CAPÍTULO

1

La integral

[1]

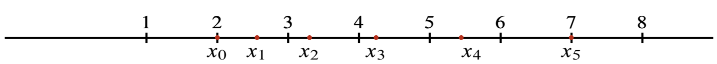
1.10 Apéndice

Ejemplo 1.10.1 *Consideremos la función $f(x) = x^5$. Encontrar la suma de Riemann que aproxima el área $A(R)$ bajo la gráfica, sobre el eje x, entre $x = a$ & $x = b$, con $0 < a < b$.*

▼ Para aproximar el área $A(R)$, la partición en subintervalos de igual longitud no es siempre la mejor opción. En este caso lo haremos de manera diferente, escogiendo como puntos de una partición en n subintervalos los siguientes:

$$x_0 = a, \quad x_1 = aq, \quad x_2 = aq^2, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = aq^{n-1}, \quad x_n = aq^n = b,$$

hemos abreviado $q = \sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}$. Como $0 < a < b$, tenemos $1 < \dfrac{b}{a}$ y también $1 < q < q^2 < \ldots < q^n$. Esta es una partición del intervalo $[a, b]$ y las distancias entre puntos consecutivos de la partición no son iguales, como se muestra en la figura siguiente $\left(a = 2,\ b = 7\,,\ q = \sqrt[5]{\dfrac{7}{2}}\right)$:



Los valores son

$$x_0 = a = 2,\ \ x_1 = aq = 2.57,\ \ x_2 = aq^2 = 3.3,\ \ x_3 = aq^3 = 4.24,\ \ x_4 = aq^4 = 5.47\ \ \&\ \ x_5 = aq^5 = 7.$$

1. canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017

Formamos la suma de Riemann para $f(x) = x^5$ correspondiente a esta partición, tomando $x_i^* = x_{i-1}$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n}(x_{i-1})^5(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(aq^{i-1})^5(aq^i - aq^{i-1}) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} a^5 q^{5(i-1)} \cdot a(q^i - q^{i-1}) = a^6 \sum_{i=1}^{n} q^{5(i-1)}[q^{i-1}(q-1)] = \\
&= a^6 \sum_{i=1}^{n} q^{6(i-1)}(q-1) = a^6(q-1)\sum_{j=0}^{n-1}(q^6)^j = \boxed{\begin{array}{l} q-1 \text{ no depende del índice;} \\ j = i-1, \text{ cambio del índice} \end{array}} \\
&= a^6(q-1)\frac{(q^6)^n - 1}{q^6 - 1} = a^6(q^{6n} - 1)\frac{q-1}{q^6-1} = \\
&= a^6[(q^n)^6 - 1]\frac{q-1}{q^6-1}.
\end{aligned}$$

Ahora, como $q^n = \dfrac{b}{a} \Rightarrow (q^n)^6 = \dfrac{b^6}{a^6}$, entonces:

$$a^6[(q^n)^6 - 1]\frac{q-1}{q^6-1} = a^6\left(\frac{b^6}{a^6} - 1\right)\frac{q-1}{q^6-1} = (b^6 - a^6)\frac{q-1}{q^6-1}.$$

Por último, una fórmula de suma es

$$\sum_{i=0}^{5} q^i = \frac{q^6 - 1}{q - 1} \Rightarrow 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 = \frac{q^6-1}{q-1}.$$

Por lo que

$$\frac{q-1}{q^6-1} = \frac{1}{1 + q + \ldots + q^5}.$$

El resultado final de la suma de Riemann es

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \frac{b^6 - a^6}{1 + q + q^2 + \ldots + q^5}.$$

Para terminar, si tomamos el límite cuando $n \to \infty$ de la expresión anterior, solo hay que notar que para cualquier n se tiene $q = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ y $\displaystyle\lim_{n\to\infty} q = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$. De esta forma,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b^6 - a^6}{1 + q + q^2 + \ldots + q^5} = \frac{b^6 - a^6}{6}.$$

Es decir:

$$\int_a^b x^5 \, \mathrm{d}x = \frac{b^6 - a^6}{6}.$$

□

En el ejemplo anterior con modificaciones menores podemos tratar de manera análoga el caso de cualquier función potencia $f(x) = x^p$ con exponente entero positivo. El camino seguido nos daría un resultado similar y, de esa forma, tomando la partición con intervalos desiguales

$$\left\{ x_i = aq^i \;\middle|\; i = 0, 1, 2, \ldots, n \right\}, \text{ donde } q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}},$$

se evita el tener que obtener fórmulas para las sumas del tipo $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^k$. Aunque tales fórmulas existen para todas las sumas de potencias de enteros positivos, son bastante complicadas en general.

El razonamiento para la suma de Riemann de $f(x) = x^p$ entre $x = a$ & $x = b$ $\left(\text{con } 0 < a < b \;\&\; q = \sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}\right)$ se desarrolla en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.10.2 *Consideremos la función $f(x) = x^p$. Encontrar la suma de Riemann que aproxima el área $A(R)$ bajo la gráfica, sobre el eje x, entre $x = a$ & $x = b$, con $0 < a < b$.*

▼

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n}(aq^{i-1})^p(aq^i - aq^{i-1}) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} a^p q^{(i-1)p} a q^{i-1}(q-1) = a^{p+1}(q-1)\sum_{i=1}^{n} q^{(i-1)p+(i-1)} = \\
&= a^{p+1}(q-1)\sum_{i=1}^{n} q^{(i-1)(p+1)} = a^{p+1}(q-1)\sum_{i=1}^{n}(q^{p+1})^{i-1} = \\
&= a^{p+1}(q-1)\sum_{j=0}^{n-1}(q^{p+1})^j = a^{p+1}(q-1)\frac{(q^{p+1})^n - 1}{q^{p+1}-1} = \\
&= a^{p+1}[(q^n)^{p+1} - 1]\frac{q-1}{q^{p+1}-1} = a^{p+1}\left(\frac{b^{p+1}}{a^{p+1}} - 1\right)\frac{q-1}{q^{p+1}-1},
\end{aligned}$$

puesto que $q^n = \dfrac{b}{a} \Rightarrow (q^n)^{p+1} = \dfrac{b^{p+1}}{a^{p+1}}$.

Como además $\sum_{j=0}^{p} q^j = \dfrac{q^{p+1}-1}{q-1}$:

$$\frac{q-1}{q^{p+1}-1} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{p} q^j} = \frac{1}{1 + q + q^2 + \ldots + q^p},$$

entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = (b^{p+1} - a^{p+1})\frac{q-1}{q^{p+1}-1} = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{1 + q + q^2 + \ldots + q^p}.$$

Por último, observando que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} q = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$, tendremos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) &= \lim_{n\to\infty}\frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{1 + q + q^2 + \ldots + q^p} = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{1 + 1 + 1^2 + \ldots + 1^p} = \\
&= \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\int_a^b x^p \, \mathrm{d}x = \frac{b^{p+1} - a^{p-1}}{p+1}.$$

□