CAPÍTULO

6

La transformada de Laplace

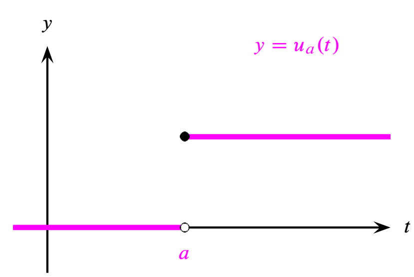
6.4.3 Segunda propiedad de traslación

Esta propiedad permitirá resolver ecuaciones diferenciales donde aparezcan funciones discontinuas. Para entenderla es conveniente introducir una función con la que está estrechamente relacionada, la función escalón unitario de Heaviside, que es una modificación de $u(t)$, ya considerada antes.

Función escalón unitario de Heaviside
Esta función se define para $a > 0$ como:

$$u_a(t) = u(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < a; \\ 1, & \text{si } t \geq a. \end{cases} \tag{6.1}$$

Cuya gráfica es

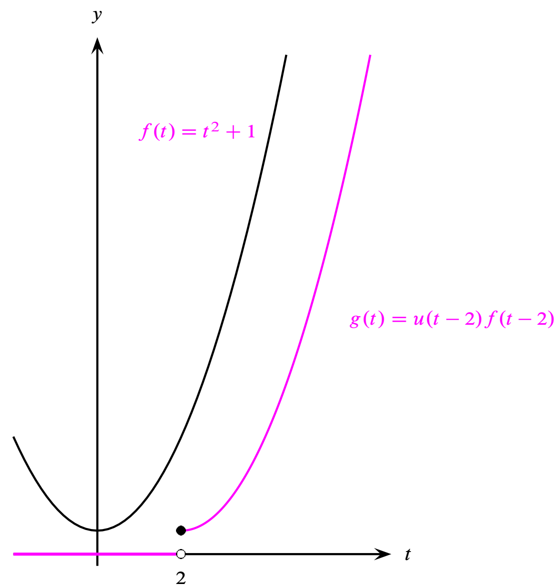


Es decir, dado un $a > 0$ la función asigna el valor 0, si t se encuentra a la izquierda de a y el valor 1, si t se encuentra a la derecha de a. El efecto que tiene esta función sobre otras puede apreciarse en el siguiente ejemplo.

1. canek.azc.uam.mx: 24/ 9/ 2010

Ejemplo 6.4.1 *Sea la función $f(t) = t^2 + 1$. Comparar su gráfica con la gráfica de $g(t) = u(t-2)f(t-2)$.*

▼ Para $t < 2$ se tiene $g(t) = 0$ y para $t \geq 2$ tenemos $g(t) = f(t-2)$ que representa un corrimiento de 2 unidades de la gráfica de f hacia la derecha. Al emplear estas consideraciones hallamos que



□

En general, el efecto geométrico que tiene la multiplicación $u(t-a)f(u-a)$ sobre la gráfica de una función f es correrla a unidades a la derecha, proyectando entonces al eje t aquella parte de la gráfica que se encuentre a la izquierda de a.

- Establecemos la segunda propiedad de traslación.

$$\text{Para } a > 0, \text{ si } f(t) \longleftrightarrow F(s), \quad \text{entonces} \quad u(t-a)f(t-a) \longleftrightarrow e^{-as}F(s).$$

▼ En efecto:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}\{u(t-a)f(t-a)\} &= \int_0^\infty e^{-st}u(t-a)f(t-a)\,dt = \\
&= \int_0^a e^{-st}\underbrace{u(t-a)}_{=0}f(t-a)dt + \int_a^\infty e^{-st}\underbrace{u(t-a)}_{=1}f(t-a)\,dt = \\
&= \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)\,dt = \underbrace{\int_0^\infty e^{-s(x+a)}f(x)\,dx}_{x=t-a} = \int_0^\infty e^{-sx}e^{-sa}f(x)\,dx = \\
&= e^{-as}\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx = e^{-as}F(s).
\end{aligned}$$

□

Advierta que en particular, si $f(t) = 1$, se deduce que $u(t-a) \longleftrightarrow \dfrac{e^{-as}}{s}$.

Ejemplo 6.4.2 *Calcular la TL de la función $h(t)$ que está definida por*

$$h(t) = \begin{cases} 1, & si\ \pi \le t < 2\pi; \\ 0, & si\ t \notin [\pi, 2\pi). \end{cases}$$

▼ El cálculo de la TL se puede hacer mediante la definición, pero presentamos otra posibilidad que nos puede ayudar en situaciones más complicadas. Nos referimos a escribir la función h mediante una combinación lineal de funciones escalón unitario de Heaviside para las cuales utilizamos los números a de la definición (6.1) como aquellos valores que aparecen en la propia función seccionada h; así escribimos h de la siguiente manera:

$$h(t) = Au(t-\pi) + Bu(t-2\pi);$$

donde A y B son factores que encontraremos por el método de coeficientes indeterminados.

1. Si $\pi \le t < 2\pi$, entonces $t-\pi \ge 0$ & $t-2\pi < 0$, por lo que $u(t-\pi) = 1$ & $u(t-2\pi) = 0$. Entonces, por definición de $h(t)$, se tiene que $h(t) = 1$ y por otra parte:

$$h(t) = Au(t-\pi) + Bu(t-2\pi) \Rightarrow 1 = A(1) + B(0) \Rightarrow A = 1.$$

2. Si $t \ge 2\pi$, entonces $t-\pi > 0$ & $t-2\pi \ge 0$, por lo que $u(t-\pi) = 1$ & $u(t-2\pi) = 1$. Entonces, por definición de $h(t)$, se tiene que $h(t) = 0$ y por otra parte:

$$h(t) = Au(t-\pi) + Bu(t-2\pi) \Rightarrow 0 = A(1) + B(1) \Rightarrow B = -A = -1.$$

De esta manera $h(t) = u(t-\pi) - u(t-2\pi)$. Por lo tanto, a partir de la propiedad de linealidad y de la segunda propiedad de traslación, hallamos:

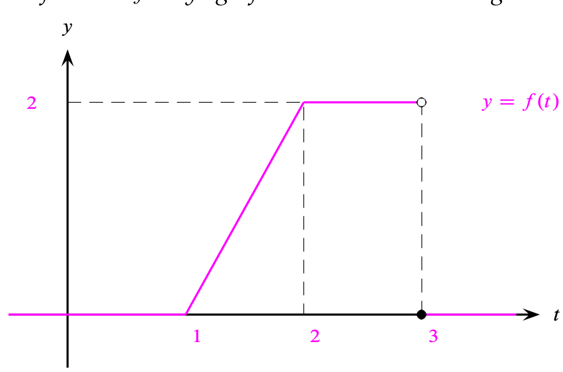
$$\mathfrak{L}\{h(t)\} = \mathfrak{L}\{u(t-\pi)\} - \mathfrak{L}\{u(t-2\pi)\} = \frac{e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-2\pi s}}{s} = \frac{e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}}{s}.$$

□

- En general, si $f(t) = \begin{cases} g(t), & \text{si } a \le t \le b \\ 0, & \text{si } t \notin [a,b] \end{cases}$, entonces $f(t)$ se puede expresar en términos de $u(t)$ como

$$f(t) = g(t)u(t-a) - g(t)u(t-b). \tag{6.2}$$

Ejemplo 6.4.3 *Calcular la TL de la función f cuya gráfica se muestra en la siguiente figura:*



▼ La definición analítica de la función f es

$$f(t) = \begin{cases} 2t-2, & \text{si } 1 \le t < 2; \\ 2, & \text{si } 2 \le t < 3; \\ 0, & \text{si } t \notin [1,3). \end{cases}$$

que se puede escribir como

$$f(t) = \begin{cases} 2t-2, & \text{si } 1 \le t < 2 \\ 0, & \text{si } t \notin [1,2) \end{cases} + \begin{cases} 2, & \text{si } 2 \le t \le 3; \\ 0, & \text{si } t \notin [2,3]\,. \end{cases}$$

Si ahora aplicamos en resultado (6.2) se tiene:

$$\begin{aligned} f(t) &= (2t-2)u(t-1) - (2t-2)u(t-2) + 2u(t-2) - 2u(t-3) = \\ &= 2(t-1)u(t-1) - 2(t-2)u(t-2) - 2u(t-3). \end{aligned}$$

De aquí resulta (por la linealidad de la TL):

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 2\mathcal{L}\{(t-1)u(t-1)\} - 2\mathcal{L}\{(t-2)u(t-2)\} - 2\mathcal{L}\{u(t-3)\}.$$

Si ahora aplicamos la segunda propiedad de traslación y las fórmulas $t \longleftrightarrow \dfrac{1}{s^2}$ & $u(t-a) \longleftrightarrow \dfrac{e^{-as}}{s}$, obtenemos:

$$F(s) = 2\frac{e^{-s}}{s^2} - 2\frac{e^{-2s}}{s^2} - 2\frac{e^{-3s}}{s}.$$

□

Cuando ocurre que los argumentos de las funciones $f\,\underbrace{(t-a)}$ & $u\,\underbrace{(t-a)}$ no son los mismos, se debe proceder como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.4.4 *Calcular la TL de la función* $f(t) = \operatorname{sen}(t)u(t-\pi)$.

▼ Los argumentos de las funciones seno y escalón unitario u no son los mismos. Como debemos hallar el mecanismo adecuado para hacerlos iguales, procedemos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{sen}(t)u(t-\pi) = \operatorname{sen}[(t-\pi)+\pi]u(t-\pi) = \\ &= [\operatorname{sen}(t-\pi)\cos\pi + \operatorname{sen}\pi\cos(t-\pi)]u(t-\pi) = -\operatorname{sen}(t-\pi)u(t-\pi). \end{aligned}$$

Aplicando ahora la segunda propiedad de traslación:

$$F(s) = -\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}.$$

□

Ejemplo 6.4.5 *Calcular* $\mathcal{L}\left\{t^2u(t-3)\right\}$.

▼ En este caso tenemos $f(t-3)u(t-3) = t^2u(t-3)$, es decir, $f(t-3) = t^2$, y es necesario que encontremos $f(t)$. Para ello basta con hacer el cambio de variable $t-3 = x;\ t = x+3$. Así:

$$f(x) = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9,$$

es decir, $f(t) = t^2 + 6t + 9$. Por lo cual:

$$\mathcal{L}\{\,f(t-3)u(t-3)\} = \mathcal{L}\{\,f(t)\}e^{-3s} = \mathcal{L}\left\{t^2+6t+9\right\}e^{-3s} = \left[\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s}\right]e^{-3s}.$$

□

Ejercicios 6.4.3 *Segunda propiedad de traslación.* *Soluciones en la página 6*
En los siguientes ejercicios, calcular $\mathcal{L}\{ f(t)\}$:

1. $f(t) = t^2 u(t-2)$.
2. $f(t) = \cos(t)u(t-1)$.
3. $f(t) = \begin{cases} -t^2+3t-2, & \text{si } 1 \le t \le 2; \\ 0, & \text{si } t \notin [1,2]. \end{cases}$
4. $f(t) = \begin{cases} t, & \text{si } t < 2; \\ 1, & \text{si } 2 \le t < 3; \\ e^{-2t}, & \text{si } 3 \le t. \end{cases}$
5. $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 1; \\ t-1, & \text{si } 1 \le t < 2; \\ 3-t, & \text{si } 2 \le t < 3; \\ 0, & \text{si } 3 \le t. \end{cases}$
6. $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & \text{si } t \le \pi; \\ 0, & \text{si } \pi \le t. \end{cases}$
7. $f(t) = \begin{cases} b, & \text{si } a \le t \le 2a; \\ -b, & \text{si } 2a \le t \le 3a; \\ 0, & \text{si } t < a \text{ o bien } t > 3a, \end{cases}$ donde a, b son constantes positivas.
8. Para a y t_0 constantes, $f(t) = ka,$ si $(k-1)t_0 \le t < kt_0$, con $k = 1, 2, 3, \cdots$

Ejercicios 6.4.3 *Segunda propiedad de traslación.* *Página 5*

1. $F(s) = \dfrac{2e^{-2s}}{s^3}(1 + 2s + 2s^2)$.
2. $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{s^2 + 1}[(\cos 1)s - \operatorname{sen} 1]$.
3. $F(s) = \dfrac{2}{s^3}(e^{-2s} - e^{-s}) + \dfrac{1}{s^2}(e^{-2s} + e^{-s})$.
4. $F(s) = \dfrac{1}{s^2}(1 - e^{-2s}) - \dfrac{1}{s}\left(e^{-2s} + e^{-3s}\right) + \dfrac{e^{-3(s+2)}}{s + 2}$.
5. $F(s) = \dfrac{1}{s^2}(e^{-s} - 2e^{-2s} + e^{-3s})$.
6. $F(s) = \dfrac{1 + e^{-\pi s}}{s^2 + 1}$.
7. $F(s) = \dfrac{b}{s}(e^{-as} - 2e^{-2as} + e^{-3as})$.
8. $F(s) = \dfrac{a}{s(1 - e^{-s})}$.