo tamaño. El lado de estos tiene una longitud igual a la tercera parte de la longitud del lado del triángulo original.

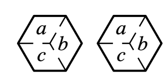
- En un hexágono se pueden inscribir cuatro hexágonos de un mismo tamaño. El lado de estos tiene una longitud igual a la mitad de la longitud del lado del hexágono original. De los cuatro hexágonos inscritos, uno está en partes.

El cuarto hexágono es



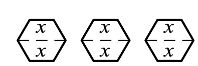
- Se pueden inscribir nueve hexágonos regulares de un mismo tamaño. El lado de estos tiene una longitud igual a la tercera parte de la longitud del lado del hexágono original. De los nueve hexágonos inscritos, dos están en partes.

Los hexágonos 8 y 9 se forman así:

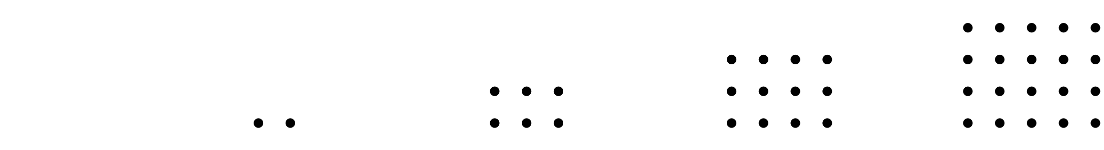


- También se pueden inscribir 16 hexágonos regulares de un mismo tamaño. El lado de estos tiene una longitud igual a la cuarta parte de la longitud del lado del hexágono regular. De los 16 hexágonos inscritos, tres están en partes.

Los hexágonos 14, 15 y 16 se forman así:



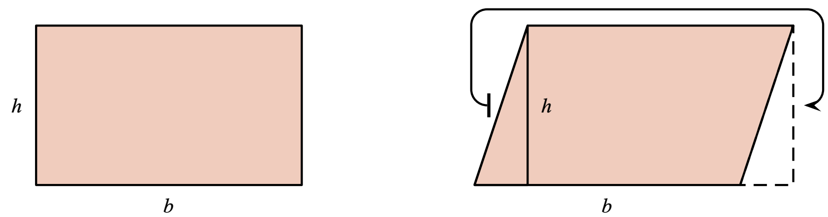
De lo anterior se puede apreciar que si se dividen los lados de las figuras originales en n partes, se forman n^2 figuras semejantes de menor tamaño. Los matemáticos de la escuela Pitagórica descubrieron que si colocamos puntos, de manera que su arreglo regular forme un cuadrado, obtenemos al contarlos, precisamente los *números cuadrados*.



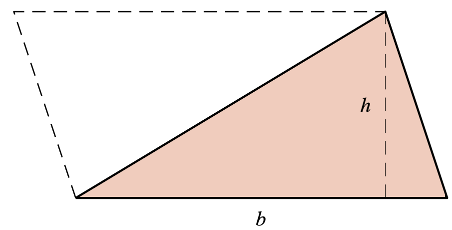
1 $\quad$ $4 = 2^2$ $\quad$ $9 = 3^2$ $\quad$ $16 = 4^2$ $\quad$ $25 = 5^2$

- Volviendo a nuestra discusión principal, podemos calcular el área de un rectángulo o de cualquier paralelogramo como el producto de la longitud de su base por su altura y la de un triángulo como la mitad de este producto.

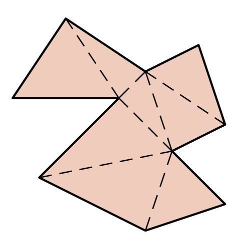
  Un rectángulo y un paralelogramo, ambos con igual base y altura tienen la misma área:



  El área de un triángulo mide la mitad del área de un paralelogramo con la misma base y altura:

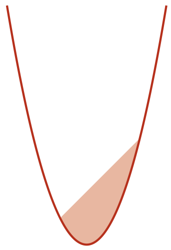


- Utilizando las propiedades enunciadas antes (positividad, aditividad y normalización) podemos calcular el área de cualquier polígono; la forma más simple de hacerlo es mediante triangulación, que consiste en subdividir el polígono en triángulos, de modo que la suma de las áreas de los triángulos sea igual al área del polígono:

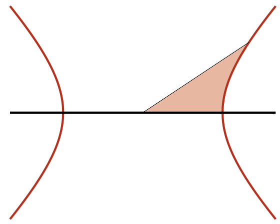


La triangulación es el método empleado comúnmente en topografía para el cálculo de áreas de terrenos con frontera poligonal. Si todas las figuras planas fueran poligonales (es decir, con una frontera compuesta de un número finito de segmentos rectilíneos), el problema del cálculo de áreas habría quedado resuelto desde hace dos mil años. Pero no es así, el problema empieza a complicarse justamente cuando deseamos conocer el valor del área de un círculo, una elipse, una región con un segmento parabólico o el valor del área de figuras con contornos curvos.

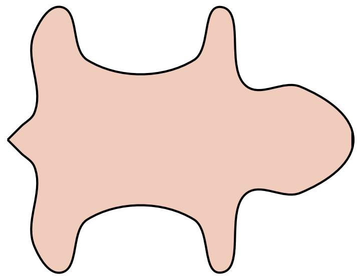
Círculo   Elipse



Segmento parabólico

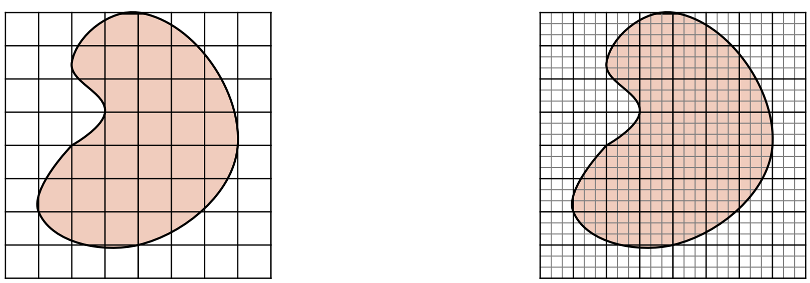


Un triángulo curvilíneo, dos lados rectos y el tercer lado es un arco de hipérbola



Forma aproximada de la piel de un animal

Con las ideas presentadas hasta el momento, la única forma que tenemos para calcular el área de figuras es mediante aproximaciones sucesivas, lo cual consiste en tomar la unidad patrón y acomodar tantas copias como sea posible, sin traslaparse, dentro de la región cuya área se desea calcular; a continuación tomar divisiones de la unidad patrón y colocar tantas de ellas como sea posible sin traslaparse en las partes que no han sido cubiertas de la región; continuar este proceso hasta tener una aproximación suficientemente satisfactoria del valor del área. La figura siguiente ilustra las primeras etapas de este proceso para aproximar el valor del área de una región cerrada cualquiera, como se hacía por ejemplo en la educación básica, con cuadrículas que se hacen cada vez más finas.



En las secciones 1.3 y siguientes, veremos cómo hacer el cálculo del área de una región de manera sistemática y así obtener resultados más precisos.

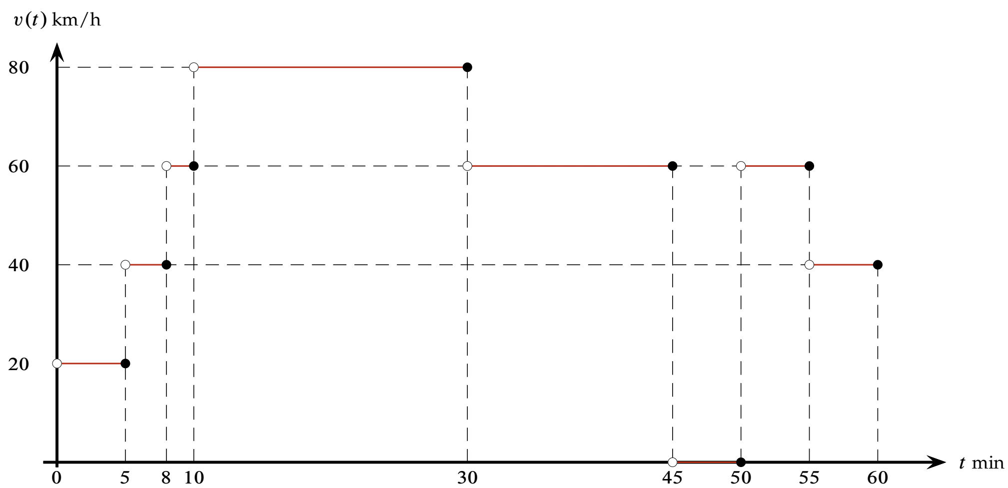
1.2.3 Medición de la distancia recorrida por un móvil

En esta subsección presentamos un problema que al parecer estaba presente en las investigaciones de Newton y lo condujeron a descubrir el teorema Fundamental del Cálculo.
Si un móvil viaja de tal manera que se conoce su velocidad instantánea $v(t)$ en cada instante t de un intervalo, ¿es posible determinar la distancia $s(t)$ que ha recorrido para cada instante t? En este caso suponemos que el movimiento ocurre en una sola dimensión; incluso podemos suponer que es una trayectoria recta.
Resolver completamente el problema anterior no es tarea fácil; en el proceso de solución se tendrá que pasar por una aproximación que dará una respuesta parcial y, al mejorar las aproximaciones seguidas por un proceso de límite, se llegará a la solución. Podemos considerar un caso particular más simple del problema al que sí daremos solución completa, para después indicar como resolver el caso general.

Ejemplo 1.2.1 *Supongamos que un automóvil viaja por un camino con velocidades constantes en cada intervalo de tiempo como se indica en la siguiente tabla (hay que admitir que esta es una suposición físicamente imposible, ya que la velocidad no puede cambiar abruptamente de un instante a otro pero sí modela la situación en que la velocidad representa la velocidad promedio en el intervalo de tiempo). Determinar la distancia recorrida en cada instante.*

Tiempo (min)	Velocidad (km/h)
$0 < t \leq 5$	20
$5 < t \leq 8$	40
$8 < t \leq 10$	60
$10 < t \leq 30$	80
$30 < t \leq 45$	60
$45 < t \leq 50$	0
$50 < t \leq 55$	60
$55 < t \leq 60$	40

▼ Con la información proporcionada en la tabla podemos graficar la velocidad en función del tiempo como sigue:



Esto se puede interpretar como un viaje corto en automóvil.

- Comenzando los primeros 5 minutos a una velocidad promedio de 20 km/h.
- Del minuto 5 al 8, a 40 km/h.
- Del minuto 8 al 10, a 60 km/h (tal vez porque se está dejando atrás el tráfico lento).
- Los siguientes 20 minutos (del 10 al 30), a una velocidad de 80 km/h.
- Después, de los minutos 30 al 45 se disminuye la velocidad a 60 km/h.
- Para detenerse por completo (digamos para cargar gasolina), del minuto 45 al 50.
- Luego de esa pausa el viaje continúa a 60 km/h, del minuto 50 al 55.
- Por último, a 40 km/h, del minuto 55 al 60.

Para calcular la distancia recorrida, tenemos que recordar que para una velocidad constante v, en un intervalo de tiempo t, la distancia recorrida d en ese intervalo satisface

$$d = vt.$$

Tenemos que tomar en cuenta las unidades correctas para hacer las operaciones, de modo que 20 km/h son $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ km/min; 40 km/h equivale a $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ km/min y así con las demás velocidades del automóvil. De esta manera, en los primeros 5 minutos, al viajar a $\frac{1}{3}$ km/min, el automóvil recorrió

$$d_1 = \left(\frac{1}{3}\right)(5) = \frac{5}{3} \text{ km}.$$

En los minutos 5 a 8 recorrió $d_2 = \left(\frac{2}{3}\right)(3) = 2$ km; de manera similar podemos calcular las distancias recorridas en los demás intervalos, como se muestra en la siguiente tabla.

Número de intervalo	Intervalo de tiempo	Duración del intervalo (minutos)	Velocidad (en km/min)	Distancia recorrida en el intervalo (en km)	Distancia recorrida (en km) acumulada desde el inicio
1	$0 < t \leq 5$	5	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$
2	$5 < t \leq 8$	3	$\frac{2}{3}$	2	$\frac{5}{3} + 2 = \frac{11}{3}$
3	$8 < t \leq 10$	2	1	2	$\frac{11}{3} + 2 = \frac{17}{3}$
4	$10 < t \leq 30$	20	$\frac{4}{3}$	$\frac{80}{3}$	$\frac{17}{3} + \frac{80}{3} = \frac{97}{3}$
5	$30 < t \leq 45$	15	1	15	$\frac{97}{3} + 15 = \frac{142}{3}$
6	$45 < t \leq 50$	5	0	0	$\frac{142}{3} + 0 = \frac{142}{3}$
7	$50 < t \leq 55$	5	1	5	$\frac{142}{3} + 5 = \frac{157}{3}$
8	$55 < t \leq 60$	5	$\frac{2}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{157}{3} + \frac{10}{3} = \frac{167}{3}$

Esta tabla casi se explica por sí misma; en la tercera columna está la duración en minutos de cada intervalo en el que el automóvil ha avanzado a velocidad constante; en la siguiente columna se encuentra la velocidad convertida a km/min; en la quinta columna, la distancia recorrida en el intervalo correspondiente, esta se obtiene en cada renglón al hacer el producto de las dos columnas que le preceden. La última columna muestra la distancia desde el inicio, así que la distancia que aparece en la entrada inferior derecha, muestra la distancia total recorrida, que es $\frac{167}{3} \approx 55.33$ km.

□

Si denotamos por $d_1, d_2, \ldots, d_8$ las distancias que se recorrieron en cada intervalo, por $v_1, v_2, \ldots, v_8$ las velocidades en cada intervalo y por $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_8$ la duración de cada intervalo, vemos claramente que la distancia total recorrida d cumple:

$$d = d_1 + d_2 + \ldots + d_8 = v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2 + \ldots + v_8 \Delta t_8 = \sum_{i=1}^{8} v_i \Delta t_i;$$

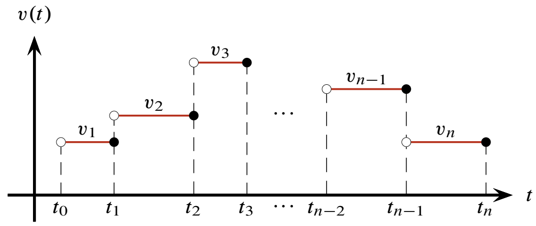
(donde la letra griega $\sum$ se utiliza para abreviar la suma de los 8 términos).
Al ver esta igualdad, se puede inferir lo siguiente: si se tuviese una sucesión de n intervalos de tiempo Δt_1, $\Delta t_2, \cdots, \Delta t_n$, en los que el móvil mantiene velocidades constantes $v_1, v_2, \cdots, v_n$, las distancias recorridas en cada uno de dichos intervalos serían:

$$d_1 = v_1 \Delta t_1, d_2 = v_2 \Delta t_2, \ldots, d_n = v_n \Delta t_n.$$

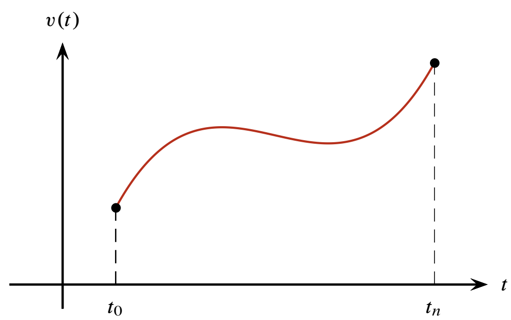
Luego, la distancia total recorrida sería

$$d = d_1 + d_2 + \ldots + d_n = v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2 + \ldots + v_n \Delta t_n = \sum_{i=1}^{n} v_i \Delta t_i.$$

(donde la letra griega $\sum$ se utiliza para abreviar la suma de los n términos).
Lo que gráficamente se vería de la siguiente forma:



donde $\Delta t_1 = t_1 - t_0$, $\Delta t_2 = t_2 - t_1$, $\Delta t_3 = t_3 - t_2, \ldots, \Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ son los intervalos de tiempo que pueden ser de igual o diferente tamaño.
Ahora bien, si la velocidad $v(t)$ del móvil variase continuamente con el tiempo en vez de ser constante en diferentes intervalos de tiempo ¿se podría calcular el valor de la distancia total recorrida a lo largo del tiempo $[t_0, t_n]$?



Indiscutiblemente que este problema es más complejo que los anteriormente mecionados. La complejidad se debe a que la velocidad $v(t)$ ya no es constante por intervalos de tiempo, lo que trae consigo que no podamos calcular la distancia recorrida en cada uno de dichos intervalos mediante la igualdad $d_k = v_k \Delta t_k$.
Sin embargo, en cada intervalo de tiempo Δt_k podríamos pensar en una velocidad constante $\hat{V}_k$ que fuese representativa de las velocidades $v(t)$ alcanzadas en dicho intervalo, algo así como una velocidad media en el intervalo.
Con esto se tendría que $\hat{V}_k \Delta t_k$ sería una aproximación de la distancia recorrida por el móvil en el intervalo Δt_k, es decir:

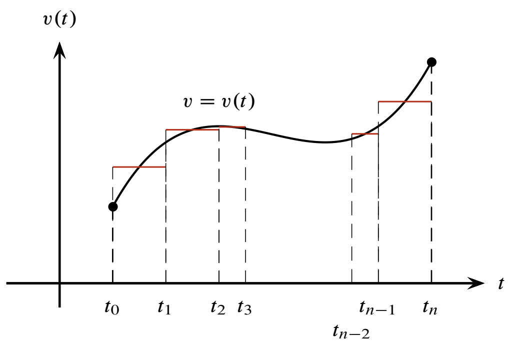
$$d_k \approx \hat{V}_k \Delta t_k \text{ para } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Estas aproximaciones en los intervalos nos llevaría a un valor aproximado para la distancia total d recorrida por el móvil desde $t = t_0$ hasta $t = t_n$.
Tal aproximación sería:

$$d \approx \hat{V}_1 \Delta t_1 + \hat{V}_2 \Delta t_2 + \ldots + \hat{V}_n \Delta t_n$$

o bien

$$d \approx \sum_{k=1}^{n} \hat{V}_k \, \Delta t_k \, .$$



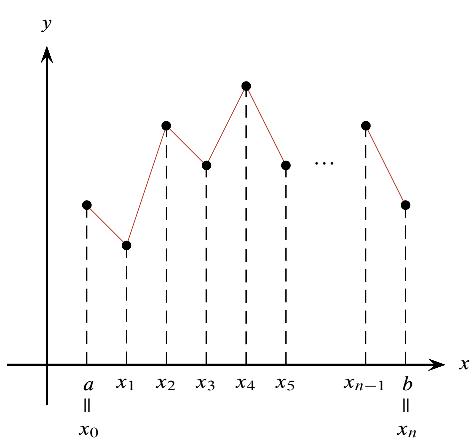
Ahora bien:
¿Cómo elegir la velocidad constante $\hat{V}_k$ para que sea representativa de $v(t)$ en el intervalo de tiempo Δt_k? Daremos respuesta a esta pregunta en las secciones siguientes, junto con las condiciones para que se pueda resolver este tipo de problemas.

1.2.4 Medición de la longitud de una curva

Presentamos ahora otro problema que guarda mucho parecido con el de la subsección anterior y se puede resolver de manera similar.
Dada una curva $\mathcal{C}$, que es la gráfica de una función continua $y = f(x)$ definida en un intervalo $[a, b]$, ¿cómo podemos medir su longitud en dicho intervalo? De nuevo, el problema no puede resolverse ahora en la forma general que está planteado. Sin embargo, podemos proponer un problema algo más simple.

Ejemplo 1.2.2 *Supongamos que la curva $\mathcal{C}$ es una poligonal que pasa por los puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots$, (x_n, y_n), donde $a = x_0$, $b = x_n$: determinar la longitud de la curva.*

▼ Con la suposición de que $\mathcal{C}$ es una poligonal, todo lo que hace falta es sumar las longitudes de los segmentos rectilíneos que la forman.



Para ello utilizamos la fórmula para la distancia entre dos puntos, conocida en geometría analítica:

$$\text{dist}\,[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

De esta forma, la longitud de la poligonal es

$$\text{Longitud } (\mathscr{C}) = \text{dist } [(x_0, y_0), (x_1, y_1)] + \text{dist } [(x_1, y_1), (x_2, y_2)] + \ldots + \text{dist } [(x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)] =$$
$$= \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \ldots + \sqrt{(x_n - x_{n-1})^2 + (y_n - y_{n-1})^2}\,.$$

La presencia de las raíces cuadradas en esta suma complica un poco las cosas (recuerde que la suma de raíces cuadradas no es lo mismo que la raíz cuadrada de la suma), pero algo se puede hacer para abreviar la suma anterior, si se utiliza la notación para sumas (que se explicará en una sección posterior).

$$\text{Longitud } (\mathscr{C}) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}\,.$$

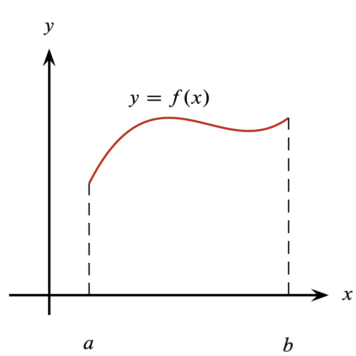
Además, ya que $x_k \neq x_{k-1}$ y por ende $x_k - x_{k-1} \neq 0$, podemos hacer la siguiente factorización en cada sumando:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 \cdot \left[1 + \frac{(y_k - y_{k-1})^2}{(x_k - x_{k-1})^2}\right]} = \\
&= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\right)^2} = \\
&= \sqrt{1 + (m_k)^2} \cdot (x_k - x_{k-1}),
\end{aligned}$$

en donde hemos denotado el cociente $\dfrac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}$ por m_k, puesto que es la pendiente del k–ésimo segmento de $\mathscr{C}$, que une a (x_{k-1}, y_{k-1}) con (x_k, y_k). También podríamos denotar $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, con lo que la ecuación para la longitud queda:

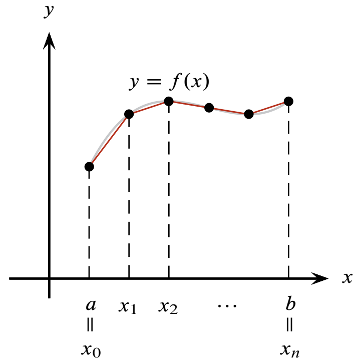
$$\text{Longitud } (\mathscr{C}) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + m_k^2}\; \Delta x_k. \tag{1.1}$$

La ecuación (1.1) nos permite calcular la longitud de cualquier poligonal (con la única restricción de que $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$), y podemos plantearnos calcular la longitud de curvas más generales, como la presentada en la siguiente figura, donde la curva $\mathscr{C}$ es la gráfica de una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$:



Con este ejemplo puede el lector obtener una aproximación, tomando puntos en la curva con abscisas $a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b$ para formar una poligonal cuya longitud en $[a, b]$ será menor o igual[2] que la longitud de la curva $\mathscr{C}$ en el mismo intervalo:

2. Porque la distancia entre dos puntos medida en línea recta es la más corta.



Así podemos concluir de manera intuitiva:

$$\text{Longitud } (\mathscr{C}) \geq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + m_k^2}\ \Delta x_k\ ,\ \text{ o bien }, \text{ Longitud } (\mathscr{C}) \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + m_k^2}\ \Delta x_k,$$

donde $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ y $m_k = \dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$.

Si usamos muy pocos puntos en la curva para formar la poligonal, la aproximación puede ser muy pobre, pero a medida que se aumenten puntos en la curva y, consecuentemente, segmentos de la poligonal, la precisión mejorará.

□

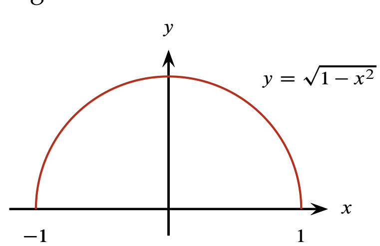
Usualmente se enseña en la escuela elemental que el perímetro de un círculo es el producto de 2π por el radio del mismo, y que π es aproximadamente 3.1416. ¿Cómo se llegó a ese resultado?

Perímetro = 2π

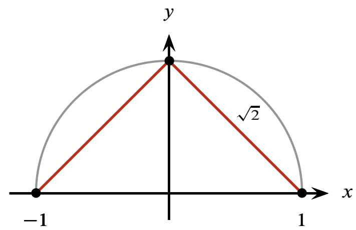
Perímetro = $2\pi r$

Ejemplo 1.2.3 *¿Cuánto vale π?*

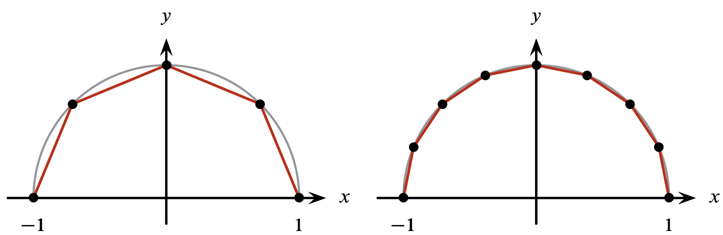
▼ La respuesta es en parte por proporcionalidad. Todos los círculos son figuras semejantes, así que si un círculo tiene radio 1 y otro radio r entonces, si el perímetro del primero es P, el del segundo debe ser $P \cdot r$, es decir, la proporción entre los radios de los círculos es la misma que debe haber entre sus perímetros, y solamente tendríamos que comprobar que el perímetro de un círculo de radio 1 es 2π, con $\pi = 3.1415926\ldots$ Además, bastaría con aproximar el valor de la longitud de media circunferencia unitaria y comprobar que este es aproximadamente π, como en la figura:



Para conocer el valor de π hay que aproximar la longitud de esta media circunferencia usando poligonales: si usamos una poligonal por los puntos extremos y el punto medio, obtendremos, como primera aproximación que $\pi \approx 2\sqrt{2} \approx 2.8284$.



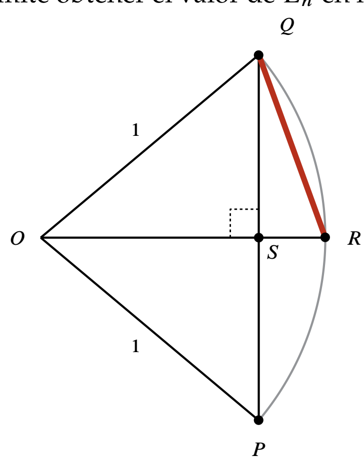
Esta es una aproximación deficiente, pero la podemos mejorar si añadimos los puntos medios de los arcos de círculo, obteniendo así una poligonal de cuatro segmentos, y podríamos después repetir el procedimiento duplicando cada vez el número de segmentos, como se muestra en la figura:



Obtendríamos así una sucesión de sumas (de los lados de las poligonales) que crece y se aproxima cada vez más al valor de la longitud de la semicircunferencia de radio 1 que llamamos π:

$$S_1 = 2\sqrt{2} = 2L_1, \quad S_2 = 4L_2, \quad S_3 = 8L_3, \quad \ldots, \quad S_n = 2^n L_n,$$

donde hemos denotado con $L_2, L_3, \ldots, L_n$ las longitudes de los segmentos poligonales y $L_1 = \sqrt{2}$. Un razonamiento geométrico nos permite obtener el valor de L_n en función del anterior L_{n-1}:



1. La cuerda $\overline{PQ}$ tiene longitud L_{n-1}.
2. R es el punto medio del arco $\widehat{PQ}$ (por lo que S es el punto medio de $\overline{PQ}$).
3. $\overline{OR}$ es ortogonal (perpendicular) a $\overline{PQ}$.
4. El triángulo rectángulo ΔOSQ con hipotenusa 1, tiene el lado $\left|\overline{QS}\right| = \dfrac{1}{2}L_{n-1}$.

Por lo anterior el lado $\overline{OS}$ medirá, de acuerdo con el teorema de Pitágoras:

$$\left|\overline{OS}\right| = \sqrt{1 - \left(\frac{L_{n-1}}{2}\right)^2}.$$

Por otro lado, en el triángulo rectángulo ΔSRQ tenemos:

$$|\overline{QS}| = \frac{L_{n-1}}{2}; \quad |\overline{SR}| = 1 - |\overline{OS}| = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{L_{n-1}}{2}\right)^2}$$

y la hipotenusa QR, que es L_n satisface, según el teorema de Pitágoras, $|\overline{QR}|^2 = |\overline{QS}|^2 + |\overline{SR}|^2$, es decir,

$$\begin{aligned} L_n^2 &= \left(\frac{L_{n-1}}{2}\right)^2 + \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{L_{n-1}}{2}\right)^2}\right]^2 = \cancel{\frac{(L_{n-1})^2}{4}} + 1 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{L_{n-1}}{2}\right)^2} + 1 - \cancel{\left(\frac{L_{n-1}}{2}\right)^2} = \\ &= 2 - 2\sqrt{1 - \frac{L_{n-1}^2}{4}} = 2 - \sqrt{4 - L_{n-1}^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow L_n &= \sqrt{2 - \sqrt{4 - L_{n-1}^2}}. \end{aligned}$$

De lo anterior, dado que $L_1 = \sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} L_2 &= \sqrt{2 - \sqrt{4 - L_1^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}; \\ L_3 &= \sqrt{2 - \sqrt{4 - L_2^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (2 - \sqrt{2})}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}; \\ L_4 &= \sqrt{2 - \sqrt{4 - L_3^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}})}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}. \end{aligned}$$

Por lo que, las longitudes de las poligonales obtenidas (en cada partición) son

$$\begin{aligned} S_1 &= 2\sqrt{2} = 2.8284\ldots; \\ S_2 &= 4\sqrt{2 - \sqrt{2}} = 3.0614\ldots; \\ S_3 &= 8\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} = 3.1214\ldots; \\ S_4 &= 16\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} = 3.1365\ldots \end{aligned}$$

Continuando de esta manera es posible encontrar mejores aproximaciones del número $\pi = 3.1415926\ldots$, del cual se sabe hoy en día que es irracional y se han llegado a calcular, usando diversos métodos y modernas computadoras, alrededor de 2^{32} dígitos en la parte decimal.

□

Después de haber presentado los problemas y ejemplos anteriores, junto con sus soluciones o ideas para resolverlos, para cerrar esta sección nos gustaría resaltar algunas características comunes a todos ellos que son el germen del cálculo integral.
En los problemas presentados, cálculo de áreas, distancia recorrida a una velocidad variable conocida y longitud de curvas, hemos visto que resolver el problema en forma general puede ser muy complicado, sin embargo:

1. Todos ellos pueden resolverse en forma aproximada realizando algunas simplificaciones, que consisten básicamente en sustituir la curva original por otra que tiene un número finito de valores y está cercana a la curva original.

2. En todos los problemas el cálculo de la solución, nos conduce a aproximar por medio de sumas, en las cuales cada sumando es un producto del valor de una función por una cantidad pequeña (Δt_i o bien Δx_i), que puede ser considerada como un pequeño incremento de la variable independiente.

3. En cualquiera de los tres problemas, al hacer *más finos* los métodos de aproximación obtenemos resultados más cercanos al valor real buscado.

De eso trata precisamente el cálculo integral; describiremos con más precisión y detalle en las secciones siguientes el proceso que se aplica para resolver problemas como los discutidos en esta sección.

Más concretamente, presentamos en la siguiente sección cómo encontrar el área de una región bajo una curva que es la gráfica de una función; posteriormente introducimos las sumas que surgen del cálculo aproximado de áreas, llamadas sumas de Riemann, que nos permiten definir la integral de una función. El resto de este capítulo está dedicado al estudio de las propiedades de la integral junto con la relación que guarda con la derivada, así como algunas de sus aplicaciones.

Es posible que el lector haya leído o escuchado anteriormente alguna expresión como "la integral es lo contrario de la derivada". Los autores de este libro consideramos tal afirmación inapropiada, porque desorienta al estudiante, no informa con claridad en qué sentido es su significado y, lo que es aún peor, reduce la integral a una especie de apéndice de la derivada, lo cual es completamente inadecuado. Más adelante veremos cómo se debe precisar la afirmación mencionada para darle validez, hasta ese momento pedimos al lector que sea paciente y vea la presentación que hacemos de la integral sin pensar en derivadas.