ECUACIONES DIFERENCIALES
VARIACIÓN DE PARÁMETROS E0100

Utilizando el método de variación de parametros, calcular una solución particular y escribir la solución general de la edo.

(1)
$$x^2y'' - 4xy' + 6y = \frac{1}{x}$$
Dado que $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^3$ forman un conjunto fundamental de soluciones para la edo. (homogénea asociada):
$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$$

(2)
$$x^2y'' - xy' + y = 4x \ln x$$
Dado que $y_1 = x$ y $y_2 = x \ln x$ forman un conjunto fundamental de soluciones para la edo. (homogénea asociada):
$$x^2y'' - xy' + y = 0$$

(3)
$$y'' + y = \sec^2 x$$

(4)
$$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1 + e^x}$$

(5)
$$xy'' - (x + 1)y' + y = x^2e^{2x}$$
Dado que $y_1 = x + 1$ es solución de la edo. (homogénea asociada):
$$xy'' - (x + 1)y' + y = 0$$

(6)
$$x^2y'' + xy' + y = \sec(\ln x)$$
Dado que $y_1 = \sec(\ln x)$ es solución de la edo. (homogenea asociada):
$$x^2y'' + xy' + y = 0$$

canek.uam.mx: 21/ 4/ 2003.

Respuestas

Utilizando el método de variación de parametros, calcular una solución particular y escribir la solución general de la edo.

(1) Resolver:

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = \frac{1}{x}$$

Dado que $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^3$ forman un conjunto fundamental de soluciones para la edo. (homogénea asociada):

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$$

Sea $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ una solución particular.
Entonces:

$$y_p(x) = u_1x^2 + u_2x^3 \Rightarrow y_p' = u_1'x^2 + 2u_1x + u_2'x^3 + 3u_2x^2$$

Considerando que:

(A) $$u_1'x^2 + u_2'x^3 = 0$$

Entonces:

$$y_p' = 2u_1x + 3u_2x^2 \Rightarrow y_p'' = 2u_1'x + 2u_1 + 3u_2'x^2 + 6u_2x$$

Sustituyendo en

$$x^2y_p'' - 4xy_p' + 6y_p = \frac{1}{x}$$

Se obtiene:

$$x^2(2u_1'x + 2u_1 + 3u_2'x^2 + 6u_2x) - 4x(2u_1x + 3u_2x^2) + 6(u_1x^2 + u_2x^3) = \frac{1}{x}$$

$$2x^3u_1' + u_1(2x^2 - 8x^2 + 6x^2) + 3x^4u_2' + u_2(6x^3 - 12x^3 + 6x^3) = \frac{1}{x}$$

$$2x^3u_1' + 3x^4u_2' = \frac{1}{x}, \text{dividiendo por } x^2$$

(B) $$2xu_1' + 3x^2u_2' = \frac{1}{x^3}$$

Entonces u_1' y u_2' deben satisfacer el sistema formado por las ecuaciones (A) y (B)

$$\begin{cases} x^2u_1' + x^3u_2' = 0 \\ 2xu_1' + 3x^2u_2' = x^{-3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 + xu_2' = 0 \\ 2u_1' + 3xu_2' = x^{-4} \end{cases}$$

El determinante del sistema es

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & 3x \end{vmatrix} = 3x - 2x = x \Rightarrow \Delta_s = x$$

La solución del sistema es

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x \\ x^{-4} & 3x \end{vmatrix}}{\Delta_s} = \frac{-x^{-3}}{x} = -x^{-4} \Rightarrow u_1' = -x^{-4}$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & x^{-4} \end{vmatrix}}{\Delta_s} = \frac{x^{-4}}{x} = -x^{-5} \Rightarrow u_2' = -x^{-5}$$

De aquí que

$$u_1 = -\int x^{-4}\,dx = -\frac{x^{-3}}{-3} + c_1 = \frac{1}{3}x^{-3} + c_1$$

$$u_2 = \int x^{-5}\,dx = \frac{x^{-4}}{-4} + c_2 = -\frac{1}{4}x^{-4} + c_2$$

Tomando $u_1 = \dfrac{1}{3}x^{-3}$ y $u_2 = -\dfrac{1}{4}x^{-4}$ se tiene que, una solución particular es

$$y_p = u_1 x^2 + u_2 x^3 = \frac{1}{3}x^{-3}x^2 - \frac{1}{4}x^{-4}x^3 = \frac{1}{3}x^{-1} - \frac{1}{4}x^{-1}$$

$$y_p(x) = \frac{1}{12}x^{-1} = \frac{1}{12x}$$

Entonces la solución general, de la edo. dada, es

$$y = y_p(x) + k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x)$$

$$y = \frac{1}{12}x^{-1} + k_1 x^2 + k_2 x^3$$

(2) Resolver:

$$x^2 y'' - xy' + y = 4x \ln x$$

Dado que $y_1 = x$ y $y_2 = x \ln x$ forman un conjunto fundamental de soluciones para la edo. (homogénea asociada):

$$x^2 y'' - xy' + y = 0$$

Sea $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ una soluión particular
Entonces:

$$y_p = u_1 x + u_2 x \ln x \Rightarrow y_p' = u_1' x + u_1 + u_2' x \ln x + u_2(1 + \ln x)$$

Considerando que

(C) $$u_1' x + u_2' x \ln x = 0$$

Entonces

$$y_p' = u_1 + u_2(1 + \ln x) \Rightarrow y_p'' = u_1' + u_2'(1 + \ln x) + u_2\left(\frac{1}{x}\right)$$

Sustituyendo en

$$x^2y_p'' - xy_p' + y_p = 4x\ln x$$

Se obtiene

$$x^2\left[u_1' + u_2'(1+\ln x) + u_2\frac{1}{x}\right] - x[u_1 + u_2(1+\ln x)] + u_1x + u_2x\ln x = 4x\ln x$$
$$x^2u_1' + u_2'(x^2 + x^2\ln x) + u_2(x - x - x\ln x + x\ln x) + u_1(-x+x) = 4x\ln x$$
$$x^2u_1' + x^2(1+\ln x)u_2' = 4x\ln x$$

Dividiendo por x^2

$$u' + (1+\ln x)u_2' = \frac{4}{x}\ln x \tag{D}$$

Entonces u_1' y u_2' deben satisfacer el sistema conformado por las ecuaciones (C) y (D).

$$\begin{cases} xu_1' + (x\ln x)u_2' = 0 \\ u_1' + (1+\ln x)u_2' = 4x^{-1}\ln x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1' + (\ln x)u_2' = 0 \\ u_1' + (1+\ln x)u_2' = 4x^{-1}\ln x \end{cases}$$

El determinante del sistema es

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 1 & \ln x \\ 1 & 1+\ln x \end{vmatrix} = 1 + \ln x - \ln x = 1 \Rightarrow \Delta_s = 1$$

La solución del sistema es

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \ln x \\ 4x^{-1}\ln x & 1+\ln x \end{vmatrix}}{\Delta_s} = -4x^{-1}(\ln x)^2$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4x^{-1}\ln x \end{vmatrix}}{\Delta_s} = 4x^{-1}\ln x$$

De aquí que

$$u_1 = -4\int x^{-1}(\ln x)^2\,dx = -4\int (\ln x)^2\,\frac{dx}{x} = -\frac{4}{3}(\ln x)^3 + c_1$$

$$u_2 = 4\int x^{-1}\ln x\,dx = 4\int (\ln x)\,\frac{dx}{x} = 2(\ln x)^2 + c_2$$

Tomando $u_1 = -\frac{4}{3}(\ln x)^3$ y $u_2 = 2(\ln x)^2$ se tiene que, una solución particular es

$$y_p = u_1x + u_2x\ln x = -\frac{4}{3}(\ln x)^3x + 2(\ln x)^2x\ln x$$

$$y_p(x) = \frac{2}{3}x(\ln x)^3$$

Entonces la solución general es

$$y = y_p(x) + k_1y_1(x) + k_2y_2(x)$$

$$y = \frac{2}{3}x(\ln x)^3 + k_1 x + k_2 x \ln x$$

(3) Resolver:

$$y'' + y = \sec^2 x$$

Primero se obtiene un conjunto fundamental de soluciones para la edo. (homogénea asociada)

$$y'' + y = 0$$

Luego se aplica el método de variación de parámetros para determinar una solución particular.

$$y'' + y = 0$$

Proponiendo $y = e^{\mu x}$ se obtiene:

$$\mu^2 + 1 = 0 \Rightarrow \mu = \pm\sqrt{-1} = 0 \pm 1i$$

Entonces:

$$\begin{cases} y_1 = e^{0x} \operatorname{sen} 1x = \operatorname{sen} x \\ y_2 = e^{0x} \cos 1x = \cos x \end{cases}$$

Funciones que forman un conjunto fundamental de soluciones
Se propone como solución particular

$$y_p = u_1 \operatorname{sen} x + u_2 \cos x \Rightarrow y_p' = u_1' \operatorname{sen} x + u_1 \cos x + u_2' \cos x - u_2 \operatorname{sen} x$$

Considerando que:

(E) $$u_1' \operatorname{sen} x + u_2' \cos x = 0$$

Entonces

$$y_p' = u_1 \cos x - u_2 \operatorname{sen} x \Rightarrow y_p'' = u_1' \cos x - u_1 \operatorname{sen} x - u_2' \operatorname{sen} x - u_2 \cos x$$

Sustituyendo en

$$y_p'' + y_p = \sec^2 x, \text{ se obtiene}$$

$$(u_1' \cos x - u_1 \operatorname{sen} x - u_2' \operatorname{sen} x - u_2 \cos x) + (u_1 \operatorname{sen} x + u_2 \cos x) = \sec^2 x$$

(F) $$u_1' \cos x - u_2' \operatorname{sen} x = \sec^2 x$$

Entonces u_1' y u_2' deben satisfacer el sistema

$$\begin{cases} u_1' \operatorname{sen} x + u_2' \cos x = 0 \\ u_1' \cos x + u_2' \operatorname{sen} x = \sec^2 x \end{cases}$$

El determinante del sistema es

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ \cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix} = -\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = -1 \Rightarrow \Delta_s = -1$$

La solución del sistema es

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ \sec^2 x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix}}{\Delta_s} = \frac{-\sec^2 x \, \cos x}{-1} = \sec x$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & 0 \\ \cos x & \sec^2 x \end{vmatrix}}{\Delta_s} = \frac{\operatorname{sen} x \, \sec^2 x}{-1} = -\operatorname{sen} x \, \sec^2 x$$

De aquí que

$$u_1 = \int \sec x \, dx = \ln(\sec x + \tan x) + c_1$$

$$u_2 = -\int \operatorname{sen} x \, \sec^2 x \, dx = \int (\cos x)^{-2}(-\operatorname{sen} x) \, dx = \frac{(\cos x)^{-1}}{-1} + c_2$$

$$u_2 = -\sec x + c_2$$

Tomando $u_1 = \ln(\sec x + \tan x)$ y $u_2 = -\sec x$; se tiene que, una solución particular es

$$y_p = u_1 \operatorname{sen} x + u_2 \cos x$$

$$y_p = (\operatorname{sen} x) \ln(\operatorname{sen} x + \tan x) - (\sec x) \cos x$$

$$y_p = (\operatorname{sen} x) \ln(\sec x + \tan x) - 1$$

Entonces la solución general es

$$y = (\operatorname{sen} x) \ln(\sec x + tanx) - 1 + k_1 \operatorname{sen} x + k_2 \cos x$$

(4) Resolver:

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1 + e^x}$$

Primero se obtiene un conjunto fundamental de soluciones para la edo. (homogénea asociada)

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Luego se aplica variación de parámetros para determinar una solución particular.
Para resolver:

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Proponemos $y = e^{\mu x}$ y se obtiene:

$$\mu^2 - 3\mu + 2 = 0 \Rightarrow \mu_1 = 1, \ \mu_2 = 2, \ \text{entonces}$$

$$\begin{cases} y_1 = e^x \\ y_2 = e^{2x} \end{cases} \quad \text{funciones que forman un conjunto fundamental de soluciones}$$

Se propone como solución particular

$$y_p = u_1 e^x + u_2 e^{2x} \Rightarrow y_p' = u_1' e^x + u_1 e^x + u_2' e^{2x} + 2u_2 e^{2x}$$

Considerando que

$$u_1' e^x + u_2' e^{2x} = 0 \tag{G}$$

Entonces

$$y_p' = u_1 e^x + 2u_2 e^{2x} \Rightarrow y_p'' = u_1' e^x + u_1 e^x + 2u_2' e^{2x} + 4u_2 e^{2x}$$

Sustituyendo en

$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = \frac{e^{3x}}{1+e^x}, \text{ se obtiene}$$

$$(u_1' e^x + u_1 e^x + 2u_2' e^{2x} + 4u_2 e^{2x}) - 3(u_1 e^x + 2u_2 e^{2x}) + 2(u_1 e^x + u_2 e^{2x}) = \frac{e^{3x}}{1+e^x}$$

$$u_1' e^x + u_1 e^x (1 - 3 + 2) + 2u_2' e^{2x} + u_2 e^{2x}(4 - 6 + 2) = \frac{e^{3x}}{1+e^x}$$

$$u_1' e^x + 2u_2' e^{2x} = \frac{e^{3x}}{1+e^x} \tag{H}$$

Entonces u_1' y u_2' deben satisfacer el sistema

$$\begin{cases} e^x u_1' + e^{2x} u_2' = 0 \\ e^x u_1' + 2e^{2x} u_2' = \dfrac{e^{3x}}{1+e^x} \end{cases}$$

El determinante del sistema es

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x} - e^{3x} = e^{3x} \Rightarrow \Delta_s = e^{3x}$$

La solución del sistema es

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ \dfrac{e^{3x}}{1+e^x} & 2e^{2x} \end{vmatrix}}{\Delta_s} = \frac{-e^{2x}\, e^{3x}}{e^{3x}(1+e^x)} = -\frac{e^{2x}}{1+e^x}$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \dfrac{e^{3x}}{1+e^x} \end{vmatrix}}{\Delta_s} = \frac{e^x\, e^{3x}}{e^{3x}(1+e^x)} = \frac{e^x}{1+e^x}$$

De aquí que

$$u_1 = -\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\, dx$$

Utilizando el cambio de variable $t = 1 + e^x$

$$\begin{aligned} u_1 &= \ln(1+e^x) - (1+e^x) + c_1 \\ u_2 &= \int \frac{e^x}{1+e^x}\, dx = \ln(1+e^x) + c_2 \end{aligned}$$

Tomando $u_1 = \ln(1+e^x) - (1+e^x)$ y $u_2 = \ln(1+e^x)$
Se obtiene la solución particular

$$\begin{aligned} y_p &= u_1 e^x + u_2 e^x \\ &= [\ln(1+e^x) - (1+e^x)]e^x + [\ln(1+e^x)]e^{2x} \\ &= e^x \ln(1+e^x) + e^{2x}\ln(1+e^x) - e^x(1+e^x) \\ &= [e^x \ln(1+e^x)][1+e^x] - e^x(1+e^x) \\ y_p(x) &= e^x(1+e^x)[\ln(1+e^x) - 1] \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general es

$$\begin{aligned} y &= y_p(x) + k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) \\ y &= e^x(1+e^x)[\ln(1+e^x) - 1] + k_1 e^x + k_2 e^{2x}. \end{aligned}$$

(5) Resolver

$$xy'' - (x+1)y' + y = x^2 e^{2x}$$

Dado que $y_1 = x + 1$ es solución de la edo. (homogénea asociada):

$$xy'' - (x+1)y' + y = 0$$

Primero se obtiene otra solución y_2 (mediante reducción de orden) de la homogénea asociada y luego se aplica variación de parámetros para determinar una solución particular.

Para obtener y_2 se propone $y_2 = uy_1$.
Si $y_2 = (x+1)u \Rightarrow y_2' = (x+1)u' + u \Rightarrow y_2'' = (x+1)u'' + 2u'$
Sustituyendo en

$$xy_2'' - (x+1)y_2' + y_2 = 0$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned} x[(x+1)u'' + 2u'] - (x+1)[(x+1)u' + u] + (x+1)u &= 0 \\ x(x+1)u'' + [2x - (x+1)^2]u' + [-(x+1) + (x+1)]u &= 0 \end{aligned}$$

$$x(x+1)u'' - (x^2+1)u' = 0 \qquad \text{(I)}$$

Si

$$u' = w \Rightarrow u'' = \frac{dw}{dx}$$

Sustituyendo en (I) se tiene que

$$x(x+1)\frac{dw}{dx} - (x^2+1)w = 0$$

$$x(x+1)\frac{dw}{dx} = (x^2+1)w \Rightarrow \frac{dw}{w} = \frac{x^2+1}{x(x+1)}\,dx$$

$$\int \frac{dw}{w} = \int \frac{x^2+1}{x^2+x}\,dx \Rightarrow \ln w = \int \left[1 + \frac{-x+1}{x(x+1)}\right] dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln w = x + \int \frac{-x+1}{x(x+1)}\,dx$$

Integrando mediante fracciones parciales:

$$\begin{aligned}
\ln w &= x + \ln x - 2\ln(x+1) + c_1 \\
&= x + \ln x + \ln(x+1)^{-2} + \ln c_2 \\
\ln w &= x + \ln c_2 x(x+1)^{-2} \Rightarrow \\
w &= e^x c_2 x(x+1)^{-2}
\end{aligned}$$

Pero $w = u'$

$$u' = e^x c_2 x(x+1)^{-2} \Rightarrow u = c_2 \int x e^x (x+1)^{-2}\,dx$$

Integrando por partes:

$$\begin{aligned}
u &= c_2\left[-xe^x(x+1)^{-1} - \int -e^x\,dx\right] \\
u &= c_2[-xe^x(x+1)^{-1} + e^x] + c_3 \\
u &= c_2 e^x (x+1)^{-1} + c_3
\end{aligned}$$

Tomando $u = e^x(x+1)^{-1}$ se obtiene como la otra solución a

$$y_2 = (x+1)u = (x+1)e^x(x+1)^{-1} \Rightarrow y_2 = e^x$$

Ahora se aplica variación de parámetros proponiendo

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

Con $y_1 = x + 1$ y $y_2 = e_x$

$$y_p = (x+1)u_1 + e^x u_2 \Rightarrow y_p' = (x+1)u_1' + u_1 + e^x u_2' + e^x u_2$$

Considerando que

$$(x+1)u_1' + e^x u_2' = 0 \tag{J}$$

Se tiene:

$$y_p' = u_1 + e^x u_2 \Rightarrow y_p'' = u_1' + e^x u_2' + e^x u_2$$

Sustituyendo en

$$xy_p'' - (x+1)y_p' + y_p = x^2 e^{2x}$$

Se obtiene:

$$\begin{gathered} x[u_1' + e^x u_2' + e^x u_2] - (x+1)[u_1 + e^x u_2] + (x+1)u_1 + e^x u_2 = x^2 e^{2x} \\ xu_1' + xe^x u_2' + [xe^x - (x+1)e^x + e^x]u_2 + [-(x+1) + (x+1)]u_1 = x^2 e^{2x} \\ xu_1' + xe^x u_2' = x^2 e^{2x} \end{gathered}$$

Dividiendo por x

(L) $$u_1' + e^x u_2' = xe^{2x}$$

Entonces u_1' y u_2' deben satisfacer el sistema conformado por las ecuaciones (J) y (L).

$$\begin{cases} (x+1)u_1' + e^x u_2' = 0 \\ u_1' + e^x u_2' = xe^{2x} \end{cases}$$

El determinante del sistema es

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} x+1 & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} = (x+1)e^x - e^x = xe^x \Rightarrow \Delta_s = xe^x$$

La solución del sistema es

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^x \\ xe^{2x} & e^x \end{vmatrix}}{\Delta_s} = \frac{-xe^{3x}}{xe^x} = -e^{2x}$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} x+1 & 0 \\ 1 & xe^{2x} \end{vmatrix}}{\Delta_s} = \frac{(x+1)xe^{2x}}{xe^x} = (x+1)e^x$$

De aquí que

$$\begin{aligned} u_1 &= -\int e^{2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{2x} + c_4 \\ u_2 &= \int (x+1)e^x\,dx = xe^x + c_5 \end{aligned}$$

Tomando $u_1 = -\dfrac{1}{2}e^{2x}$ y $u_2 = xe^x$ se tiene que una solución particular es

$$\begin{aligned}
y_p &= (x+1)u_1 + e^x u_2 = -\frac{1}{2}(x+1)e^{2x} + e^x x e^x \\
&= \left[-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + x\right] e^{2x} = \frac{1}{2}(x-1)e^{2x} \\
y_p &= \frac{1}{2}(x-1)e^{2x}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general de la edo., dada, es

$$y = \frac{1}{2}(x-1)e^{2x} + k_1(x+1) + k_2 e^x$$

(6) Resolver

$$x^2 y'' + xy' + y = \sec(\ln x)$$

Dado que $y_1 = \sec(\ln x)$ es solución de la edo. (homogenea asociada)

$$x^2 y'' + xy' + y = 0$$

Primero se aplica el método de reducción de orden para determinar otra solución y_2 de la homogénea asociada y luego se obtiene una particular mediante variación de parámetros.

Para determinar y_2 se propone $y_2 = uy_1$

$$\begin{aligned}
&\text{Si } y_2 = u \operatorname{sen}(\ln x) \Rightarrow \\
&\quad y_2' = u' \operatorname{sen}(\ln x) + u x^{-1} \cos(\ln x) \Rightarrow \\
&\quad y_2'' = u'' \operatorname{sen}(\ln x) + 2u' x^{-1} \cos(\ln x) + u x^{-2}[-\cos(\ln x) - \operatorname{sen}(\ln x)]
\end{aligned}$$

Sustituyendo en

$$x^2 y_2'' + x y_2' + y_2 = 0$$

Se obtiene:

$$u'' x^2 \operatorname{sen}(\ln x) + u' x[2\cos(\ln x) + \operatorname{sen}(\ln x)] = 0$$

Dividiendo por $x^2 \operatorname{sen}(\ln x)$

$$u'' + u' \frac{1}{x}\left[2\frac{\cos(\ln x)}{\operatorname{sen}(\ln x)} + 1\right] = 0$$

Si

$$u' = w \Rightarrow u'' = \frac{dw}{dx}$$

Sustituyendo se tiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{dw}{dx} &= \left[-2\frac{\cos(\ln x)}{\operatorname{sen}(\ln x)}\,\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right] w \\
\int \frac{dw}{w} &= -2\int \frac{\cos(\ln x)}{\operatorname{sen}(\ln x)}\,\frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x} \\
\ln w &= -2\ln[\operatorname{sen}(\ln x)] - \ln x + c_1 \\
\ln w &= \ln[\operatorname{sen}(\ln x)]^{-2} + \ln x^{-1} + \ln c_2 \\
\ln w &= \ln c_2 x^{-1}[\operatorname{sen}(\ln x)]^{-2} \\
w &= c_2 x^{-1}[\operatorname{sen}(\ln x)]^{-2} = \frac{c_2}{x}\,\frac{1}{\operatorname{sen}^{\,2}(\ln x)} \\
w &= \frac{c_2}{x}\csc^2(\ln x)
\end{aligned}
$$

pero $w = u'$, entonces

$$u = c_2 \int \csc^2(\ln x)\,\frac{dx}{x} = -c_2\cot(\ln x) + c_3$$

tomando $u = \cot(\ln x)$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
y_2 &= [\cot(\ln x)]\operatorname{sen}(\ln x) = \frac{\cos(\ln x)}{\operatorname{sen}(\ln x)}\operatorname{sen}(\ln x) \\
y_2 &= \cos(\ln x)
\end{aligned}
$$

Ahora se aplica variación de parámetros, proponiendo

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

Con $y_1 = \operatorname{sen}(\ln x)$ y $y_2 = \cos(\ln x)$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
y_p &= u_1\operatorname{sen}(\ln x) + u_2\cos(\ln x) \Rightarrow \\
y_p' &= u_1'\operatorname{sen}(\ln x) + u_1 x^{-1}\cos(\ln x) + u_2'\cos(\ln x) - u_2 x^{-1}\operatorname{sen}(\ln x)
\end{aligned}
$$

Considerando que:

$$u_1\operatorname{sen}(\ln x) + u_2'\cos(\ln x) = 0 \tag{M}$$

Se tiene que:

$$
\begin{aligned}
y_p' &= u_1 x^{-1}\cos(\ln x) - u_2 x^{-1}\operatorname{sen}(\ln x) \Rightarrow \\
y_p'' &= u_1' x^{-1}\cos(\ln x) - u_1 x^{-2}[\operatorname{sen}(\ln x) + \cos(\ln x)] + \\
&\quad - u_2' x^{-1}\operatorname{sen}(\ln x) - u_2 x^{-2}[\cos(\ln x) - \operatorname{sen}(\ln x)]
\end{aligned}
$$

Sustituyendo en:

$$x^2 y_p'' + x y_p' + y_p = \sec(\ln x)$$

Se obtiene:

(N) $$u_1' x\cos(\ln x) - u_2' x\operatorname{sen}(\ln x) = \sec(\ln x)$$

Entonces u_1' y u_2' deben satisfacer el sistema conformado por las ecuaciones (M) y (N).

$$
\begin{cases}
u_1'\operatorname{sen}(\ln x) + u_2'\cos(\ln x) = 0 \\
u_1' x\cos(\ln x) - u_2' x\operatorname{sen}(\ln x) = \sec(\ln x)
\end{cases}
$$

El determinante del sistema es

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}(\ln x) & \cos(\ln x) \\ x\cos(\ln x) & -x\operatorname{sen}(\ln x) \end{vmatrix} = -x\operatorname{sen}^2(\ln x) - x\cos^2(\ln x) = -x[\operatorname{sen}^2(\ln x) + \cos^2(\ln x)] \Rightarrow \Delta_s = -x$$

La solución del sistema es

$$
\begin{aligned}
u_1' &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos(\ln x) \\ \sec(\ln x) & -x\operatorname{sen}(\ln x) \end{vmatrix}}{\Delta_s} = \frac{-\sec(\ln x)\cos(\ln x)}{-x} = \frac{1}{x} \\
u_2' &= \frac{\begin{vmatrix} \operatorname{sen}(\ln x) & 0 \\ x\cos(\ln x) & \sec(\ln x) \end{vmatrix}}{\Delta_s} = \frac{\operatorname{sen}(\ln x)\sec(\ln x)}{-x} = -\frac{1}{x}\,\frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{\cos(\ln x)}
\end{aligned}
$$

De aquí que

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \int \frac{dx}{x} = \ln x + c_4 \\
u_2 &= \int \frac{-\operatorname{sen}(\ln x)}{\cos(\ln x)}\,\frac{dx}{x} = \ln[\cos(\ln x)] + c_5
\end{aligned}
$$

Tomano $u_1 = \ln x$ y $u_2 = \ln[\cos(\ln x)]$ se tiene por solución particular a

$$
\begin{aligned}
y_p &= u_1 y_1 + u_2 y_2 \\
y_p &= (\ln x)\operatorname{sen}(\ln x) + \ln[\cos(\ln x)]\cos(\ln x) \\
y_p &= (\ln x)\operatorname{sen}(\ln x) + [\cos(\ln x)]\ln[\cos(\ln x)].
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$
\begin{aligned}
y &= y_p + k_1 y_1 + k_2 y_2 \\
y &= (\ln x)\operatorname{sen}(\ln x) + [\cos(\ln x)]\ln[\cos(\ln x)] + k_1 \operatorname{sen}(\ln x) + k_2 \cos(\ln x) \\
y &= [\ln x + k_1]\operatorname{sen}(\ln x) + (\ln[\cos(\ln x)] + k_2)\cos(\ln x).
\end{aligned}
$$