CAPÍTULO

7

Métodos numéricos

7.4 Método de Runge-Kutta

En las secciones previas se resolvió el PVI $y' = f(x, y)$, con $y(x_0) = y_0$ utilizando aproximaciones lineal y cuadrática de la solución $y(x)$. Observamos entonces que la aproximación cuadrática produce resultados con errores menores que la aproximación lineal. Esperamos obtener todavía mejores resultados, si aumentamos el grado del polinomio de aproximación. Cuando consideramos el polinomio de Taylor para $y(x)$ en $x = x_0$ de orden cuatro, obtenemos la denominada aproximación cuártica, que es

$$y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}y''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}y^{(3)}(x_0)(x - x_0)^3 + \frac{1}{4!}y^{(4)}(x_0)(x - x_0)^4.$$

El valor de $y(x)$ en $x = x_0 + h$ se aproxima entonces por el polinomio que denotaremos $\tilde{y}_4(x_0 + h)$:

$$y(x_0 + h) \approx \tilde{y}_4(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)h + \frac{1}{2!}y''(x_0)h^2 + \frac{1}{3!}y^{(3)}(x_0)h^3 + \frac{1}{4!}y^{(4)}(x_0)h^4.$$

En general, las cantidades $y(x_0 + h)$ & $\tilde{y}_4(x_0 + h)$ son diferentes. Al igual que en los casos previos, se produce un error absoluto EA de aproximación que se calcula tomando el valor absoluto de su diferencia, tal como como se hizo en las secciones anteriores.

Ejemplo 7.4.1 *Encuentre la aproximación cuártica de la solución $y(x)$ en $x = 0.1$ del PVI:*

$$y' = 2y, \quad \text{con} \quad y(0) = 1.$$

▼ Derivando 3 veces la ecuación diferencial con respecto a x tenemos:

$$y'' = 2y' = 2(2y) = 4y, \quad y^{(3)} = 2y'' = 2(4y) = 8y \quad \& \quad y^{(4)} = 2y^{(3)} = 2(8y) = 16y.$$

Evaluando en $x = 0$, y usando la condición inicial $y(0) = 1$, obtenemos:

1. canek.azc.uam.mx: 24/ 9/ 2010

$$y'(0) = 2y(0) = 2; \qquad y^{(3)}(0) = 2y''(0) = 2[4] = 8;$$
$$y''(0) = 2y'(0) = 2[2] = 4; \qquad y^{(4)}(0) = 16y(0) = 16,$$

Por lo cual la aproximación cuártica de la solución alrededor de $x_0 = 0$ está dada por:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_4(h) &= y(0) + y'(0)h + \frac{1}{2!}y''(0)h^2 + \frac{1}{3!}y^{(3)}(0)h^3 + \frac{1}{4!}y^{(4)}(0)h^4 = \\ &= 1 + 2h + 2h^2 + \frac{4}{3}h^3 + \frac{2}{3}h^4.\end{aligned}$$

Si aproximamos la solución en el punto $x = 0.1$, usando $h = 0.1$, tendremos:

$$\tilde{y}_4(0.1) = 1 + 2(0.1) + 2(0.1)^2 + \frac{4}{3}(0.1)^3 + \frac{2}{3}(0.1)^4 = 1.2214\,.$$

La solución analítica $y(x) = e^{2x}$ evaluada en $x = 0.1$ es $y_{\text{exacto}} = e^{0.2} \approx 1.2214$. Es decir, considerando sólo cuatro cifras significativas, la aproximación $\tilde{y}_4$ no tiene error.

□

Recordemos que en la aproximación lineal se requiere evaluar la función $f(x, y)$ en un punto y que la aproximación cuadrática es equivalente a promediar el valor de dicha función en dos puntos; se podría intuir entonces que la aproximación cuártica debe ser equivalente a hacer un valor ponderado del valor de la función $f(x, y)$ en cuatro puntos. Para apreciar esto consideramos en el PVI del ejemplo anterior las cantidades k_1, k_2, k_3 y k_4 definidas por

$$\begin{aligned}k_1 &= y'(x_0)h = f(x_0, y_0)h = 2y_0h;\\ k_2 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right)h = 2\left(y_0 + \frac{k_1}{2}\right)h = 2(y_0 + y_0h)h = 2y_0h + 2y_0h^2;\\ k_3 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right)h = 2\left(y_0 + \frac{k_2}{2}\right)h = 2(y_0 + y_0h + y_0h^2)h = 2y_0h + 2y_0h^2 + 2y_0h^3;\\ k_4 &= f\left(x_0 + h, y_0 + k_3\right)h = 2\left(y_0 + k_3\right)h = 2(y_0 + 2y_0h + 2y_0h^2 + 2y_0h^3)h = \\ &= 2y_0h + 4y_0h^2 + 4y_0h^3 + 4y_0h^4.\end{aligned}$$

Y como $y_0 = 1$, tenemos

$$k_1 = 2h; \qquad k_3 = 2h + 2h^2 + 2h^3;$$
$$k_2 = 2h + 2h^2; \qquad k_4 = 2h + 4h^2 + 4h^3 + 4h^4.$$

De donde resulta:

$$2h = k_1; \qquad 2h^3 = k_3 - k_2;$$
$$2h^2 = k_2 - k_1; \qquad 4h^4 = k_4 - 2k_3 + k_1.$$

Usando estos resultados en la aproximación polinomial de cuarto grado se tiene:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_4(h) &= 1 + 2h + 2h^2 + \frac{4}{3}h^3 + \frac{2}{3}h^4 = 1 + 2h + 2h^2 + \frac{2}{3}(2h^3) + \frac{1}{6}(4h^4) = \\ &= 1 + k_1 + (k_2 - k_1) + \frac{2}{3}(k_3 - k_2) + \frac{1}{6}(k_4 - 2k_3 + k_1) = 1 + k_2 + \frac{2}{3}(k_3 - k_2) + \frac{1}{6}(k_4 - 2k_3 + k_1) = \\ &= 1 + \frac{6k_2 + 4(k_3 - k_2) + (k_4 - 2k_3 + k_1)}{6} = 1 + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}.\end{aligned}$$

Es decir, evaluando la función $f(x, y)$ en cuatro puntos, es posible recuperar la aproximación cuártica de Taylor. Note que el término $\dfrac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$ es un promedio ponderado donde k_2 y k_3 tienen mayor importancia que k_1 y k_4.

Ejemplo 7.4.2 *Encuentre una aproximación cuártica de la solución del PVI*

$$y' = x - y, \qquad \text{con } y(1) = 2,$$

en el punto $x = 1.2$. Utilice redondeo a 5 cifras decimales en todos los cálculos. Muestre después que

$$\tilde{y}_4(h) = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

▼ De la ecuación diferencial tenemos, al derivar tres veces con respecto a x:

$$\begin{aligned} y'' &= 1 - y' = 1 - (x - y) = 1 - x + y; \\ y^{(3)} &= -y'' = -(1 - x + y) = -1 + x - y; \\ y^{(4)} &= -y^{(3)} = -(-1 + x - y) = 1 - x + y. \end{aligned}$$

Si usamos ahora la condición inicial $y(1) = 2$:

$$y'(1) = -1; \qquad y^{(3)}(1) = -2;$$
$$y''(1) = 2; \qquad y^{(4)}(1) = 2.$$

Por lo cual la aproximación cuártica de la solución alrededor de $x = 1$ está dada por

$$\tilde{y}_4(h) = y(1) + y'(1)h + \frac{1}{2!}y''(1)h^2 + \frac{1}{3!}y^{(3)}(1)h^3 + \frac{1}{4!}y^{(4)}(1)h^4 = 2 - h + h^2 - \frac{1}{3}h^3 + \frac{1}{12}h^4.$$

Usando $h = 0.2$, obtenemos la aproximación pedida

$$\tilde{y}_4(1.2) = 2 - 0.2 + (0.2)^2 - \frac{1}{3}(0.2)^3 + \frac{1}{12}(0.2)^4 = 1.83747\,.$$

La solución analítica es $y = x - 1 + 2e^{1-x}$ (véase ejemplo **??**) y evaluada en $x = 1.2$ produce:

$$y_{\text{exacto}} = 1.2 - 1 + 2e^{1-1.2} = 0.2 + 2e^{-0.2} \approx 1.83746\,;$$

se tiene una aproximación de cuatro cifras significativas exactas, en este caso el error porcentual es

$$\text{EP} = 100\left|\frac{y_{\text{exacto}} - \tilde{y}_4}{y_{\text{exacto}}}\right|\% = 100\left|\frac{1.83746 - 1.83747}{1.83746}\right|\% = 0.0005\%.$$

Mostremos ahora que esta aproximación cuártica es equivalente a un promedio ponderado de números k_1, k_2, k_3 y k_4 relacionados con la evaluación de la función $f(x, y) = x - y$ en cuatro puntos. En efecto, si definimos:

$$\begin{aligned} k_1 &= y'(x_0)h = f(x_0, y_0)h = f(1, 2)h = (1 - 2)h = -h; \\ k_2 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right)h = f\left(1 + \frac{h}{2}, 2 + \frac{-h}{2}\right)h = \left(1 + \frac{h}{2} - 2 + \frac{h}{2}\right)h = -h + h^2; \\ k_3 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right)h = f\left(1 + \frac{h}{2}, 2 + \frac{-h + h^2}{2}\right)h = \left(1 + \frac{h}{2} - 2 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{2}\right)h = -h + h^2 - \frac{h^3}{2}; \\ k_4 &= f(x_0 + h, y_0 + k_3)h = f\left(1 + h, 2 - h + h^2 - \frac{h^3}{2}\right)h = \left(1 + h - 2 + h - h^2 + \frac{h^3}{2}\right)h = \\ &= -h + 2h^2 - h^2 + \frac{h^4}{2}. \end{aligned}$$

De lo anterior resulta:

$$
\begin{aligned}
-h &= k_1;\\
h^2 &= k_2 + h = k_2 - k_1;\\
\frac{-h^3}{2} &= k_3 + h - h^2 = k_3 - k_1 - (k_2 - k_1) = k_3 - k_2;\\
\frac{h^4}{2} &= k_4 + h - 2h^2 + h^3 = k_4 - k_1 - 2k_2 + 2k_1 - 2k_3 + 2k_2 = k_4 - 2k_3 + k_1.
\end{aligned}
$$

Usando estos resultados en la aproximación polinomial de cuarto grado se tiene:

$$
\begin{aligned}
\tilde{y}_4(h) &= 2 - h + h^2 - \frac{1}{3}h^3 + \frac{1}{12}h^4 = 2 + k_1 + (k_2 - k_1) + \frac{2}{3}(k_3 - k_2) + \frac{1}{6}(k_4 - 2k_3 + k_1) =\\
&= 2 + \frac{6k_2 + 4(k_3 - k_2) + (k_4 - 2k_3 + k_1)}{6} = 2 + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}.
\end{aligned}
$$

Es decir, evaluando la función $f(x, y)$ en cuatro puntos es posible recuperar la aproximación cuártica de Taylor.

□

En los ejemplos previos surge de forma natural la pregunta ¿porqué se evaluó la función $f(x, y)$ en los puntos (x_0, y_0), $\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right)$, $\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right)$, $(x_0 + h, y_0 + k_3)$? Para responderla notemos que, si queremos aproximar el valor de la solución $y(x)$ en $x_1 = x_0 + h$, cuando sabemos su valor en x_0, debemos evaluar la función $f(x, y)$ en puntos (x, y) tales que las abscisas se encuentren ubicadas en el intervalo $[x_0, x_0 + h]$; por ejemplo en x_0, $x_0 + \alpha_1 h$, $x_0 + \alpha_2 h$, $x_0 + h$, donde α_1 y α_2 son números entre 0 y 1. Por otra parte, las ordenadas deben considerar las cantidades k_i, que son los cambios de la variable dependiente y, los cuales en general estan dados por:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_0, y_0)h; & k_3 &= f(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + \beta_2 k_2)h;\\
k_2 &= f(x_0 + \alpha_1 h, y_0 + \beta_1 k_1)h; & k_4 &= f(x_0 + h, y_0 + k_3)h.
\end{aligned}
$$

donde β_1 y β_2 también son números entre 0 y 1. En los ejercicios anteriores hemos seleccionado

$$
\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_2 = \beta_2 = \frac{1}{2}
$$

para facilitar los cálculos, aún cuando ésta no es la única posibilidad para mostrar que la aproximación cuártica es equivalente a evaluar la función $f(x, y)$ en cuatro puntos.

Ejemplo 7.4.3 *Encuentre una aproximación cuártica de la solución del PVI*

$$
y' = xy, \qquad \textit{con } y(2) = 4.
$$

Utilice esta aproximación para calcular $y(2.01)$. Use redondeo a 5 cifras decimales en todos los cálculos. Muestre después que:

$$
\tilde{y}_4(h) = y_0 + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right).
$$

▼ Si derivamos tres veces la ecuación diferencial con respecto a la variable x obtenemos:

$$
\begin{aligned}
y'' &= y + xy' = y + x^2 y;\\
y^{(3)} &= y' + 2xy + x^2 y' = 3xy + x^3 y;\\
y^{(4)} &= 3y + 3xy' + 3x^2 y + x^3 y' = 3y + 6x^2 y + x^4 y.
\end{aligned}
$$

Si usamos ahora la condición inicial $y(2) = 4$ resulta:

$$\begin{aligned} y'(2) &= 8; \\ y''(2) &= 20; \\ y^{(3)}(2) &= 56; \\ y^{(4)}(2) &= 172. \end{aligned}$$

Con estos resultados obtenemos la siguiente aproximación cuártica de la solución $y(x)$ alrededor del punto $x = 2$:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_4(h) &= y(2) + y'(2)h + \frac{1}{2!}y''(2)h^2 + \frac{1}{3!}y^{(3)}(2)h^3 + \frac{1}{4!}y^{(4)}(2)h^4 = \\ &= 4 + 8h + 10h^2 + \frac{28}{3}h^3 + \frac{43}{6}h^4. \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando $h = 0.01$, obtenemos una aproximación de $y(x)$ en $x = 2.01$:

$$\tilde{y}_4(2.01) = 4 + 8(0.01) + 10(0.01)^2 + \frac{28}{3}(0.01)^3 + \frac{43}{6}(0.01)^4 = 4.08101\,.$$

En este caso, la solución analítica está dada por $y = 4e^{-2+\frac{x^2}{2}}$ y su valor en $x = 2.01$ por

$$y_{\text{exacto}} = 4e^{-2+\frac{(2.01)^2}{2}} \approx 4.08101\,.$$

Nuestra aproximación $\tilde{y}_4$ reproduce 5 cifras decimales de la solución analítica y_{exacto}; en consecuencia, tiene un error porcentual del 0 por ciento.
Mostremos ahora como podemos reescribir esta aproximación de grado cuatro usando evaluaciones de la función $f(x, y) = xy$ en cuatro puntos. Consideremos, como en ejemplos previos, $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}$.
Definimos primero:

$$\begin{aligned} k_1 &= y'(2)h = f(2, 4)h = 8h; \\ k_2 &= f\left(2 + \frac{h}{2}, 4 + \frac{k_1}{2}\right)h = 2h^3 + 10h^2 + 8h; \\ k_3 &= f\left(2 + \frac{h}{2}, 4 + \frac{k_2}{2}\right)h = \frac{h^5}{2} + \frac{9h^4}{2} + 12h^3 + 10h^2 + 8h; \\ k_4 &= f\left(2 + h, 4 + k_3\right)h = \frac{h^7}{2} + \frac{11h^6}{2} + 21h^5 + 34h^4 + 28h^3 + 20h^2 + 8h. \end{aligned}$$

Necesitamos despejar h, h^2, h^3 y h^4 en términos de k_1, k_2, k_3 y k_4. Para ello despreciamos los términos con potencias de h superiores a 4 porque suponemos que h es pequeña. Obtenemos entonces:

$$\begin{aligned} k_1 &= 8h; \\ k_2 &= 2h^3 + 10h^2 + 8h; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= \frac{9h^4}{2} + 12h^3 + 10h^2 + 8h; \\ k_4 &= 34h^4 + 28h^3 + 20h^2 + 8h. \end{aligned}$$

De donde resulta:

$$\begin{aligned} \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} &= \frac{1}{6}\Bigg[8h + 2(2h^3 + 10h^2 + 8h) + 2\left(\frac{9h^4}{2} + 12h^3 + 10h^2 + 8h\right) + \\ &+34h^4 + 28h^3 + 20h^2 + 8h\Bigg] = 8h + 10h^2 + \frac{28}{3}h^3 + \frac{43}{6}h^4. \end{aligned}$$

Usando estos resultados en la aproximación polinomial de cuarto grado:

$$\tilde{y}_4(h) = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 4 + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6},$$

que es el resultado pedido.

□

El método presentado en esta sección produce aproximaciones a la solución de un PVI que mejoran significativamente los resultados obtenidos con los métodos de Euler y Euler mejorado, como se puede ver al comparar las aproximaciones de las secciones 7.2 y 7.3 y la presente, al resolver los mismos PVI. En general un problema asociado a un PVI consiste en aproximar $y(x_1)$ para un punto $x_1 \neq x_0$, donde y es la solución del PVI $y' = f(x, y)$, con $y(x_0) = y_0$. Una aproximación $\tilde{y}(x_1) \approx y(x_1)$ tendrá usualmente un error, que está en función de la distancia $|\, x_1 - x_0 \,|$, entre los puntos inicial y final. Para ello, al utilizar la fórmula de Taylor de orden n, con $h = x_1 - x_0$:

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_n(x_0; h),$$

donde el último término, que da el error de aproximación, será proporcional a h^{n+1}; así que si h es pequeño ($|\, h \,| << 1$), h^{n+1} será mucho más pequeño.
De aquí que, si se utilizan polinomios de Taylor de orden mayor, se esperaría obtener errores más pequeños, o sea, aproximaciones con mayor precisión. Sin embargo el esfuerzo computacional aumenta significativamente con el orden del polinomio de Taylor y no es muy recomendable.
Por otra parte, si $|\, x_1 - x_0 \,|$ no es lo suficientemente pequeña, la acción más recomendable sería subdividir el intervalo entre x_0 y x_1 en intervalos suficientemente pequeños de tamaño h haciendo aproximaciones en los puntos intermedios $x_0 + h$, $x_0 + 2h$, $\cdots$ utilizando alguno de los métodos presentados aquí e iterando el proceso hasta llegar a $x_1 = x_0 + Nh$, donde N es el número de subintervalos. Naturalmente, en cada paso de este proceso hay un error de aproximación y estos errores se irán acumulando en general. Por esta razón, es poco recomendable utilizar métodos numéricos para aproximar la solución de una ED en puntos muy lejanos al valor inicial.
Se presentan a continuación el método de Runge-Kutta, su seudocódigo, programación y ejemplos de aplicación.

- Método de Runge-Kutta (RK4)

  La solución numérica del PVI $y' = f(x, y)$, con $y(x_0) = y_0$ y con tamaño de paso h, está formada por los puntos(x_{i+1}, y_{i+1}) que se obtienen mediante las fórmulas de recurrencia:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h;\\ k_1 &= h\ f(x_i, y_i);\\ k_2 &= h\ f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2});\\ k_3 &= h\ f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2});\\ k_4 &= h\ f(x_i + h, y_i + k_3);\\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \end{aligned} \tag{7.1}$$

  con $i = 0, 1, 2, 3\ldots$ y los segmentos rectilíneos entre cada par de puntos consecutivos.

Ejemplo 7.4.4 *Use el método de Runge-Kutta RK4 para calcular $y(0.5)$ de la solución del problema de valor inicial $y' = 1 + x^2y^2$, con $y(0) = 1$ y considerando $h = 0.25$.*

▼ Como el tamaño de paso es $h = 0.25$, repetiremos el proceso RK4 2 veces. Usamos el método 7.1 con $i = 1$, para calcular k_1, k_2, k_3, k_4 & y_1; además consideremos $(x_0, y_0) = (0, 1)$ y $f(x, y) = 1 + x^2y^2$; con ello obtenemos:

$$k_1 = h\ f(x_0, y_0) = 0.25f(0,1) = 0.25(1) = 0.25;$$
$$k_2 = h\ f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = 0.25f(0.125, 1.125) = 0.2549;$$
$$k_3 = h\ f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = 0.25f(0.125, 1.1254) = 0.2549;$$
$$k_4 = h\ f\ (x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.25f(0.25, 1.255) = 0.2746;$$
$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1 + \frac{1}{6}(0.25 + 0.5098 + 0.51 + 0.2746) = 1.2574\,.$$

Repetimos el proceso 7.1 con $i = 2$ y obtenemos en este caso:

$$k_1 = h\ f(x_1, y_1) = 0.25f(0.25, 1.2574) = 0.2747;$$
$$k_2 = h\ f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1}{2}) = 0.25f(0.375, 1.3948) = 0.3184;$$
$$k_3 = h\ f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2}{2}\right) = 0.25f(0.375, 1.4166) = 0.3206;$$
$$k_4 = h\ f(x_1 + h, y_1 + k_3) = 0.25f(0.5, 1.578) = 0.4056;$$
$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1 + \frac{1}{6}(0.2747 + 0.6368 + 0.6412 + 0.8112) = 1.5838\,.$$

Es decir, $y_2 = 1.5838$ es una aproximación de $y(0.5)$.

□

Ejemplo 7.4.5 *Considere el PVI $y' = x + \frac{1}{y}$, con $y(1) = 2$. Utilice el método de RK4 para estimar $y(3)$; utilice $h = 1$.*

▼ Nuevamente repetiremos el proceso (7.1) 2 veces; tenemos en este caso:

$$k_1 = h\ f(x_0, y_0) = f(1,2) = 1.5;$$
$$k_2 = h\ f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = f(1.5, 2.75) = 1.8636;$$
$$k_3 = h\ f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = f(1.5, 2.9318) = 1.8411;$$
$$k_4 = h\ f(x_0 + h, y_0 + k_3) = f(2, 3.8411) = 2.2603;$$
$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 2 + \frac{1}{6}(1.5 + 3.7272 + 3.6822 + 2.2603) = 3.8616\,.$$

Repetimos otra vez el proceso, obtenemos ahora:

$$k_1 = h\ f(x_1, y_1) = f(2, 3.8616) = 2.259;$$
$$k_2 = h\ f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1}{2}\right) = f(2.5, 4.9911) = 2.7004;$$
$$k_3 = h\ f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2}{2}\right) = f(2.5, 5.2118) = 2.6919;$$
$$k_4 = h\ f(x_1 + h, y_1 + k_3) = f(3, 6.5535) = 3.1526;$$
$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 3.8616 + \frac{1}{6}[2.259 + (2)2.7004 + (2)2.6919 + 3.1526] = 6.561\,.$$

Concluimos que una aproximación numérica a $y(3)$ es $y_2 = 6.561$.

□

Ejemplo 7.4.6 *Considere el PVI $y' = x - y$, con $y(0) = 1$. Determine una solución numérica usando el método RK4 en el intervalo $[0, 1]$; utilice $h = 0.1$. Finalmente, compare los resultados con la solución analítica del PVI.*

▼ Ahora aplicaremos el método RK4 10 veces considerando cuatro cifras decimales. Para obtener y_1 procedemos como sigue:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= h\, f(x_0, y_0) = 0.1 f(0, 1) = -0.1;\\
k_2 &= h\, f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = 0.1 f(0.05, 0.95) = -0.09;\\
k_3 &= h\, f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = 0.1 f(0.05, 0.955) = -0.0905;\\
k_4 &= h\, f(x_0 + h, y_0 + k_3 t) = 0.1 f(0.1, 0.9095) = -0.081;\\
y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1 + \frac{1}{6}(-0.1 - 0.18 - 0.181 - 0.081) = 0.9097\,.
\end{aligned}
$$

Repetimos el proceso (7.1) para obtener y_2; tenemos entonces:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= h\, f(x_1, y_1) = 0.1 f(0.1, 0.9097) = -0.0810;\\
k_2 &= h\, f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1}{2}\right) = 0.1 f(0.15, 0.8692) = -0.0719;\\
k_3 &= h\, f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2}{2}\right) = 0.1 f(0.15, 0.8737) = -0.0724;\\
k_4 &= h\, f(x_1 + h, y_1 + k_3) = 0.1 f(0.2, 0.8373) = -0.0637;\\
y_2 &= y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.9097 + \frac{1}{6}[-0.0810 - 0.0719 + 2(-0.0724) + 2(-0.0637)] = 0.8375\,.
\end{aligned}
$$

Continuando el proceso, obtendremos los resultados que se muestran en la tabla siguiente donde además se han incluido los resultados exactos. Observe que el método los reproduce con mucha precisión.

x_i	$\tilde{y}_4$	k_1	k_2	k_3	k_4	y_{exacto}
0	1	-0.1	-0.09	-0.0905	-0.081	1
0.1	0.9097	-0.081	-0.0719	-0.0724	-0.0637	0.9097
0.2	0.8375	-0.0638	-0.0556	-0.056	-0.0481	0.8375
0.3	0.7816	-0.0482	-0.0408	-0.0411	-0.034	0.7816
0.4	0.7406	-0.0341	-0.0274	-0.0277	-0.0213	0.7406
0.5	0.713	-0.0213	-0.0152	-0.0155	-0.0098	0.7131
0.6	0.6976	-0.0098	-0.0043	-0.0045	0.0007	0.6976
0.7	0.6932	0.0007	0.0056	0.0054	0.0101	0.6932
0.8	0.6987	0.0101	0.0146	0.0144	0.0187	0.6987
0.9	0.7132	0.0187	0.0227	0.0225	0.0264	0.7131
1	0.7358					0.7358

□

En el método RK4, al igual que en los métodos de Euler y Euler mejorado, se pueden reducir los errores de aproximación y de propagación reduciendo el tamaño de paso h. Sin embargo, esto implica la evaluación de la función $f(x, y)$ en un mayor número de puntos y, en consecuencia, un mayor esfuerzo de cálculo, razón por la cual necesitamos nuevamente utilizar herramientas computacionales como Excel o bien Mathematica; los siguientes dos ejemplos muestran la implementación del pseudocódigo asociado al método RK4 en estos paquetes.

- Pseudocódigo del método de Runge-Kutta

  1. Proporcionar: f, x_0, y_0, h, n.
  2. Imprimir x_0, y_0.
  3. Desde $i = 1$ hasta $i = n$.
     a. Calcular
     $$k_1 = h * f(x_0, y_0);$$
     $$k_2 = h * f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right);$$
     $$k_3 = h * f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right);$$
     $$k_4 = h * f\left(x_0 + h, y_0 + k_3\right);$$
     $$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right).$$
     b. Hacer $y_0 = y_1$; $x_0 = x_0 + h$;
     c. Imprimir x_0, y_0.
  4. Terminar.

Ejemplo 7.4.7 *Use el método RK4 en una hoja de cálculo de Excel para determinar un valor aproximado de $y(1)$, si $y(x)$ es la solución del PVI*

$$y' = x^2 y + y, \quad \textit{con} \quad y(0) = 1.$$

Considere que el tamaño de paso es $h = 0.1$.

▼ Utilizamos las siguientes instrucciones en una hoja de cálculo de Excel para resolver el ejemplo.

- El método RK4 en Excel

  1. En las celdas A1, A2, A3 se escriben las etiquetas: "*x0=, y0=, h=*".
  2. En las celdas B1, B2, B3 se escriben "*=0, =1, =0.1*", respectivamente.
  3. En las celdas A5, B5, C5, D5, E5, F5, G5 se escriben las etiquetas: "$i, x_i, y_i, k_1, k_2, k_3, k_4$".
  4. Se escriben en las celdas A6:A16 los números "0, 1, 2, . . . , 10".
  5. En las celdas B6 y C6 se escriben, respectivamente: "*=B1, =B2*".
  6. En la celda D6 se escribe "*=$B$3*(B6^2*C6+C6)*" . Observe que, en este paso, se evalúa la función $f(x, y) = x^2 y + y$ en el punto (x_0, y_0) y se multiplica por h; a esta expresión la llamamos k_1.
  7. En la celda E6 se escribe "*=$B$3*((B6+$B$3/2)^2*(C6+D6/2)+(C6+D6/2))*". Observe que, en este paso, se evalúa la función $f(x, y) = x^2 y + y$ en el punto $\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right)$ y se multiplica por h; a esta expresión la llamamos k_2.
  8. En la celda F6 se escribe "*=$B$3*((B6+$B$3/2)^2*(C6+E6/2)+(C6+E6/2))*". En este paso, se evalúa la función $f(x, y) = x^2 y + y$ en el punto $\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right)$ y se multiplica por h; a esta expresión la llamamos k_3.

9. En la celda G6 se escribe "=*$B$3*((B6+$B$3)^2*(C6+F6)+(C6+F6))*". En este paso, se evalúa la función $f(x, y) = x^2 y + y$ en el punto $(x_0 + h, y_0 + k_3)$ y se multiplica por h; a esta expresión la llamamos k_4.
10. En la celda B7 se escribe "= $B6 + \$B\$3$" .
11. En la celda C7 escribimos ahora "=*C6+(D6+2*E6+2*F6+G6)/6*". En este paso obtenemos el valor de la aproximación.
12. Se seleccionan las celdas D6-G6 y se copian en D7-G7.
13. Se seleccionan las celdas B7-G7 y se arrastran hasta llegar a las celdas B16-G16.
14. Se grafica la solución utilizando el asistente de gráficos con la opción de XY-Dispersión.

En la tabla siguiente se muestran los resultados numéricos obtenidos con 9 cifras decimales de precisión.

i	x_i	y_i	k_1	k_2	k_3	k_4
0	0	1	0.1	0.1052625	0.105526283	0.111658155
1	0.1	1.105539287	0.111659468	0.118749982	0.119112485	0.127363784
2	0.2	1.224663984	0.127365054	0.136886817	0.13739266	0.148464174
3	0.3	1.362062015	0.14846476	0.161224046	0.161940161	0.176784252
4	0.4	1.523991586	0.176783024	0.193889068	0.194917568	0.214863644
5	0.5	1.718868243	0.21485853	0.23787525	0.239374214	0.266320974
6	0.6	1.958147982	0.266308125	0.297487716	0.299705364	0.336420149
7	0.7	2.257667054	0.336392391	0.379041133	0.382373066	0.43296658
8	0.8	2.639698282	0.432910518	0.491972447	0.497059156	0.567753096
9	0.9	3.136152752	0.567643648	0.650650163	0.658546158	0.758939782
10	1	3.793648764	0.758729753	0.877376118	0.889848817	1.035052965

□

Ejemplo 7.4.8 *Resolver el PVI*

$$y' = x - 3y, \quad con\ y(0) = 1,$$

utilizando el método de Runge-Kutta, repitiendo el proceso $n = 10$, con $h = 0.3$ e implementando el método en Mathematica.

▼ El código del método RK4 en Mathematica se muestra a continuación. Hemos incluido comentarios para que sea más sencillo y claro.

- El método de Runge-Kutta en Mathematica

```
f[x_,y_]:=x-3y;                     (* Definir f *)
x0=0;                               (* Abscisa del punto inicial *)
y0=1;                               (* Ordenada del punto inicial *)
h=0.3;                              (* Incremento en el paso *)
n=10;                               (* Total de pasos a realizar *)
lista={{x0,y0}};                    (* Definir lista con punto inicial *)
Do[ k1=h*f[x0,y0];                  (* Calcular k1 *)
    k2=h*f[x0+h/2,y0+k1/2];         (* Calcular k2 *)
    k3=h*f[x0+h/2,y0+k2/2];         (* Calcular k3 *)
    k4=h*f[x0+h,y0+k3];             (* Calcular k4 *)
    y1=y0+(k1+2k2+2k3+k4)/6;        (* Determinar y1 *)
    y0=y1;                          (* Intercambiar y0 con y1 *)
    x0=x0+h;                        (* Incrementar x0 *)
    AppendTo[lista,{x0,y0}],        (* Incluir punto en la lista *)
{i,1,n}];                           (* Terminar el proceso *)
ListPlot[lista]                     (* Graficar los puntos obtenidos *)
```

Los resultados que se obtienen se muestran en la tabla siguiente; hemos incluido los valores exactos de la ordenada, valores que corresponden a la solución

$$y(x) = \frac{1}{9}\left(3x - 1 + 10e^{-3x}\right).$$

x	$\tilde{y}_4$	y_{exacto}
0	1	1
0.3	0.445375	0.440633
0.6	0.276431	0.272554
0.9	0.265938	0.263562
1.2	0.320544	0.319249
1.5	0.401894	0.401232
1.8	0.494232	0.493907
2.1	0.591084	0.590929
2.4	0.689791	0.689718
2.7	0.789259	0.789226
3.	0.889041	0.889026

□

Ejercicios 7.4.1 *Runge-Kutta.* *Soluciones en la página 13*

Determine una aproximación cuártica $\tilde{y}_4(x)$ de la solución $y(x)$ de cada uno de los siguientes PVI en el punto indicado utilizando el h proporcionado. En los casos que se requiera aplique 2 veces el proceso de aproximación cuártica para obtener una estimación de la solución. Determine en cada caso el error porcentual cometido.

1. $y' = 4x - 2y$, sujeto a $y(0) = 3$ en $x = 0.2$, con $h = 0.2$.
2. $y' = y - y^2$, sujeto a $y(0) = 0.1$ en $x = 0.3$, con $h = 0.3$.
3. $y' = 4x^2 - 2y$, sujeto a $y(0) = 3$ en $x = 0.4$, con $h = 0.2$.

Considere los siguientes PVI. Para cada uno de ellos, use el método RK4 para construir una tabla numérica, x versus y, de la solución de la ecuación diferencial tomando el tamaño de paso dado en el intervalo pedido. Estime en cada ejercicio el error porcentual cometido.

4. $y' = 2x + 2y - 1$, con $y(1) = 1$. Calcule $y(1.5)$, con $h = 0.1$.
5. $y' = \dfrac{x^2 + 2x}{y + 1}$, con $y(0) = 1$. Calcule $y(2.5)$, con $h = 0.5$.

Resuelva los siguientes PVI con los tamaños de paso proporcionados mediante los métodos de Euler, Euler mejorado y Runge-Kutta. Compare los resultados obtenidos en los tres métodos con la solución $y(x)$ del PVI.

6. $y' = 2xy - y$, con $y(0) = 1$, desde $x = 0$ hasta $x = 2$, con $h = 0.2$.
7. $y' = y(15 - y)$, con $y(0) = 1$, desde $x = 0$ hasta $x = 1$, con $h = 0.1$.
8. $y' = y \operatorname{sen} x$, con $y(0) = 1$, en el intervalo $[0, 12]$, con $h = 0.5$.

Ejercicios 7.4.1 *Método de Runge-Kutta.* *Página 12*

1. 2.0816.
2. 0.1304.
3. 1.4189.
4. 3.9364.
5. 4.1884
6. $y_{\text{Euler}}(2) = 3.5988$;
   $y_{\text{Euler mejorado}}(2) = 7.0057$;
   $y_{\text{RK}}(2) = 7.384$;
   $y_{\text{exacta}}(2) = 7.3891$.
7. $y_{\text{Euler}}(2) = 15.0043$;
   $y_{\text{Euler mejorado}}(2) = 14.9051$;
   $y_{\text{RK}}(2) = 14.9998$;
   $y_{\text{exacta}}(2) = 14.9999$.
8. $y_{\text{Euler}}(2) = 0.244$;
   $y_{\text{Euler mejorado}}(2) = 1.1353$;
   $y_{\text{RK}}(2) = 1.1687$;
   $y_{\text{exacta}}(2) = 1.169$.