CAPÍTULO

6

La Transformada de Laplace

6.4.8 Transformada de una función periódica

Recordemos que una función f es periódica con periodo $p > 0$, si satisface:

$$f(t + p) = f(t)\text{ , para toda } t.$$

Para el cálculo de la TL de una función de este tipo, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{ f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \\ &= \int_0^p e^{-st} f(t)\,dt + \int_p^{2p} e^{-st} f(t)\,dt + \cdots + \underbrace{\int_{np}^{(n+1)p} e^{-st} f(t)\,dt}_{(*)} + \cdots\end{aligned}$$

Si ahora, tomamos la integral $(*)$, y hacemos el cambio de variable $t = u + np$ (con lo cual $dt = du$); hallamos que $t = np \Rightarrow u = 0$ & $t = (n+1)p \Rightarrow u = p$. Entonces, por la periodicidad de f:

$$\begin{aligned}\int_{np}^{(n+1)p} e^{-st} f(t)\,dt &= \int_0^p e^{-s(u+np)} f(u + np)\,du = \\ &= e^{-nps} \int_0^p e^{-su} f(u)\,du.\end{aligned}$$

De esta manera:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{ f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \\ &= \int_0^p e^{-st} f(t)\,dt + e^{-ps} \int_0^p e^{-st} f(t)\,dt + \cdots + e^{-nps} \int_0^p e^{-st} f(t)\,dt + \cdots = \\ &= (1 + e^{-ps} + \cdots + e^{-nps} + \cdots) \int_0^p e^{-st} f(t)\,dt. \qquad (6.1)\end{aligned}$$

1. canek.azc.uam.mx: 24/ 9/ 2010

En el último resultado hemos tomado en cuenta que la variable de integración es muda, es decir:

$$\int_0^p e^{-su} f(u)\,du = \int_0^p e^{-st} f(t)\,dt.$$

Ahora bien, lo que aparece entre paréntesis en (6.1) es una serie geométrica, con razón $r = e^{-ps}$, para la cual se tiene, en caso de convergencia, el siguiente resultado:

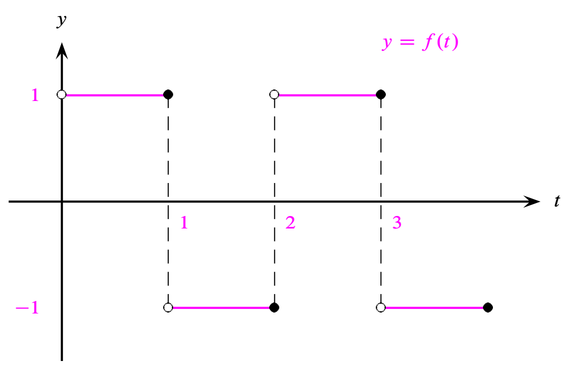
$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots = \frac{1}{1-r}, \text{ si } |r| < 1.$$

En nuestro caso, con $|r| = e^{-ps} = \dfrac{1}{e^{ps}} < 1$ (para $s > 0$), obtenemos finalmente:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)\,dt. \tag{6.2}$$

Observamos que esta fórmula es en cierto sentido la misma que aparece en la definición de TL con dos particularidades: la primera es que sólo se integra a lo largo de un periodo, la segunda es que se introduce el factor $\dfrac{1}{1-e^{-ps}}$.

Ejemplo 6.4.1 *Calcular la TL de la función f cuya gráfica se muestra en la siguiente figura:*



▼ Primero, observamos que se tiene una función periódica con periodo $p = 2$ y que la expresión analítica de esta función en el intervalo $(0, 2]$ es

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \le 1; \\ -1, & \text{si } 1 < t \le 2. \end{cases}$$

Luego, de acuerdo con el resultado recién expuesto:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} f(t)\,dt = \frac{1}{1-e^{-2s}} \left[\int_0^1 e^{-st}(1)\,dt + \int_1^2 e^{-st}(-1)\,dt \right] = \\
&= \frac{1}{1-e^{-2s}} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^1 + \frac{1}{s} e^{-st} \Big|_1^2 \right] = \frac{1}{s(1-e^{-2s})} \left[(1-e^{-s}) + (e^{-2s} - e^{-s}) \right] = \\
&= \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s(1-e^{-2s})} = \frac{(1-e^{-s})^2}{s(1-e^{-2s})} = \frac{(1-e^{-s})^2}{s(1+e^{-s})(1-e^{-s})} = \frac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})}.
\end{aligned}$$

Aunque éste es un resultado perfectamente válido, todavía es posible dar una expresión alternativa; sólo debemos recordar que la función tangente hiperbólica se define por

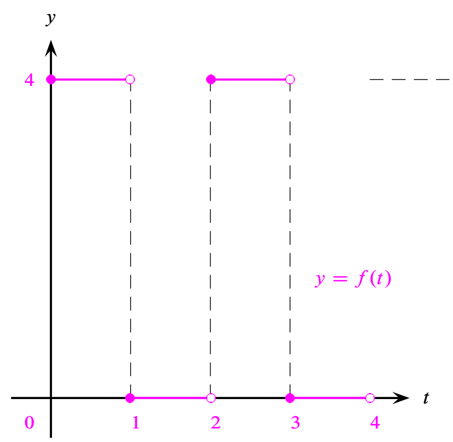
$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Si en la última expresión multiplicamos numerador y denominador por $e^{\frac{s}{2}}$ hallamos finalmente:

$$\mathcal{L}\{ f(t)\} = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 + e^{-s})} \cdot \frac{e^{\frac{s}{2}}}{e^{\frac{s}{2}}} = \frac{e^{\frac{s}{2}} - e^{-\frac{s}{2}}}{s(e^{\frac{s}{2}} + e^{-\frac{s}{2}})} = \frac{1}{s}\tanh\left(\frac{s}{2}\right).$$

□

Ejemplo 6.4.2 *Un sistema masa-resorte, con $m = 2$ kg y con $k = 8$ N/m, se encuentra inicialmente en reposo y en equilibrio. Para $t \geq 0$, una fuerza de excitación con periodo $p = 2$ y cuya gráfica se muestra a continuación, impulsa a la masa. Determinar la posición de ésta en cualquier instante.*



▼ Sea $x(t)$ la posición de la masa en cualquier instante, entonces ésta puede determinarse mediante la solución del siguiente PVI:

$$mx'' + kx = f(t), \quad \text{con} \quad x(0) = 0 \;\&\; x'(0) = 0;$$

o bien

$$2x'' + 8x = f(t), \quad \text{con} \quad x(0) = 0 \;\&\; x'(0) = 0;$$

donde

$$f(t) = \begin{cases} 4, & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{si } 1 \leq t < 2 \end{cases}, \quad f(t+2) = f(t), \text{ para todo } t \geq 0.$$

Observación. La función de exitación tiene una infinidad de discontinuidades de salto, por lo cual las técnicas de solución de ED estudiadas en capítulos anteriores son poco útiles; requerimos usar TL. Aplicando entonces TL en la ED:

$$\mathcal{L}\{2x''\} + \mathcal{L}\{8x\} = \mathcal{L}\{ f(t)\} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2[s^2X(s) - sx(0) - x'(0)] + 8X(s) = \frac{1}{1 - e^{-2s}}\int_0^2 e^{-st} f(t)\,dt,$$

donde $x(t) \longleftrightarrow X(s)$. Ahora la integral en el miembro derecho queda:

$$\int_0^2 e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^1 e^{-st} f(t)\,dt + \int_1^2 e^{-st} f(t)\,dt = 4\int_0^1 e^{-st}\,dt = -\frac{4}{s}e^{-st}\Big|_0^1 = \frac{4(1 - e^{-s})}{s}.$$

Con este cálculo, e incorporando las condiciones iniciales $x(0) = x'(0) = 0$, hallamos:

$$2s^2X(s) + 8X(s) = \frac{4}{1 - e^{-2s}}\left(\frac{1 - e^{-s}}{s}\right) \Rightarrow 2X(s)(s^2 + 4) = \frac{4}{(1 - e^{-s})(1 + e^{-s}))}\left(\frac{1 - e^{-s}}{s}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2X(s)(s^2 + 4) = \frac{4}{s(1 + e^{-s})}.$$

De donde
$$X(s) = \frac{2}{s(s^2+4)} \cdot \frac{1}{1+e^{-s}}.$$

Para el cálculo de $x(t)$ necesitamos hallar $\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$, por lo cual procedemos en dos estapas:

1. Determinar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{s(s^2+4)}\right\}$.
2. Expresamos $\dfrac{1}{1+e^{-s}}$ como una suma infinita de términos, y aplicamos la segunda propiedad de traslación.

De esta manera, calculamos en primer lugar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{s(s^2+4)}\right\}$. Por la propiedad de la transformada de una integral, se tiene:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s(s^2+4)}\right\} = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} dt = \int_0^t \operatorname{sen} 2t\, dt = -\frac{1}{2}\cos 2t\,\Big|_0^t = -\frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos 2t).$$

Ahora, expresemos $\dfrac{1}{1+e^{-s}}$ como una suma infinita de términos. Para ello, recordemos que

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots = \frac{1}{1-r}, \text{ con } |\,r\,| < 1.$$

Si en este resultado consideramos $r = -e^{-s}$, entonces para $s > 0$ se tiene $|\,r\,| = e^{-s} < 1$; por lo tanto:

$$\frac{1}{1+e^{-s}} = 1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{3-s} + \cdots$$

De esta manera:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s(s^2+4)} \cdot \frac{1}{1+e^{-s}}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s(s^2+4)}(1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{3-s} + \cdots)\right\} =$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s(s^2+4)}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}\cdot\frac{2}{s(s^2+4)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2s}\cdot\frac{2}{s(s^2+4)}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-3s}\cdot\frac{2}{s(s^2+4)}\right\} + \cdots$$

Resulta que

$$x(t) = \frac{1}{2}[1-\cos 2t] - \frac{1}{2}u(t-1)[1-\cos 2(t-1)] + \frac{1}{2}u(t-2)[1-\cos 2(t-2)] - \frac{1}{2}u(t-3)[1-\cos 2(t-3)] + \cdots$$

o bien que

$$x(t) = \frac{1}{2}[1-\cos 2t] + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u(t-n)[1-\cos 2(t-n)] = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u(t-n)[1-\cos 2(t-n)].$$

$\square$