CAPÍTULO

6

La Transformada de Laplace

6.5 Aplicación de la TL para resolver ED

En esta sección, presentamos con detalle la manera en que utilizaremos la TL para obtener la solución de un PVI. Con este método podremos no sólo resolver PVI con ED lineales, como las consideradas en los capítulos 4 y 5, sino también otros tipos de PVI que no se han planteado antes en este libro.

6.5.1 Esquema general del método

Para una ED lineal de segundo orden con coeficientes constantes y condiciones iniciales en $t = 0$,

$$y'' + ay' + by = f(t) \quad \text{con} \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1. \tag{6.1}$$

Aplicamos TL a la ED y considerando (**??**) y (**??**) hallamos que

$$\mathcal{L}\{\, y'\} = sY - y(0) = sY - y_0 \quad \& \quad \mathcal{L}\{\, y''\} = s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - sy_0 - y_1.$$

El resultado será entonces:

$$\begin{aligned}(s^2Y - sy_0 - y_1) + a(sY - y_0) + bY &= (s^2 + as + b)Y - sy_0 - y_1 - ay_0 = F(s) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (s^2 + as + b)Y = F(s) + sy_0 + y_1 + ay_0;\end{aligned}$$

de donde:

$$Y(s) = \frac{F(s) + sy_0 + y_1 + ay_0}{s^2 + as + b}. \tag{6.2}$$

Hemos convertido el PVI (6.1) en una expresión algebraica en la que $Y(s) = \mathcal{L}\{\, y(t)\}$ ya se encuentra despejada y en donde la función buscada es $y(t)$. Para encontrar $y(t)$, se toma la transformada inversa en

1. canek.azc.uam.mx: 24/ 9/ 2010

(6.2):

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s) + sy_0 + y_1 + ay_0}{s^2 + as + b}\right\}. \tag{6.3}$$

Éste es el esquema general del método de la TL para resolver un PVI que, como se observa, comprende tres etapas.

1. Aplicar la TL a la ED, tomando en cuenta las condiciones iniciales.
2. Despejar $Y(s)$. Esto será posible en muchos casos puesto que el resultado de aplicar $\mathcal{L}$ a una ED lineal de coeficientes constantes es una ecuación lineal con incógnita $Y(s)$.
3. Aplicar TL inversa a $Y(s)$ para obtener $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$. En general es en este paso donde pueden aparecer las dificultades, puesto que se requiere de un buen manejo del cálculo de $\mathcal{L}^{-1}$ de las funciones resultantes. Veremos algunas técnicas en los ejemplos siguientes para determinar dicha transformada inversa.

Ejemplo 6.5.1 *Resolver el PVI* $y'' + 9y = 5t + 2$, *con* $y(0) = 5$ & $y'(0) = -1$.

▼ Como

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - 5s + 1,$$

resulta que

$$s^2Y - 5s + 1 + 9Y = \frac{5}{s^2} + \frac{2}{s} \Rightarrow (s^2 + 9)Y = \frac{5 + 2s}{s^2} + 5s - 1 \Rightarrow Y(s) = \frac{5s^3 - s^2 + 2s + 5}{s^2(s^2 + 9)}.$$

La solución del PVI será entonces:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s^3 - s^2 + 2s + 5}{s^2(s^2 + 9)}\right\}.$$

Pospondremos el cálculo de la transformada inversa para la siguiente subsección.

□

Ejemplo 6.5.2 *Encontrar la solución general de la ED* $y'' + 6y' + 25y = 0$.

▼ Como no hay condiciones iniciales explícitas podemos suponer que $y(0) = y_0$ & $y'(0) = y_1$, de modo que obtendremos:

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY - y_0 \quad \& \quad \mathcal{L}\{y''\} = s^2Y - sy_0 - y_1;$$

de donde, al aplicar TL en la ED, obtenemos:

$$s^2Y - sy_0 - y_1 + 6(sY - y_0) + 25Y = 0 \Rightarrow (s^2 + 6s + 25)Y = sy_0 + y_1 + 6y_0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Y(s) = \frac{y_0s + 6y_0 + y_1}{s^2 + 6s + 25} = \frac{y_0s + 6y_0 + y_1}{(s^2 + 6s + 9) + 16} = \frac{y_0s + 6y_0 + y_1}{(s + 3)^2 + 4^2}.$$

La solución de la ED se obtiene aplicando la transformada inversa:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{y_0s + 6y_0 + y_1}{(s + 3)^2 + 4^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{y_0(s + 3) + 6y_0 + y_1 - 3y_0}{(s + 3)^2 + 4^2}\right\} =$$
$$= y_0\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s + 3}{(s + 3)^2 + 4^2}\right\} + (3y_0 + y_1)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + 3)^2 + 4^2}\right\} =$$
$$= y_0\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s + 3}{(s + 3)^2 + 4^2}\right\} + \frac{3y_0 + y_1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s + 3)^2 + 4^2}\right\} =$$
$$= y_0e^{-3t}\cos 4t + \frac{3y_0 + y_1}{4}e^{-3t}\operatorname{sen} 4t.$$

□

Ejemplo 6.5.3 *Resolver el PVI* $y'' + 2ty' + 2y = e^{2t}$, *con* $y(0) = 1$ & $y'(0) = 2$.

▼ Notemos ahora que

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0) = sY - 1 \quad \& \quad \mathcal{L}\{y''\} = s\mathcal{L}\{y'\} - y'(0) = s(sY - 1) - 2 = s^2Y - s - 2.$$

En cuanto al segundo término de la ED:

$$\mathcal{L}\{ty'\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{y'\} = -\frac{d}{ds}[sY - 1] = -Y - sY'.$$

Entonces la TL de la ED queda como sigue:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y'' + 2ty' + 2y\} &= \mathcal{L}\{y''\} + 2\mathcal{L}\{ty'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = \\
&= (s^2Y - s - 2) + 2(-Y - sY') + 2Y = \mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow -2sY' + (s^2 - 2 + 2)Y = \frac{1}{s-2} + s + 2 = \frac{1 + (s-2)(s+2)}{s-2} = \frac{s^2 - 3}{s-2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow -2sY' + s^2Y = \frac{s^2 - 3}{s-2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow Y' - \frac{s}{2}Y = \frac{s^2 - 3}{-2s(s-2)}.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

En este caso el problema original fue una ED lineal no homogénea con coeficientes variables. Al aplicar TL a la ED no se redujo a una ecuación algebraica sino a una ED (6.4) para $Y(s)$. La nueva ED (6.4) es más sencilla que la original porque es lineal de primer orden. El plan a seguir sería primero resolver la ED lineal de primer orden para $Y(s)$ y después aplicar $\mathcal{L}^{-1}$ al resultado obtenido.

□

6.5.2 Técnicas de cálculo de $\mathcal{L}^{-1}$. Fracciones parciales

Para determinar $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ de expresiones del tipo $F(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$ en donde $Q(s)$ es un polinomio y $P(s)$ es otro polinomio de grado menor que el grado de $Q(s)$ posiblemente multiplicado por una exponencial, procederemos buscando descomponer la función $F(s)$ en términos más simples de forma similar al método de fracciones parciales utilizado en la integración de funciones racionales.

Teorema 6.1 *Fundamental del Álgebra*
Todo polinomio

$$Q(s) = a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0$$

de grado $n \geq 1$, *cuyos coeficientes pueden ser números reales o complejos, tiene tantas raíces como su grado (contando multiplicidad) y se puede factorizar así:*

$$Q(s) = a_n(s - r_1)^{m_1}(s - r_2)^{m_2} \cdots (s - r_k)^{m_k},$$

donde las r_i *son las raíces y las* m_i *son las multiplicidades de cada una, con*

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n.$$

Más aún, si los coeficientes son reales, entonces las raíces complejas aparecen en pares conjugados, es decir, si $r = \alpha + \beta i$ *es una raíz, entonces* $\overline{r} = \alpha - \beta i$ *es otra raíz, de modo que en ese caso* $Q(s)$ *contendrá un factor*

$$(s - r)(s - \overline{r}) = (s - \alpha - \beta i)(s - \alpha + \beta i) = (s - \alpha)^2 + \beta^2,$$

con α *y* β *reales.*
Por lo anterior podemos factorizar el denominador $Q(s)$ *en factores lineales de la forma* $(s - r_i)$ *o bien en factores cuadráticos irreducibles de la forma* $(s - \alpha)^2 + \beta^2$ *así como potencias de ellos.*

Las fracciones parciales en que se descompone el cociente $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ pueden ser

$$\frac{A}{s-r}, \quad \frac{B}{(s-r)^m}, \quad \frac{Cs+D}{(s-\alpha)^2+\beta^2}, \quad \frac{Ks+L}{\left[(s-\alpha)^2+\beta^2\right]^m},$$

donde los números $A, B, C \cdots$ deben ser determinados.

Ejemplo 6.5.4 *Descomponer* $F(s) = \dfrac{3s-7}{(s-1)(s-3)}$ *en fracciones parciales y calcular* $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

▼ Buscamos A y B de modo que

$$\frac{3s-7}{(s-1)(s-3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-3}.$$

Para que la suma de fracciones iguale a la fracción original, se debe cumplir que

$$\frac{A(s-3)+B(s-1)}{(s-1)(s-3)} = \frac{3s-7}{(s-1)(s-3)};$$

y esto ocurre sólo si los numeradores son iguales:

$$A(s-3)+B(s-1) = 3s-7, \tag{6.5}$$

dado que los denominadores de estas fracciones son iguales. Teniendo en cuenta esta condición, se determinarán A y B basados en el supuesto de que la relación que los determina se cumple idénticamente para todo número s. Hay dos estrategias a seguir y las ilustraremos a continuación:

1. Agrupar términos e igualar los coeficientes de las mismas potencias de ambos lados de (6.5). Haciendo esto obtenemos:

   $$A(s-3)+B(s-1) = 3s-7 \Rightarrow (A+B)s-(3A+B)s = 3s-7 \Rightarrow A+B=3 \quad \text{y} \quad 3A+B=7.$$

   Resolviendo este sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas A, B, obtenemos $A = 2$ y $B = 1$.

2. Asignar directamente valores a s para obtener varias ecuaciones más simples que (6.5). Para esto, escogemos valores para s que hagan que varios términos del lado izquierdo de (6.5) se anulen. Estos valores son las raíces del denominador $Q(s)$. Para el presente ejemplo:

   - Si $s = 1$, entonces $A(1-3)+B(1-1) = 3(1)-7 \Rightarrow -2A = -4 \Rightarrow A = 2$.
   - Si $s = 3$, entonces $A(3-3)+B(3-1) = 3(3)-7 \Rightarrow 2B = 2 \Rightarrow B = 1$.

   La solución es la misma que se obtuvo utilizando la estrategia anterior. Esto ocurre cuando los coeficientes que buscamos son los asociados a las fracciones simples de términos no repetidos.

Usando cualquiera de los dos caminos hallamos:

$$\frac{3s-7}{(s-1)(s-3)} = \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s-3};$$

y de aquí:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-7}{(s-1)(s-3)}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} = 2e^{t}+e^{3t},$$

por la linealidad de $\mathcal{L}^{-1}$.

□

Ejemplo 6.5.5 *Descomponer* $F(s) = \dfrac{2s-8}{s^2-5s+6}$ *en fracciones parciales y calcular* $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

▼ Factorizamos el denominador:

$$s^2 - 5s + 6 = (s-2)(s-3).$$

Buscamos A y B, de modo que

$$\frac{2s-8}{(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-3} = \frac{A(s-3)+B(s-2)}{(s-2)(s-3)}.$$

De nuevo, basta con que se cumpla la identidad de los numeradores:

$$A(s-3) + B(s-2) = 2s - 8.$$

- Si $s = 2$, entonces $A(2-3) + B(2-2) = 2(2) - 8 \;\Rightarrow\; -A = -4 \;\Rightarrow\; A = 4.$
- Si $s = 3$, entonces $A(3-3) + B(3-2) = 2(3) - 8 \;\Rightarrow\; B = -2.$

Por consiguiente:

$$\frac{2s-8}{s^2-5s+6} = \frac{4}{s-2} - \frac{2}{s-3}\,;$$

y de aquí podemos concluir además que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-8}{s^2-5s+6}\right\} = 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} = 4e^{2t} - 2e^{3t}.$$

□

Ejemplo 6.5.6 *Descomponer* $F(s) = \dfrac{s^3-4s^2+5s-2}{s(s+1)(s-2)(s+3)}$ *en fracciones parciales y encontrar* $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

▼ Buscamos A, B, C, D de modo que

$$\frac{s^3-4s^2+5s-2}{s(s+1)(s-2)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{s+3}.$$

Esta igualdad se cumple sólo cuando:

$$A(s+1)(s-2)(s+3) + Bs(s-2)(s+3) + Cs(s+1)(s+3) + Ds(s+1)(s-2) = s^3 - 4s^2 + 5s - 2.$$

Entonces, evaluando en las raíces del denominador:

1. Si $s = 0$, entonces:

$$A(1)(-2)(3) + B\cdot 0 + C\cdot 0 + D\cdot 0 = 0^3 - 4\cdot 0^2 + 5\cdot 0 - 2 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; -6A = -2 \;\Rightarrow\; A = \frac{1}{3}.$$

2. Si $s = -1$, entonces:

$$A\cdot 0 + B(-1)(-3)(2) + C\cdot 0 + D\cdot 0 = (-1)^3 - 4(-1)^2 + 5(-1) - 2 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 6B = -12 \;\Rightarrow\; B = -2.$$

3. Si $s = 2$, entonces:

$$A\cdot 0 + B\cdot 0 + C(2)(3)(5) + D\cdot 0 = (2)^3 - 4(2)^2 + 5(2) - 2 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 30C = 0 \;\Rightarrow\; C = 0.$$

4. Si $s = -3$, entonces:

$$A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D(-3)(-2)(-5) = (-3)^3 - 4(-3)^2 + 5(-3) - 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -30D = -27 - 36 - 15 - 2 = -80 \Rightarrow D = \frac{8}{3}.$$

Por tanto, el cociente original se descompone como:

$$F(s) = \frac{s^3 - 4s^2 + 5s - 2}{s(s+1)(s-2)(s+3)} = \frac{\frac{1}{3}}{s} + \frac{(-2)}{s+1} + \frac{0}{s-2} + \frac{\frac{8}{3}}{s+3}.$$

De lo anterior podemos concluir también que

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{8}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = \frac{1}{3} - 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{-3t}.$$

□

Ejemplo 6.5.7 *Descomponer* $F(s) = \dfrac{8s^2 - 7s + 6}{s^2(s-2)}$ *en fracciones parciales y calcular* $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

▼ Este ejemplo muestra lo que puede ocurrir cuando hay factores repetidos en el denominador. Ahora buscaremos A, B, C de manera que

$$\frac{8s^2 - 7s + 6}{s^2(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-2}.$$

Esta igualdad se cumple sólo cuando:

$$As(s-2) + B(s-2) + Cs^2 = 8s^2 - 7s + 6.$$

Evaluamos en las dos raíces del denominador:

1. Si $s = 0$, entonces:

$$A \cdot 0 + B(-2) + C \cdot 0 = 8 \cdot 0^2 - 7 \cdot 0 + 6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2B = 6 \Rightarrow B = -3.$$

2. Si $s = 2$, entonces:

$$A \cdot 0 + B \cdot 0 + C(2^2) = 8 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4C = 32 - 14 + 6 = 24 \Rightarrow C = 6.$$

Para obtener A podemos dar a s cualquier otro valor y usar los valores ya determinados para B y C:

3. Por ejemplo, si $s = 1$, entonces:

$$A(1)(-1) + B(-1) + C(1^2) = 8 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 + 6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -A - B + C = 8 - 7 + 6 = 7 \Rightarrow -A - (-3) + 6 = 7 \Rightarrow -A = -2 \Rightarrow A = 2.$$

Por lo tanto:

$$F(s) = \frac{8s^2 - 7s + 6}{s^2(s-2)} = \frac{2}{s} - \frac{3}{s^2} + \frac{6}{s-2}.$$

De lo anterior podemos concluir:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + 6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = 2 - 3t + 6e^{2t}.$$

□

Ejemplo 6.5.8 *Descomponer en fracciones parciales* $F(s) = \dfrac{9s^4 - 16s^3 - 25s^2 + 154s - 99}{(s-2)^3(s+3)^2}$ *y calcular* $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

▼ Buscamos constantes A, B, C, D, E de modo que

$$F(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{(s-2)^2} + \frac{C}{(s-2)^3} + \frac{D}{s+3} + \frac{E}{(s+3)^2},$$

y esto ocurre si:

$$\begin{aligned} & A(s-2)^2(s+3)^2 + B(s-2)(s+3)^2 + C(s+3)^2 + D(s-2)^3(s+3) + E(s-2)^3 = \\ & \qquad = 9s^4 - 16s^3 - 25s^2 + 154s - 99. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Usamos las dos raíces de denominador para determinar los coeficientes:

1. Si $s = 2$, entonces:

$$\begin{aligned} & A \cdot 0 + B \cdot 0 + C(5^2) + D \cdot 0 + E \cdot 0 = 9 \cdot 2^4 - 16 \cdot 2^3 - 25 \cdot 2^2 + 154 \cdot 2 - 99 \Rightarrow \\ & \qquad \Rightarrow 25C = 144 - 128 - 100 + 308 - 99 = 125 \Rightarrow C = 5. \end{aligned}$$

2. Si $s = -3$, entonces:

$$\begin{aligned} & A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D \cdot 0 + E(-5)^3 = 9 \cdot (-3)^4 - 16 \cdot (-3)^3 - 25 \cdot (-3)^2 + 154 \cdot (-3) - 99 \Rightarrow \\ & \qquad \Rightarrow -125E = 729 + 432 - 225 - 462 - 99 = 375 \Rightarrow E = -3. \end{aligned}$$

Podríamos continuar asignando valores a s (como $0, 1, -1$, etc.) para obtener ecuaciones que deben satisfacer los coeficientes que aún faltan por determinar, pero seguiremos un camino diferente para mostrar un nuevo enfoque que es especialmente útil cuando se tienen raíces repetidas, como en el presente ejemplo. Si tomamos la derivada en ambos lados de (6.6), resulta:

$$\begin{aligned} & 2A(s-2)(s+3)^2 + 2A(s-2)^2(s+3) + B(s+3)^2 + 2B(s-2)(s+3) + \\ & + 2C(s+3) + 3D(s-2)^2(s+3) + D(s-2)^3 + 3E(s-2)^2 = \\ & = 36s^3 - 48s^2 - 50s + 154. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Si ahora en (6.7) hacemos de nuevo $s = 2$ y $s = -3$, obtendremos:

3. Si $s = 2$:

$$\begin{aligned} & A \cdot 0 + A \cdot 0 + B(5^2) + B \cdot 0 + 2C(5) + D \cdot 0 + D \cdot 0 + E \cdot 0 = 36(2^3) - 48(2^2) - 50(2) + 154 \Rightarrow \\ & \Rightarrow 25B + 10C = 288 - 192 - 100 + 154 \Rightarrow 25B + 50 = 150 \Rightarrow B = 4. \end{aligned}$$

4. Si $s = -3$:

$$\begin{aligned} & A \cdot 0 + A \cdot 0 + B \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D \cdot 0 + D(-5)^3 + 3E(-5)^2 = \\ & \qquad = 36(-3)^3 - 48(-3)^2 - 50(-3) + 154 \Rightarrow \\ & \qquad \Rightarrow -125D + 75E = -1\,100 \Rightarrow -125D = -1\,100 + 225 \Rightarrow D = 7. \end{aligned}$$

El éxito de esta estrategia radica esencialmente en el hecho de que al derivar un término de la forma

$$G(s) = J(s-a)(s-b)^k, \text{ con } k > 1, \text{ resulta } G'(s) = J(s-b)^k + kJ(s-a)(s-b)^{k-1};$$

y al evaluar esta derivada en $s = a$, el segundo término se anula, pero el primero ya no lo hace. Por otro lado, si se evalúa esta derivada en $s = b$, ambos términos se anulan. Así, para determinar el último coeficiente A, podemos derivar (6.7) de nuevo y evaluar en $s = 2$. Escribiendo únicamente los términos que no se anulan en tal situación, resulta:

$$\left[2A(s+3)^2 + 2B(s+3) + 2B(s+3) + 2C\right]\Big|_{s=2} = 108s^2 - 96s - 50\Big|_{s=2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2A(5)^2 + 4B(5) + 2C = 432 - 192 - 50 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 50A = 190 - 20B - 2C = 190 - 80 - 10 = 100 \Rightarrow A = 2.$$

Por consiguiente, la descomposición en fracciones parciales queda:

$$F(s) = \frac{2}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2} + \frac{5}{(s-2)^3} + \frac{7}{s+3} - \frac{3}{(s+3)^2}.$$

Si aplicamos $\mathcal{L}^{-1}$ en la anterior igualdad, obtendremos:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \\ &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\} + \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-2)^3}\right\} + 7\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^2}\right\} = \\ &= 2e^{2t} + 4te^{2t} + \frac{5}{2}t^2e^{2t} + 7e^{-3t} - 3te^{-3t} = \left(2 + 4t + \frac{5}{2}t^2\right)e^{2t} + (7-3t)e^{-3t}. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 6.5.9 *Descomponer el cociente* $Y(s) = \dfrac{5s^3 - s^2 + 2s + 5}{s^2(s^2+9)}$ *en fracciones parciales y calcular* $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$.

▼ Buscamos los coeficientes A, B, C, D para los cuales:

$$\frac{5s^3 - s^2 + 2s + 5}{s^2(s^2+9)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2+9} = \frac{As(s^2+9) + B(s^2+9) + (Cs+D)s^2}{s^2(s^2+9)}.$$

Para que esto ocurra, debe suceder:

$$As(s^2+9) + B(s^2+9) + (Cs+D)s^2 = 5s^3 - s^2 + 2s + 5.$$

1. Si $s = 0$, entonces:

$$A \cdot 0 + B(9) + (C\cdot 0 + D)\cdot 0 = 5\cdot 0^3 - 0^2 + 2\cdot 0 + 5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9B = 5 \Rightarrow B = \frac{5}{9}.$$

2. Si $s = 3i$, de modo que $s^2 = -9$ y $s^3 = (3i)^3 = -27i$, tenemos:

$$A(3i)(-9+9) + B(-9+9) + (C\cdot 3i + D)(-9) = 5(-27i) - (-9) + 2(3i) + 5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (-27i)C - 9D = -129i + 14 \Rightarrow \begin{cases} -27C = -129 \\ -9D = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = \dfrac{129}{27} = \dfrac{43}{9}; \\ D = -\dfrac{14}{9}. \end{cases}$$

3. Ya conocidos $B = \frac{5}{9}$, $C = \frac{43}{9}$ y $D = -\frac{14}{9}$, para determinar A podemos dar cualquier valor a s y usar los ya conocidos de B, C y D. Si $s = 1$:

$$A(1)(1^2+9) + B(1^2+9) + (C\cdot 1 + D)(1^2) = 5(1^3) - 1^2 + 2\cdot 1 + 5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10A + 10B + C + D = 11 \Rightarrow 10A + \frac{50}{9} + \frac{43}{9} - \frac{14}{9} = 11 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10A = 11 - \frac{79}{9} = \frac{20}{9} \Rightarrow A = \frac{2}{9}.$$

De lo anterior, nos queda

$$Y(s) = \frac{5s^3 - s^2 + 2s + 5}{s^2(s^2+9)} = \frac{\frac{2}{9}}{s} + \frac{\frac{5}{9}}{s^2} + \frac{\frac{43}{9}s - \frac{14}{9}}{s^2+9}.$$

Si aplicamos ahora $\mathcal{L}^{-1}$ en la expresión anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \frac{2}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{5}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \frac{43}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} - \frac{14}{27}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\} = \\ &= \frac{2}{9} + \frac{5}{9}t + \frac{43}{9}\cos 3t - \frac{14}{27}\operatorname{sen} 3t.\end{aligned}$$

□

Esta función es solución de la ED en el ejemplo 6.5.1 de la página 2.

Ejercicios 6.5.1 *Aplicación de la TL para resolver ED. Fracciones parciales.* Soluciones en la página 25
Calcular $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ de las funciones siguientes, utilizando el método de fracciones parciales:

1. $F(s) = \dfrac{4s+3}{s^2+3s+2}$.
2. $F(s) = \dfrac{3s+2}{s^2(s+1)^2}$.
3. $F(s) = \dfrac{4s+1}{(s+2)(s^2+1)}$.
4. $F(s) = \dfrac{3s^3+2s^2+4s-1}{(s^2+4)(s^2+9)}$.
5. $H(s) = \dfrac{1}{s^3(s^2+1)^2}$.

6.5.3 Técnicas de cálculo de $\mathcal{L}^{-1}$. Método de Heaviside

En esta sección estudiaremos otra estrategia para calcular la transformada inversa de Laplace de funciones racionales $F(s) = P(s)/Q(s)$, la cual se conoce como el método de Heaviside; dicho método considera cuatro casos; todos ellos surgen del tipo de raíces que tenga la función polinomial $Q(s)$. Los cuatros casos son: factores lineales no repetidos, factores lineales repetidos, factores cuadráticos irreducibles no repetidos y factores cuadráticos irreducibles repetidos. Analicemos cada uno de ellos por separado.

Factores lineales no repetidos

En este caso todas las raíces del polinomio $Q(s)$ son simples o de multiplicidad 1, es decir, todas aparecen exactamente una vez. Para establecer el método de Heaviside, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.5.10 *Determinar la transformada inversa de Laplace de* $F(s) = \dfrac{4s+2}{(s-7)(s+8)}$.

▼ Como el denominador de $F(s)$ es un producto de factores lineales no repetidos tenemos, de acuerdo con el método de fracciones parciales, que $F(s)$ se descompone como:

$$F(s) = \frac{4s+2}{(s-7)(s+8)} = \frac{C_1}{s-7} + \frac{C_2}{s+8}. \tag{6.8}$$

Sabemos que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$, por lo cual la transformada inversa de $F(s)$ es

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = C_1e^{7t} + C_2e^{-8t}. \tag{6.9}$$

Claramente la transformada inversa es una combinación lineal de exponenciales del tipo e^{a_it} donde a_i es una raíz simple del denominador de $F(s)$. Determinemos ahora los coeficientes C_1 y C_2; para ello multipliquemos la ecuación (6.8) por el denominador de $F(s)$, es decir, por $(s-7)(s+8)$; tenemos entonces:

$$4s + 2 = C_1(s+8) + C_2(s-7).$$

Esta relación se debe satisfacer para todo valor de s, en particular, si evaluamos cuando $s = 7$:

$$4(7) + 2 = C_1(7 + 8) + C_2(7 - 7) \;\Rightarrow\; C_1 = \frac{30}{15} = 2.$$

Observe que el valor de C_1 se obtuvo multiplicando primero por $(s-7)(s+8)$, después evaluando en $s = 7$ y, finalmente, dividiendo entre el valor que se obtuvo al evaluar el término $(s + 8)$. Este procedimiento es equivalente a sólo multiplicar $F(s)$ por $(s-7)$ y evaluar posteriormente en $s = 7$. En efecto, si multiplicamos la ecuación (6.8) por $(s - 7)$ obtenemos:

$$(s - 7)F(s) = \frac{4s + 2}{s + 8} = C_1 + \frac{C_2(s - 7)}{s + 8}\,;$$

y al evaluar en $s = 7$ resulta:

$$\lim_{s\to 7}(s - 7)F(s) = \left.\frac{4s + 2}{s + 8}\right|_{s=7} = C_1 + \frac{C_2(7 - 7)}{7 + 8} \;\Rightarrow\; C_1 = \frac{30}{15} = 2.$$

En esta expresión hemos usado $\lim\limits_{s\to 7}(s - 7)F(s)$ porque $F(s)$ no está definida en $s = 7$. Sin embargo, como $(s - 7)$ es un factor no repetido, el resultado de la simplificación del producto $(s - 7)F(s)$ sí se encuentra definido. Advierta que el término que contiene el coeficiente C_2 se anula al evaluar en $s = 7$.
Siguiendo este último procedimiento, calculamos C_2; para este caso, primero multiplicamos la ecuación (6.8) por $(s + 8)$, y obtenemos:

$$(s + 8)F(s) = \frac{4s + 2}{s - 7} = \frac{C_1(s + 8)}{s - 7} + C_2.$$

Si ahora evaluamos en $s = -8$, resulta:

$$\lim_{s\to -8}(s + 8)F(s) = \left.\frac{4s + 2}{s - 7}\right|_{s=-8} = \frac{C_1(-8 + 8)}{-8 - 7} + C_2 \;\Rightarrow\; C_2 = \frac{-30}{-15} = 2.$$

Finalmente, utilizando los valores de $C_1 = 2$ y $C_2 = 2$ en la ecuación (6.9), obtenemos:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = 2e^{7t} + 2e^{-8t}.$$

□

Dos conclusiones arroja este ejemplo. Primero, si $F(s) = P(s)/Q(s)$ es una función racional con grado de P menor que grado de Q, y si $Q(s)$ se puede expresar como un producto de factores lineales no repetidos del tipo $s - a_i$, entonces la transformada inversa de $F(s)$ es una combinación lineal de funciones $e^{a_i t}$, es decir:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = C_1e^{a_1 t} + C_2e^{a_2 t} + \cdots + C_n e^{a_n t}; \tag{6.10}$$

donde $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ son raíces simples de $Q(s)$. Como segunda conclusión podemos decir que los coeficientes C_i están dados por

$$C_i = \lim_{s\to a_i} (s - a_i)\, F(s); \tag{6.11}$$

o de forma más simple, los coeficientes C_i se obtienen eliminando el factor $(s - a_i)$ del denominador de $F(s)$ y evaluando el resultado en $s = a_i$.
Estamos ahora en condiciones de establecer el método de Heaviside para el caso de factores lineales no repetidos.

- Método de Heaviside

  1. Determinar todas las raíces reales $a_i \quad i = 1, 2, 3, \cdots, n$, de multiplicidad 1 de $Q(s)$.
  2. Calcular los coeficientes C_i usando la ecuación (6.11).

3. Sumar a la transformada inversa el término:

$$C_1 e^{a_1 t} + C_2 e^{a_2 t} + \cdots + C_n e^{a_n t}.$$

Observe que $Q(a_i) = 0$ para $i = 1, 2, 3, \cdots, n$; lo cual permite escribir los coeficientes C_i en la forma:

$$C_i = \lim_{s \to a_i} (s - a_i) F(s) = \lim_{s \to a_i} \frac{P(s)}{\dfrac{Q(s)}{s - a_i}} = \frac{\lim\limits_{s \to a_i} P(s)}{\lim\limits_{s \to a_i} \dfrac{Q(s)}{s - a_i}} = \frac{\lim\limits_{s \to a_i} P(s)}{\lim\limits_{s \to a_i} \dfrac{Q(s) - Q(a_i)}{s - a_i}} = \frac{P(a_i)}{Q'(a_i)}.$$

Teorema 6.2 *Si $F(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$ es un cociente de dos polinomios de modo que el grado de $Q(s)$ es mayor al de $P(s)$, entonces en el cálculo de la inversa $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, el término que corresponde a un factor lineal no repetido $(s - a)$ de $Q(s)$ queda expresado como*

$$\frac{P(a)}{Q_1(a)} e^{at} \quad \textit{o bien como} \quad \frac{P(a)}{Q'(a)} e^{at},$$

donde $Q_1(s)$ representa el polinomio obtenido de $Q(s)$ eliminando el factor $(s - a)$; en otra forma:

$$Q(s) = (s - a) Q_1(s), \quad Q_1(a) \neq 0.$$

- *Finalmente, podemos concluir que, cuando $Q(s)$ es un producto de factores lineales no repetidos:*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(a_i)}{Q'(a_i)} e^{a_i t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(a_i)}{Q_i(a_i)} e^{r_i t}.$$

Apliquemos ahora el método de Heaviside en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 6.5.11 *Determinar la transformada inversa de Laplace de*

$$F(s) = \frac{s^2 + 3s - 7}{(s + 3)(s + 4)(s - 1)}.$$

▼ Advierta que la fracción es propia y su denominador sólo está formado por factores lineales no repetidos; en consecuencia su descomposición en fracciones parciales es

$$F(s) = \frac{s^2 + 3s - 7}{(s + 3)(s + 4)(s - 1)} = \frac{C_1}{s + 3} + \frac{C_2}{s + 4} + \frac{C_3}{s - 1};$$

y la transformada inversa de $F(s)$ está dada por

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-4t} + C_3 e^{t};$$

donde:

$$C_1 = \lim_{s \to -3} (s + 3)\, F(s) = \left.\frac{s^2 + 3s - 7}{(s + 4)(s - 1)}\right|_{s=-3} = \frac{9 - 9 - 7}{(-3 + 4)(-3 - 1)} = \frac{7}{4};$$

$$C_2 = \lim_{s \to -4} (s + 4)\, F(s) = \left.\frac{s^2 + 3s - 7}{(s + 3)(s - 1)}\right|_{s=-4} = \frac{16 - 12 - 7}{(-4 + 3)(-4 - 1)} = \frac{-3}{5};$$

$$C_3 = \lim_{s \to 1} (s - 1)\, F(s) = \left.\frac{s^2 + 3s - 7}{(s + 3)(s + 4)}\right|_{s=1} = \frac{1 + 3 - 7}{(1 + 3)(1 + 4)} = \frac{-3}{20}.$$

Por lo cual, la transformada inversa de Laplace es

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{7}{4} e^{-3t} - \frac{3}{5} e^{-4t} - \frac{3}{20} e^{t}.$$

□

Ejemplo 6.5.12 *Determinar la transformada inversa de Laplace de* $F(s) = \dfrac{1}{s(s^2-1)(s^2-9)}$.

▼ Observemos que la fracción es propia y que todas las raíces del denominador, $s = 0, 1, -1, 3, -3$, son de multiplicidad 1; es decir, son raíces simples. Entonces la descomposición en fracciones parciales de $F(s)$ es

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2-1)(s^2-9)} = \frac{1}{s(s-1)(s+1)(s-3)(s+3)} = \\ = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s-1} + \frac{C_3}{s+1} + \frac{C_4}{s-3} + \frac{C_5}{s+3}\,;$$

y su transformada inversa está dada por

$$\mathcal{L}^{-1}\{\,F(s)\} = f(t) = C_1 + C_2e^{t} + C_3e^{-t} + C_4e^{3t} + C_5e^{-3t},$$

donde los coeficientes C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 son

$$C_1 = \lim_{s\to 0}\,(s)\,F(s) = \left.\frac{1}{(s-1)(s+1)(s-3)(s+3)}\right|_{s=0} = \frac{1}{(-1)(1)(-3)(3)} = \frac{1}{9};$$

$$C_2 = \lim_{s\to 1}\,(s-4)\,F(s) = \left.\frac{1}{s(s+1)(s-3)(s+3)}\right|_{s=1} = \frac{1}{(1)(2)(-2)(4)} = -\frac{1}{16};$$

$$C_3 = \lim_{s\to -1}\,(s+1)\,F(s) = \left.\frac{1}{s(s-1)(s-3)(s+3)}\right|_{s=-1} = \frac{1}{-1(-2)(-4)(2)} = -\frac{1}{16};$$

$$C_4 = \lim_{s\to 3}\,(s-3)\,F(s) = \left.\frac{1}{s(s-1)(s+1)(s+3)}\right|_{s=3} = \frac{1}{(3)(2)(4)(6)} = \frac{1}{144};$$

$$C_5 = \lim_{s\to -3}\,(s+3)\,F(s) = \left.\frac{1}{s(s-1)(s+1)(s-3)}\right|_{s=-3} = \frac{1}{-3(-4)(-2)(-6)} = \frac{1}{144}.$$

Por lo cual, la transformada inversa de Laplace es

$$\mathcal{L}^{-1}\{\,F(s)\} = f(t) = \frac{1}{9} - \frac{1}{16}e^{t} - \frac{1}{16}e^{-t} + \frac{1}{144}e^{3t} + \frac{1}{144}e^{-3t}.$$

□

Factores lineales repetidos

Consideremos ahora el caso en que algunas de las raíces de $Q(s)$ son de multiplicidad mayor que dos o bien igual a dos.

Ejemplo 6.5.13 *Determinar la transformada inversa de Laplace de* $F(s) = \dfrac{1}{s(s-4)^2}$.

▼ Como $s = 4$ es una raíz doble, la descomposición en fracciones parciales de $F(s)$ es

$$F(s) = \frac{1}{s(s-4)^2} = \frac{A}{(s-4)^2} + \frac{B}{s-4} + \frac{C}{s}\,. \tag{6.12}$$

Conocemos el resultado:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^n}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^n}\right\}e^{at} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}.$$

La forma de la transformada inversa de $F(s)$ de (6.12) es

$$\mathcal{L}^{-1}\{\,F(s)\} = f(t) = Ate^{4t} + Be^{4t} + C. \tag{6.13}$$

Observe que la transformada inversa es una combinación lineal de las funciones $te^{4t}, e^{4t}, 1$. Para determinar los coeficientes procedemos como sigue.
Para el coeficiente C basta con multiplicar la ecuación (6.12) por s y posteriormente evaluar en $s = 0$; así obtenemos:

$$C = \lim_{s\to 0} (s)\,F(s) = \left.\frac{1}{(s-4)^2}\right|_{s=0} = \frac{1}{16}.$$

No podemos seguir el proceso anterior para calcular A y B ya que si multiplicamos la ecuación (6.12) por $(s-4)$ no obtenemos, después de simplificar, una expresión definida en $s = 4$. Necesitamos multiplicar (6.12) por $(s-4)^2$ para que se encuentre definida la expresión; si lo hacemos obtenemos:

$$\frac{1}{s} = A + B(s-4) + \frac{C(s-4)^2}{s}. \tag{6.14}$$

Esta expresión se simplifica cuando se evalúa en $s = 4$ ya que sólo se preserva el coeficiente A en el lado derecho; tenemos entonces, al evaluar en ese punto, que $A = \dfrac{1}{4}$.
La expresión previa (6.14) es una identidad válida para $s \neq 4$ y, si derivamos ambos lados, obtenemos una expresión válida también. Derivando (6.14) resulta:

$$-\frac{1}{s^2} = B + C\frac{[s\cdot 2(s-4) - (s-4)^2]}{s^2} = B + \frac{2C(s-4)}{s} - C\frac{(s-4)^2}{s^2}.$$

Si evaluamos nuevamente en $s = 4$, obtenemos $B = -\dfrac{1}{16}$.
Observe que no es importante derivar el término $\dfrac{C(s-4)^2}{s}$ ya que se anulará cuando se evalúe en $s = 4$.
Reuniendo estos resultados, obtenemos finalmente la transformada inversa de $F(s)$, ésta es

$$\mathcal{L}^{-1}\{\,F(s)\} = f(t) = \frac{1}{4}te^{4t} - \frac{1}{16}e^{4t} + \frac{1}{16}.$$

□

Este ejemplo permite ver que, cuando en $Q(s)$ aparecen factores lineales repetidos del tipo $(s-a)^2$, entonces el desarrollo en fracciones parciales contendrá términos de la forma:

$$\frac{A}{(s-a)^2} + \frac{B}{s-a}$$

y, en consecuencia, en la transformada inversa tendremos:

$$Ate^{at} + Be^{at}, \tag{6.15}$$

donde

$$A = \lim_{s\to a}(s-a)^2F(s), \quad B = \lim_{s\to a}\frac{d}{ds}\left[(s-a)^2F(s)\right]. \tag{6.16}$$

En general, si $Q(s)$ contiene factores como $(s-a)^n$, entonces la transformada inversa de $F(s)$ contendrá términos de la forma:

$$A_1e^{at} + A_2te^{at} + A_3t^2e^{at} + \cdots + A_nt^{n-1}e^{at}, \tag{6.17}$$

donde los coeficientes esta dados por

$$A_k = \frac{1}{(n-k)!}\lim_{s\to a}\frac{d^{n-k}}{ds^{n-k}}\left[(s-a)^nF(s)\right], \quad \text{con } k = 1, 2, 3, \cdots, n. \tag{6.18}$$

Estos resultados son el núcleo del método de Heaviside que establecemos a continuación.

- Método de Heaviside
  1. Determinar las raíces reales $s = a$ de multiplicidad n de $Q(s)$.
  2. Calcular los coeficientes A_k de (6.18).
  3. Usar los coeficientes en (6.17) y sumarlos a la tranformada inversa.

Por otra parte, si regresamos al caso $n = 2$ y utilizamos los valores obtenidos en (6.16), al usar estos valores en la expresión (6.15), obtenemos una forma alternativa de la transformada inversa de Laplace:

$$
\begin{aligned}
Ate^{at} + Be^{at} &= \lim_{s\to a}\left[(s-a)^2F(s)\right]te^{at} + \lim_{s\to a}\frac{d}{ds}\left[(s-a)^2F(s)\right]e^{at} = \\
&= \lim_{s\to a}\left[(s-a)^2F(s)te^{at} + \frac{d}{ds}\left[(s-a)^2F(s)\right]e^{at}\right] = \\
&= \lim_{s\to a}\left[(s-a)^2F(s)te^{st} + \frac{d}{ds}\left[(s-a)^2F(s)\right]e^{st}\right] = \\
&= \lim_{s\to a}\left[(s-a)^2F(s)\frac{de^{st}}{ds} + \frac{d}{ds}\left[(s-a)^2F(s)\right]e^{st}\right] = \\
&= \lim_{s\to a}\frac{d}{ds}\left[(s-a)^2F(s)e^{st}\right].
\end{aligned}
$$

Donde hemos utilizado:

$$\lim_{s\to a} e^{st} = \lim_{s\to a} e^{at}; \quad \frac{d(uv)}{ds} = \frac{du}{ds}v + u\frac{dv}{ds} \quad \& \quad \frac{\partial e^{st}}{\partial s} = te^{st}.$$

Es decir, para calcular la transformada inversa de funciones con dos términos repetidos basta con calcular

$$\lim_{s\to a}\frac{d}{ds}\left[(s-a)^2F(s)e^{st}\right].$$

Este resultado es el núcleo del método de Heaviside. En el caso general cuando $Q(s)$ contenga factores del tipo $(s-a)^n$, entonces la transformada inversa contendrá términos como:

$$\frac{1}{(n-1)!}\lim_{s\to a}\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\left[(s-a)^nF(s)e^{st}\right]. \tag{6.19}$$

Ejemplo 6.5.14 *Determinar la transformada inversa de Laplace de* $F(s) = \dfrac{7s-6}{(s-5)(s+1)^3}$.

▼ Como $s = -1$ es una raíz triple, la descomposición en fracciones parciales de $F(s)$ es

$$F(s) = \frac{7s-6}{(s-5)(s+1)^3} = \frac{A}{s-5} + \frac{2B}{(s+1)^3} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{D}{s+1}. \tag{6.20}$$

Si ahora usamos el resultado

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^n}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^n}\right\}e^{at} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}, \text{ con } n = 2, 3,$$

la transformada inversa de $F(s)$ es

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = Ae^{5t} + Bt^2e^{-t} + Cte^{-t} + De^{-t}. \tag{6.21}$$

Observe que hemos colocado un factor 2 multiplicado por B en (6.20) para que apareciera sólo el factor B en (6.21).
Advierta también que la transformada inversa es una combinación lineal de e^{5t} y de un polinomio general de grado dos multiplicado por e^{-t}. Para determinar los coeficientes procedemos como sigue.

Para el coeficiente A basta con multiplicar por $(s-5)$ la ecuación (6.20) y evaluar despúes en $s=5$; así obtenemos:

$$A = \lim_{s\to 5}(s-5)\,F(s) = \left.\frac{7s-6}{(s+1)^3}\right|_{s=5} = \frac{29}{216}.$$

Si multiplicamos la ecuación (6.20) por $(s+1)$ o por $(s+1)^2$, obtenemos una expresión que no está definida en $s=-1$. Necesitamos multiplicar por $(s+1)^3$ para tener una expresión definida en el punto; y entonces:

$$\frac{7s-6}{s-5} = \frac{A(s+1)^3}{s-5} + 2B + C(s+1) + D(s+1)^2. \tag{6.22}$$

Si ahora evaluamos en $s=-1$, resulta $2B = \dfrac{-7-6}{-1-5} = \dfrac{13}{6}$ ya que los otros términos del lado derecho se anulan. La última expresión es una identidad válida para $s \neq 5$; esperamos entonces que la expresión que se obtiene al derivar ambos miembros se mantenga. Derivando (6.22), entonces resulta:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{7s-6}{s-5}\right) = \frac{d}{ds}\left[\frac{A(s+1)^3}{s-5} + 2B + C(s+1) + D(s+1)^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(s-5)7-(7s-6)(1)}{(s-5)^2} = \frac{d}{ds}\left[\frac{A(s+1)^3}{s-5} + 2B + C(s+1) + D(s+1)^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{29}{(s-5)^2} = \frac{2A(s-8)(s+1)^2}{(s-5)^2} + C + 2D(s+1).$$

Evaluando en $s=-1$ resulta $C = -\dfrac{29}{36}$.

Observe que no es necesario derivar el término $\dfrac{A(s+1)^3}{s-5}$, ya que al evaluar en $s=-1$ se anulará.

Para evaluar el coeficiente D derivamos nuevamente la expresión previa notando que la derivada del primer término del lado derecho se anulará al evaluar en $s=-1$. Tenemos entonces:

$$\left.\frac{d}{ds}\left(-\frac{29}{(s-5)^2}\right)\right|_{s=-1} = 2D \;\Rightarrow\; \left.\frac{58}{(s-5)^3}\right|_{s=-1} = 2D \;\Rightarrow\; -\frac{29}{216} = D.$$

Resulta finalmente que la transformada inversa de $F(s)$ es

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{29}{216}e^{5t} + \frac{13t^2}{12}e^{-t} - \frac{29}{36}te^{-t} - \frac{29}{216}e^{-t}.$$

□

Ejemplo 6.5.15 *Determinar la transformada inversa de Laplace de* $F(s) = \dfrac{s+4}{(s-3)(s+5)^2}$.

▼ El denominador de $F(s)$ tiene la raíz simple $s=3$ y la raíz doble $s=-5$. De acuerdo con esto, su descomposición en fracciones parciales es

$$F(s) = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{(s+5)^2} + \frac{C}{s+5};$$

y la transformada inversa es

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = Ae^{3t} + Bte^{-5t} + Ce^{-5t};$$

donde los coeficientes están dados por:

$$A = \lim_{s\to 3}[(s-3)F(s)] = \left.\frac{s+4}{(s+5)^2}\right|_{s=3} = \frac{7}{64};$$

$$B = \lim_{s\to -5}\left[(s+5)^2F(s)\right] = \left.\frac{s+4}{s-3}\right|_{s=-5} = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8};$$

$$C = \lim_{s\to -5}\frac{d}{ds}\left[(s+5)^2F(s)\right] = \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{s+4}{s-3}\right)\right|_{s=-5} = \left.\frac{-7}{(s-3)^2}\right|_{s=-5} = \frac{-7}{64}.$$

Finalmente, la transformada inversa está dada por:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{7}{64}e^{3t} + \frac{1}{8}te^{-5t} - \frac{7}{64}e^{-5t}.$$

□

Ejemplo 6.5.16 *Determinar la transformada inversa de Laplace de* $F(s) = \dfrac{1}{s^3(s-1)^2}$.

▼ El denominador de $F(s)$ tiene la raíz triple $s = 0$ y la raíz doble $s = 1$, por lo cual su descomposición en fracciones parciales es

$$F(s) = \frac{2A}{s^3} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s} + \frac{D}{(s-1)^2} + \frac{E}{s-1};$$

y su transformada inversa es

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = At^2 + Bt + C + Dte^t + Ee^t;$$

donde los coeficientes están dados por

$$2A = \lim_{s\to 0}\left[s^3F(s)\right] = \left.\frac{1}{(s-1)^2}\right|_{s=0} = 1;$$

$$B = \lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\left[s^3F(s)\right] = \left.\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right]\right|_{s=0} = \left.\frac{-2}{(s-1)^3}\right|_{s=0} = 2;$$

$$C = \lim_{s\to 0}\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\left[s^3F(s)\right] = \left.\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right)\right|_{s=0} = \left.\frac{3}{(s-1)^4}\right|_{s=0} = 3;$$

$$D = \lim_{s\to 1}\left[(s-1)^2F(s)\right] = \left.\frac{1}{s^3}\right|_{s=1} = 1;$$

$$E = \lim_{s\to 1}\frac{d}{ds}\left[(s-1)^2F(s)\right] = \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^3}\right)\right|_{s=1} = \left.\frac{-3}{s^4}\right|_{s=1} = -3.$$

Finalmente, la transformada inversa está dada por

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2}t^2 + 2t + 3 + te^t - 3e^t.$$

□

Ejemplo 6.5.17 *Determinar la transformada inversa de Laplace de* $F(s) = \dfrac{4s+3}{(s+1)^2(s-1)^2}$.

▼ El denominador de $F(s)$ tiene las raíces dobles $s = -1, 1$. Así que, de acuerdo con el resultado 6.19), tenemos que la transformada inversa está dada por la suma de la función

$$f_1(t) = \lim_{s\to -1} \frac{d}{ds}\left[(s+1)^2 F(s)e^{st}\right] = \lim_{s\to -1}\frac{d}{ds}\left[\frac{(4s+3)e^{st}}{(s-1)^2}\right] =$$

$$= \lim_{s\to -1}\frac{(s-1)^2(4e^{st}+(4s+3)te^{st}) - ((4s+3)e^{st})2(s-1)}{(s-1)^4} =$$

$$= \frac{4(4e^{-t}+(-1)te^{-t}) - (-e^{-t})2(-2)}{16} = \frac{16e^{-t}-4te^{-t}-4e^{-t}}{16} = \frac{3}{4}e^{-t} - \frac{1}{4}te^{-t}$$

más la función

$$f_2(t) = \lim_{s\to 1}\frac{d}{ds}\left[(s-1)^2F(s)e^{st}\right] = \lim_{s\to 1}\frac{d}{ds}\left[\frac{(4s+3)e^{st}}{(s+1)^2}\right] =$$

$$= \lim_{s\to 1}\frac{(s+1)^2(4e^{st}+(4s+3)te^{st}) - ((4s+3)e^{st})2(s+1)}{(s+1)^4} =$$

$$= \frac{4(4e^t+7te^t)-(7e^t)2(2)}{16} = \frac{16e^t+28te^t-28e^t}{16} = -\frac{3}{4}e^t + \frac{7}{4}te^t.$$

Por lo tanto, la transformada inversa está dada por

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{3}{4}e^{-t} - \frac{1}{4}te^{-t} - \frac{3}{4}e^t + \frac{7}{4}te^t.$$

□

Ejemplo 6.5.18 *Determinar la transformada inversa de Laplace de* $F(s) = \dfrac{1}{s^3(s-1)}$.

▼ El denominador de $F(s)$ tiene las raíces $s = 0, 1$; la primera de ellas triple y la segunda simple. Así que, de acuerdo con el resultado (6.19), tenemos que la transformada inversa está dada por la suma de las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ siguientes:

$$f_1(t) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s^3)F(s)e^{st}\right] = \lim_{s\to 0}\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{e^{st}}{s-1}\right) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left[\frac{(s-1)te^{st}-e^{st}}{(s-1)^2}\right] =$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{1}{2}\left[\frac{(s-1)^2(te^{st}+(s-1)t^2e^{st}-te^{st}) - ((s-1)te^{st}-e^{st})2(s-1)}{(s-1)^4}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(-t^2-(-t-1)2(-1)) = -\frac{t^2}{2} - t - 1.$$

$$f_2(t) = \lim_{s\to 1}\left[(s-1)F(s)e^{st}\right] = \lim_{s\to 1}\left(\frac{e^{st}}{s^3}\right) = e^t.$$

Por lo tanto, la transformada inversa está dada por

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -\frac{t^2}{2} - t - 1 + e^t.$$

□

Factores cuadráticos irreducibles no repetidos

Esta situación corresponde al caso en que en el denominador $Q(s)$ de $F(s) = P(s)/Q(s)$ aparecen factores cuadráticos irreducibles simples del tipo $(s-a)^2 + b^2$, es decir, cuando $Q(s)$ tiene raíces complejas simples de la forma $a + bi$. Los resultados del caso de factores lineales no repetidos son aplicables en esta situación aunque requieren del uso del álgebra de los números complejos. También existe una segunda posibilidad que requiere del cálculo de la parte real e imaginaria de una cantidad compleja. Ambas posibilidades las estudiaremos en los ejemplos siguientes:

Ejemplo 6.5.19 *Determinar la transformada inversa de Laplace de* $F(s) = \dfrac{4}{s(s^2+1)}$.

▼ En este caso las raíces del denominador son $s = 0, i, -i$, de forma que la descomposición en fracciones parciales es

$$F(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-i} + \frac{C}{s+i}\,;$$

y la transformada inversa es

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = A + Be^{it} + Ce^{-it}.$$

Para obtener los coeficientes seguimos el proceso estudiado en el caso de factores lineales no repetidos. Tenemos entonces:

$$A = \lim_{s\to 0}[s\,F(s)] = \left.\frac{4}{s^2+1}\right|_{s=0} = 4;$$

$$B = \lim_{s\to i}[(s-i)F(s)] = \left.\frac{4}{s(s+i)}\right|_{s=i} = \frac{4}{i(2i)} = -2;$$

$$C = \lim_{s\to -i}[(s+i)F(s)] = \left.\frac{4}{s(s-i)}\right|_{s=-i} = \frac{4}{-i(-2i)} = -2.$$

Usando ahora estos resultados, tenemos que la transformada inversa de Laplace de $F(s)$ es

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 4 - 2e^{it} - 2e^{-it} = 4 - 4\cos t;$$

donde hemos utilizado la relación $\cos t = (e^{it} + e^{-it})/2$.

□

Observación. El cálculo de la transformada inversa para el caso de factores cuadráticos irreducibles simples, siguiendo el proceso anterior, requiere de las expresiones

$$\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \quad \operatorname{sen} t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\,;$$

ambas ya utilizadas en el texto. Estudiemos ahora una segunda opción mediante los ejemplos siguientes:

Ejemplo 6.5.20 *Determinar la transformada inversa de Laplace de* $F(s) = \dfrac{4s+5}{(s^2+1)(s^2+9)}$.

▼ En este caso, los factores cuadráticos s^2+1 y s^2+9 son irreducibles y sus raíces son $\pm i$ y $\pm 3i$, respectivamente, por lo cual la descomposición de $F(s)$ en fracciones parciales tiene la forma

$$F(s) = \frac{4s+5}{(s^2+1)(s^2+9)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+3D}{s^2+9}; \tag{6.23}$$

y su transformada inversa es

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = A\cos t + B\operatorname{sen} t + C\cos 3t + D\operatorname{sen} 3t. \tag{6.24}$$

Observe que en la descomposición (6.23) se coloca el término $3D$ para que en la transformada inversa apareciera D. Para determinar los coeficientes seguimos el proceso siguiente.
Multiplicando (6.23) por s^2+1:

$$\frac{4s+5}{s^2+9} = As + B + \frac{(Cs+3D)(s^2+1)}{s^2+9}.$$

Evaluando en $s = i$, el segundo término del lado derecho desaparece y se obtiene:

$$\frac{4i+5}{-1+9} = Ai + B \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2} \quad \& \quad B = \frac{5}{8}.$$

Si ahora multiplicamos (6.23) por s^2+9 se tiene:

$$\frac{4s+5}{s^2+1} = \frac{(As+B)(s^2+9)}{s^2+1} + Cs + 3D;$$

y evaluando en $s = 3i$ resulta:

$$\frac{12i+5}{-9+1} = 3Ci + 3D \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{2} \quad \& \quad D = -\frac{5}{24}.$$

Finalmente, la transformada inversa de Laplace de $F(s)$ es

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2}\cos t + \frac{5}{8}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}\cos 3t - \frac{5}{24}\operatorname{sen} 3t.$$

□

Ejemplo 6.5.21 *Determinar la transformada inversa de Laplace de* $F(s) = \dfrac{1}{(s^2-2s+2)(s^2+4)}$.

▼ $F(s)$ se puede escribir como $F(s) = \dfrac{1}{[(s-1)^2+1](s^2+4)}$. Los factores cuadráticos $(s-1)^2+1$ y s^2+4 son irreducibles; sus raíces son $1 \pm i$ & $\pm 2i$, respectivamente. La descomposición de $F(s)$ en fracciones parciales es de la forma:

$$F(s) = \frac{1}{[(s-1)^2+1](s^2+4)} = \frac{A(s-1)+B}{(s-1)^2+1} + \frac{Cs+2D}{s^2+4}; \tag{6.25}$$

y su transformada inversa es

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = A(\cos t)e^t + B(\operatorname{sen} t)e^t + C\cos 2t + D\operatorname{sen} 2t.$$

Observación. A se multiplica por $s-1$ y D por 2 para que en la transformada inversa aparezcan sólo A y D. Para determinar los coeficientes, multiplicaremos por los factores irreducibles. Si multiplicamos la ecuación (6.25)por $(s-1)^2+1$, tenemos:

$$\frac{1}{s^2+4} = A(s-1) + B + \frac{(Cs+2D)((s-1)^2+1)}{s^2+4}.$$

Si ahora evaluamos en $s = 1+i$, el segundo término del lado derecho de esta última expresión se anula y obtenemos entonces:

$$\frac{1}{(1+i)^2+4} = Ai + B.$$

Como

$$Ai + B = \frac{1}{(1+i)^2+4} = \frac{1}{4+2i} = \frac{4-2i}{(4+2i)(4-2i)} = \frac{4-2i}{16+4} = \frac{1}{5} - \frac{i}{10},$$

tenemos, al igualar las partes reales e imaginarias, $A = -1/10$, $B = 1/5$. De la misma forma, si multiplicamos la ecuación (6.25) por $s^2 + 4$, tenemos:

$$\frac{1}{(s-1)^2+1} = \frac{[A(s-1)+B](s^2+4)}{(s-1)^2+1} + Cs + 2D.$$

Evaluando en $s = 2i$, se anula el primer término del lado derecho de esta expresión y obtenemos:

$$\frac{1}{(2i-1)^2+1} = 2Ci + 2D.$$

Como

$$2Ci + 2D = \frac{1}{(2i-1)^2+1} = \frac{1}{-4-4i+1+1} = \frac{1}{-2-4i} = \frac{-2+4i}{(-2-4i)(-2+4i)} = \frac{-2+4i}{4+16} = -\frac{1}{10} + \frac{i}{5}$$

resulta, igualando las partes reales y las imaginarias, que $C = 1/10$, $D = -1/20$. Finalmente, la transformada inversa de Laplace es

$$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{10}(\cos t)e^t + \frac{1}{5}(\operatorname{sen} t)e^t + \frac{1}{10}\cos 2t - \frac{1}{20}\operatorname{sen} 2t.$$

□

Analicemos el trabajo realizado en los dos últimos ejemplos. Al inicio identificamos los factores cuadráticos irreducibles y las raíces de $Q(s)$. Después, por cada factor del tipo $(s-a)^2+b^2$, propusimos que aparecieran los siguientes términos en el desarrollo en fracciones parciales:

$$\frac{A(s-a)+bB}{(s-a)^2+b^2};$$

lo que nos llevó directamente a los términos que debe contener la transformada inversa, es decir,

$$A\cos(bt)e^{at} + B\operatorname{sen}(bt)e^{at}. \tag{6.26}$$

El cálculo de los coeficientes lo hicimos multiplicando $F(s)$ por el factor irreducible y evaluando en la raíz $s = a + bi$, esto es,

$$\lim_{s\to a+bi} \left[(s-a)^2 + b^2\right] F(s) = A(s-a) + Bb\Big|_{s=a+bi} = Abi + Bb.$$

De aquí igualamos las partes reales e imaginarias de la ecuación para obtener el resultado:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{b}\operatorname{Im} \lim_{s\to a+bi} \left[(s-a)^2 + b^2\right] F(s); \\ B &= \frac{1}{b}\operatorname{Re} \lim_{s\to a+bi} \left[(s-a)^2 + b^2\right] F(s). \end{aligned} \tag{6.27}$$

Éstas son expresiones generales que podemos utilizar siempre que tengamos factores cuadráticos simples e irreducibles en $Q(s)$ y son parte central del método de Heaviside que establecemos a continuación:

- Método de Heaviside
  1. Determinar todas las raíces complejas $a + bi$ de multiplicidad 1 de $Q(s)$.
  2. Calcular los coeficientes A y B usando (6.27).
  3. Calcular el término (6.26) y sumarlo en la transformada inversa.

Apliquemos el método en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 6.5.22 *Determinar la transformada inversa de Laplace de* $F(s) = \dfrac{3s+4}{(s^2+1)(s+2)}$.

▼ Advirtamos primero que $Q(s) = (s^2+1)(s+2)$ sólo tiene el factor cuadrático irreducible s^2+1 cuyas raíces son $s = a \pm bi = \pm i$, de donde identificamos que $a = 0$ y $b = 1$. Además se tiene un factor lineal $s+2$ con raíz $s = -2$. En consecuencia, la transformada inversa de $F(s)$ es una combinación lineal de las funciones $\cos t$, $\operatorname{sen} t$ & e^{-2t}, es decir:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s\} = A\cos t + B\operatorname{sen} t + Ce^{-2t};$$

donde los coeficientes A y B están dados por

$$A = \frac{1}{b}\operatorname{Im} \lim_{s\to a+bi} \left[s-a)^2+b^2)\right] F(s) = \operatorname{Im} \lim_{s\to i}\left[(s^2+1)F(s)\right] = \operatorname{Im} \left.\frac{3s+4}{s+2}\right|_{s=i} =$$

$$= \operatorname{Im} \frac{3i+4}{i+2} = \operatorname{Im} \frac{(3i+4)(2-i)}{(i+2)(2-i)} = \operatorname{Im} \frac{6i+8+3-4i}{5} = \frac{2}{5}.$$

$$B = \frac{1}{b}\operatorname{Re} \lim_{s\to a+bi} \left[(s-a)^2+b^2)F(s)\right] = \operatorname{Re} \lim_{s\to i}\left[(s^2+1)F(s)\right] = \operatorname{Re} \left.\frac{3s+4}{s+2}\right|_{s=i} =$$

$$= \operatorname{Re} \frac{3i+4}{i+2} = \operatorname{Re} \frac{(3i+4)(2-i)}{(i+2)(2-i)} = \operatorname{Re} \frac{6i+8+3-4i}{5} = \frac{11}{5}.$$

El coeficiente C se calcula como:

$$C = \lim_{s\to -2}[(s+2)F(s)] = \left.\frac{3s+4}{s^2+1}\right|_{s=-2} = \frac{-6+4}{4+1} = -\frac{2}{5}.$$

Finalmente, la transformada inversa de Laplace es

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{2}{5}\cos t + \frac{11}{5}\operatorname{sen} t - \frac{2}{5}e^{-2t}.$$

□

Ejemplo 6.5.23 *Determinar la transformada inversa de Laplace de* $F(s) = \dfrac{1}{s^4+4s^2}$.

▼ Observación. $Q(s) = s^4+4s^2 = s^2(s^2+4)$ sólo tiene el factor cuadrático irreducible s^2+4 cuyas raíces son $s = a \pm bi = \pm 2i$, de donde identificamos que $a = 0$ y $b = 2$. También tiene un factor lineal s^2 con raíz doble $s = 0$. Por lo tanto, la transformada inversa de $F(s)$ es una combinación lineal de las funciones $\cos 2t$, $\operatorname{sen} 2t$, t & 1, es decir:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = A\cos 2t + B\operatorname{sen} 2t + Ct + D.$$

Los coeficientes A y B están dados por

$$A = \frac{1}{b}\operatorname{Im} \lim_{s\to a+bi}\left[(s-a)^2+b^2\right] F(s) = \frac{1}{2}\operatorname{Im} \lim_{s\to 2i}\left[(s^2+4)F(s)\right] = \frac{1}{2}\operatorname{Im} \left.\frac{1}{s^2}\right|_{s=2i} = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\frac{-1}{4} = 0.$$

$$B = \frac{1}{b}\operatorname{Re} \lim_{s\to a+bi}\left[(s-a)^2+b^2)F(s)\right] = \frac{1}{2}\operatorname{Re} \lim_{s\to 2i}\left[(s^2+4)F(s)\right] = \frac{1}{2}\operatorname{Re} \left.\frac{1}{s^2}\right|_{s=2i} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\frac{-1}{4}\right) = -\frac{1}{8}.$$

Por otra parte, los coeficientes C y D están dados por

$$C = \lim_{s\to 0}\left[s^2F(s)\right] = \left.\frac{1}{s^2+4}\right|_{s=0} = \frac{1}{4}.$$

$$D = \lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\left[s^2F(s)\right] = \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)\right|_{s=0} = \left.\left[\frac{-2s}{(s^2+4)^2}\right]\right|_{s=0} = 0.$$

Finalmente, la transformada inversa de Laplace es

$$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{ F(s)\} = -\frac{1}{8}\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{4}t.$$

□

Podemos resumir lo que hemos hallado hasta aquí en el siguiente teorema, cuya demostración omitimos:

Teorema 6.3 *Si para el cociente de polinomios* $F(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$, *el grado del denominador* $Q(s)$ *es mayor que el del numerador* $P(s)$ *y, si el denominador tiene un factor cuadrático de la forma* $(s-a)^2 + b^2$, *de modo que*

$$Q(s) = [(s-a)^2 + b^2]Q_1(s) \text{ con } Q_1(a+ib) \neq 0;$$

entonces, denotando $G(s) = \dfrac{P(s)}{Q_1(s)} = [(s-a)^2 + b^2]F(s)$, $G_I = Im\ [G(a+ib)]$, $G_R = Re\ [G(a+ib)]$, *el término de* $f(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{ F(s)\}$ *que corresponde al factor* $(s-a)^2 + b^2$ *es*

$$\frac{e^{at}}{b}\left[G_I \cdot \cos bt + G_R \cdot \operatorname{sen} bt\right].$$

Ejemplo 6.5.24 *Encontrar la transformada inversa de* $F(s) = \dfrac{s^2 - 5s + 7}{(s-3)[(s-1)^2 + 4]}$.

▼ Las raíces de denominador de $Q(s)$ son 3 & $1 \pm 2i$, por lo tanto:

$$F(s) = \frac{A}{s-3} + \frac{B(s-1) + 2C}{(s-1)^2 + 2^2}$$

de modo que, usando los teoremas (6.2) y (6.3), obtenemos:

$$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{ F(s)\} = \frac{3^2 - 5(3) + 7}{(3-1)^2 + 4} \cdot e^{3t} + \frac{e^t}{2}\left[G_I \cdot \cos 2t + G_R \cdot \operatorname{sen} 2t\right].$$

Donde $G(s)$ es $F(s)$ suprimiendo del denominador el factor en el cual $1 + 2i$ es raíz; así:

$$G(s) = \frac{s^2 - 5s + 7}{s-3},$$

por lo que

$$\begin{aligned} G(1+2i) &= \frac{(1+2i)^2 - 5(1+2i) + 7}{(1+2i) - 3} = \frac{1 + 4i - 4 - 5 - 10i + 7}{-2+2i} = \frac{-1-6i}{-2+2i} = \\ &= \frac{(-1-6i)(-2-2i)}{(-2^2) + (2^2)} = \frac{(2-12) + i(2+12)}{8} = -\frac{10}{8} + \frac{14}{8}i = -\frac{5}{4} + \frac{7}{4}i; \end{aligned}$$

luego $G_R = -\dfrac{5}{4}$, $G_I = \dfrac{7}{4}$; y entonces:

$$f(t) = \frac{1}{8}e^{3t} + \frac{e^t}{8}\left[7\cos 2t - 5\operatorname{sen} 2t\right].$$

□

Ejemplo 6.5.25 *Encontrar la transformada inversa de* $F(s) = \dfrac{s^3 - 4s^2 + 11}{[(s-2)^2 + 3^2][(s-3)^2 + 2^2]}$.

▼ El teorema 6.3 se apuede aplicar aún cuando haya raíces complejas distintas, como es este caso. La componente correspondiente al primer factor cuadrático $[(s-2)^2 + 3^2]$, cuyas raíces son $2 \pm 3i$, es

$$\frac{e^{2t}}{3}\left[G_{1R}\cos 3t + G_{1I}\operatorname{sen} 3t\right],$$

con $G_1(s)$ tomado de $F(s)$ omitiendo del denominador el factor $[(s-2)^2 + 3^2]$ para el cual $2 + 3i$ es raíz. Es decir:

$$G_1(s) = \frac{s^3 - 4s^2 + 11}{(s-3)^2 + 4}.$$

De manera análoga la componente correspondiente al segundo factor cuadrático $[(s-3)^2 + 2^2]$, cuyas raíces son $3 \pm 2i$, es

$$\frac{e^{3t}}{2}\left[G_{2R}\cos 2t + G_{2I}\operatorname{sen} 2t\right],$$

con

$$G_2(s) = \frac{s^3 - 4s^2 + 11}{(s-2)^2 + 9}.$$

Calculamos primero los valores para G_1:

$$\begin{aligned}
G_1(2+3i) &= \frac{(2+3i)^3 - 4(2+3i)^2 + 11}{(2+3i-3)^2 + 4} = \frac{8 + 36i - 54 - 27i - 4(4 + 12i - 9) + 11}{1 - 6i - 9 + 4} = \\
&= \frac{8 - 54 + 20 + 11 + i(36 - 27 - 48)}{-4 - 6i} = \frac{-15 - 39i}{-4 - 6i} = \frac{15 + 39i}{4 + 6i} = \frac{(15 + 39i)(4 - 6i)}{4^2 - (6i)^2} = \\
&= \frac{60 + 234 + i(156 - 90)}{4^2 + 6^2} = \frac{294 + 66i}{52} = \frac{147}{26} + \frac{33}{26}i.
\end{aligned}$$

Luego, para G_2:

$$\begin{aligned}
G_2(3+2i) &= \frac{(3+2i)^3 - 4(3+2i)^2 + 11}{(3+2i-2)^2 + 9} = \frac{27 + 54i - 36 - 8i - 4(9 + 12i - 4) + 11}{1 + 4i - 4 + 9} = \\
&= \frac{27 - 36 - 20 + 11 + i(54 - 8 - 48)}{6 + 4i} = \frac{-18 - 2i}{6 + 4i} = \frac{(-18 - 2i)(6 - 4i)}{6^2 + 4^2} = \\
&= \frac{-108 - 8 + i(72 - 12)}{52} = \frac{-116 + 60i}{52} = -\frac{29}{13} + \frac{15}{13}i.
\end{aligned}$$

Por tanto, la transformada inversa buscada es

$$\begin{aligned}
f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \frac{e^{2t}}{3}\left[\frac{147}{26}\cos 3t + \frac{33}{26}\operatorname{sen} 3t\right] + \frac{e^{3t}}{2}\left[-\frac{29}{13}\cos 2t + \frac{15}{13}\operatorname{sen} 2t\right] = \\
&= \frac{e^{2t}}{78}\left[147\cos 3t + 33\operatorname{sen} 3t\right] + \frac{e^{3t}}{26}\left[-29\cos 2t + 15\operatorname{sen} 2t\right].
\end{aligned}$$

□

Factores cuadráticos irreducibles repetidos

Basta para los objetivos del texto considerar el ejemplo siguiente resuelto con la ecuación 6.19.

Ejemplo 6.5.26 *Determinar la transformada inversa de* $F(s) = \dfrac{1}{s(s^2+1)^2}$.

▼ Tenemos en este caso que $Q(s) = s(s^2+1)^2 = s(s-i)^2(s+i)^2$ tiene dos raíces complejas dobles, a saber: $s = i, -i$. Así que, de acuerdo con la ecuación 6.19, tenemos que la transformada inversa es la suma de tres funciones $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ dadas por

$$f_1(t) = \lim_{s\to 0}\left(sF(s)e^{st}\right) = \lim_{s\to 0}\frac{e^{st}}{(s^2+1)^2} = 1.$$

$$f_2(t) = \lim_{s\to i}\frac{d}{ds}\left[(s-i)^2F(s)e^{st}\right] = \lim_{s\to i}\frac{d}{ds}\left[\frac{e^{st}}{s(s+i)^2}\right] =$$

$$= \lim_{s\to i}\frac{s(s+i)^2te^{st} - e^{st}[(s+i)^2 + 2s(s+i)]}{s^2(s+i)^4} =$$

$$= \frac{i(2i)^2te^{it} - e^{it}[(2i)^2 + 2i(2i)]}{i^2(2i)^4} = \frac{-4ite^{it} + 8e^{it}}{-16} = \frac{1}{4}ite^{it} - \frac{1}{2}e^{it}.$$

$$f_3(t) = \lim_{s\to -i}\frac{d}{ds}\left[(s+i)^2F(s)e^{st}\right] = \lim_{s\to -i}\frac{d}{ds}\left[\frac{e^{st}}{s(s-i)^2}\right] =$$

$$= \lim_{s\to -i}\frac{s(s-i)^2te^{st} - e^{st}[(s-i)^2 + 2s(s-i)]}{s^2(s-i)^4} =$$

$$= \frac{-i(-2i)^2te^{-it} - e^{-it}[(-2i)^2 - 2i(-2i)]}{(-i)^2(-2i)^4} = \frac{4ite^{-it} + 8e^{-\hat{\imath}t}}{-16} = -\frac{1}{4}ite^{-it} - \frac{1}{2}e^{-it}.$$

De forma que la transformada inversa está dada por

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = 1 + \frac{1}{4}ite^{it} - \frac{1}{2}e^{it} - \frac{1}{4}ite^{-it} - \frac{1}{2}e^{-it} =$$

$$= 1 + \frac{1}{4}it\left(e^{it} - e^{-it}\right) - \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{4}it(2i\operatorname{sen} t) - \frac{1}{2}2\cos t = 1 - \frac{1}{2}t\operatorname{sen} t - \cos t.$$

□

Ejercicios 6.5.2 *Aplicación de la TL para resolver ED. Método de Heaviside.* Soluciones en la página 25
Calcular $\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$ *de las funciones siguientes, utilizando el método de Heaviside:*

1. $F(s) = \dfrac{3s+2}{(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)}$.
2. $F(s) = \dfrac{2s}{(s-1)^2(s+2)^3}$.
3. $F(s) = \dfrac{s^2+s-1}{(s-1)^2(s^2+1)(s-3)}$.
4. $F(s) = \dfrac{1}{(s-1)^2(s^2+4)(s^2+1)}$.
5. $F(s) = \dfrac{4}{(s^2+1)^3(s-2)}$.

Ejercicios 6.5.1 *Aplicación de la TL para resolver ED. Fracciones parciales.* *Página 9*

1. $f(t) = 5e^{-2t} - e^{-t}$.
2. $f(t) = -1 + 2t + e^{-t} - te^{-t}$.
3. $f(t) = -\frac{7}{5}e^{-2t} + \frac{7}{5}\cos t + \frac{6}{5}\operatorname{sen} t$.
4. $f(t) = -\frac{8}{5}\cos 2t - \frac{9}{10}\operatorname{sen} 2t + \frac{23}{5}\cos 3t + \frac{19}{15}\operatorname{sen} 3t$.
5. $h(t) = -\frac{2}{3} + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{2}t\cos t$.

Ejercicios 6.5.2 *Aplicación de la TL para resolver ED. Método de Heaviside.* *Página 24*

1. $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = -\frac{5}{6}e^{t} + 4e^{2t} - \frac{11}{2}e^{3t} + \frac{7}{3}e^{4t}$.
2. $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{2}{27}te^{t} - \frac{2}{9}t^2e^{-2t} - \frac{2}{27}te^{-2t}$.
3. $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = -\frac{5}{8}e^{t} - \frac{1}{4}te^{t} + \frac{7}{20}\cos t + \frac{1}{20}\operatorname{sen} t + \frac{11}{40}e^{3t}$.
4. $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{10}te^{t} - \frac{7}{50}e^{t} - \frac{2}{75}\cos 2t + \frac{1}{50}\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{6}\cos t$.
5. $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{4}{125}e^{2t} + \frac{1}{5}t^2\operatorname{sen} t + \frac{1}{10}t^2\cos t - \frac{9}{50}t\operatorname{sen} t - \frac{103\operatorname{sen} t}{125} + \frac{19}{25}t\cos t - \frac{4\cos t}{125}$.