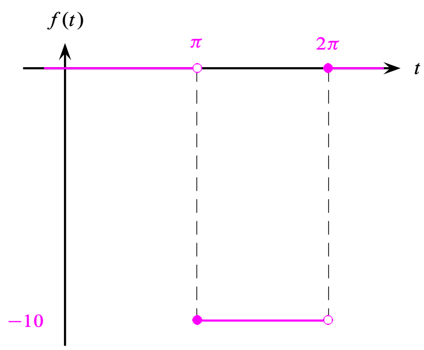
CAPÍTULO

6

La transformada de Laplace

6.6 Aplicaciones

Ejemplo 6.6.1 *Consideremos un sistema masa-resorte con $m = 2$ kg, $c = 4$ N·m/s y $k = 10$ N/m. Supongamos que el sistema está inicialmente en reposo y en equilibrio por lo cual $x(0) = x'(0) = 0$ y que la masa es impulsada por una fuerza de excitación $f(t)$ cuya gráfica se muestra en la figura siguiente. Encontrar la posición de la masa en cualquier instante.*



▼ La posición $x(t)$ de la masa m está dada por la solución del PVI:

$$2x''(t) + 4x'(t) + 10x(t) = f(t) = \begin{cases} -10, & \text{si } \pi \le t < 2\pi \\ 0, & \text{si } t \notin [\pi, 2\pi) \end{cases}, \text{ con } \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

La función $f(t)$ puede escribirse como $f(t) = -10[u(t-\pi) - u(t-2\pi)]$; entonces por la linealidad de la TL tenemos:

$$F(s) = \mathcal{L}\{ f(t)\} = \frac{10e^{-2\pi s}}{s} - \frac{10e^{-\pi s}}{s}.$$

Ahora, tomamos TL en ambos miembros de la ED para obtener:

$$2[s^2X(s) - sx(0) - x'(0)] + 4[sX(s) - x(0)] + 10X(s) = F(s).$$

1. canek.azc.uam.mx: 24/ 9/ 2010

Al considerar las condiciones iniciales y la expresión de $F(s)$, tenemos que:

$$\begin{aligned} 2s^2X(s) + 4sX(s) + 10X(s) &= \frac{10e^{-2\pi s}}{s} - \frac{10e^{-\pi s}}{s} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2(s^2+2s+5)X(s) &= \frac{10e^{-2\pi s}}{s} - \frac{10e^{-\pi s}}{s} \Rightarrow \\ \Rightarrow X(s) &= \frac{5e^{-2\pi s}}{s(s^2+2s+5)} - \frac{5e^{-\pi s}}{s(s^2+2s+5)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para encontrar $x(t)$, lo único que resta es obtener la transformada inversa de Laplace.
En primer lugar, por la primera propiedad de traslación, se tiene que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2s+5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+4}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2+4}\right\} = \frac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen} 2t.$$

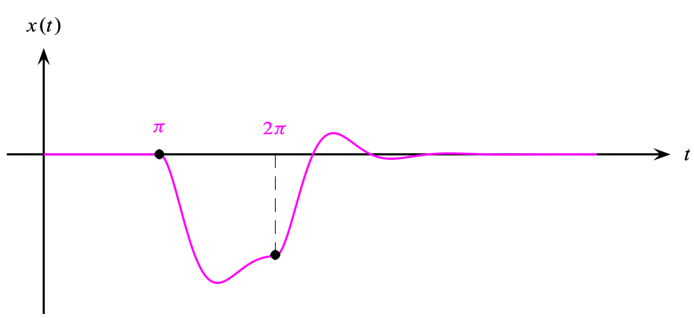
Luego, calculamos $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s^2+2s+5)}\right\}$ utilizando la propiedad de la transformada de una integral:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+2s+5)}\right\} &= \int_0^t \frac{1}{2}e^{-u}\operatorname{sen} 2u\,du = -\frac{1}{10}\left[e^{-u}\left(2\cos 2u + \operatorname{sen} 2u\right)\Big|_0^t\right] = \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{10}e^{-t}[2\cos 2t + \operatorname{sen} 2t]. \end{aligned}$$

Finalmente, al utilizar la segunda propiedad de traslación y la periodicidad de las funciones seno y coseno, determinamos que

$$\begin{aligned} x(t) &= 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2\pi s}}{s(s^2+2s+5)}\right\} - 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+2s+5)}\right\} = \\ &= \left\{1 - \frac{1}{2}e^{-(t-2\pi)}[2\cos(2t-4\pi) + \operatorname{sen}(2t-4\pi)]\right\}u(t-2\pi) - \\ &\qquad - \left\{1 - \frac{1}{2}e^{-(t-\pi)}[2\cos(2t-2\pi) + \operatorname{sen}(2t-2\pi)]\right\}u(t-\pi) = \\ &= \left\{1 - \frac{1}{2}e^{-(t-2\pi)}[2\cos 2t + \operatorname{sen} 2t]\right\}u(t-2\pi) - \left\{1 - \frac{1}{2}e^{-(t-\pi)}[2\cos 2t + \operatorname{sen} 2t]\right\}u(t-\pi). \end{aligned}$$

Podemos apreciar, en la gráfica de la función posición $x(t)$, que presentamos a continuación, la excitación que sobre el sistema tiene la función $f(t)$ en el intervalo $[\pi, 2\pi]$. Advierta que, después de que la fuerza cesa, el sistema tiende al reposo por efecto de la fuerza de amortiguamiento.



□

Ejemplo 6.6.2 *Calcular la corriente en un circuito en serie RLC cuyos componentes son: un resistor de* $2\,\Omega$, *un inductor de* 1 *H, un capacitor de* 1 *F y una fuente de voltaje que suministra (en voltios):*

$$V(t) = \begin{cases} t, & \text{si } 0 \le t < 1; \\ 2-t, & \text{si } 1 \le t \le 2; \\ 0, & \text{si } t > 2. \end{cases}$$

(Éste es el ejemplo **??** *de la introducción.)*

▼ Aplicando los valores L, R, y C en la ED del circuito:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = V(t),$$

obtenemos la ecuación integro-diferencial, suponiendo corriente inicial nula:

$$\frac{dI}{dt} + 2I + \int_0^t I(t)dt = V(t), \quad \text{con} \quad I(0) = 0.$$

Calculamos la TL de la función de voltaje. Lo primero que observamos es que

$$V(t) = t + (2-2t)u(t-1) + (t-2)u(t-2) = t - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2).$$

Por lo tanto, por la segunda propiedad de traslación,

$$\mathfrak{L}\{V(t)\} = \frac{1}{s^2} - 2\frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2} = \frac{e^{-2s} - 2e^{-s} + 1}{s^2}\,.$$

Si aplicamos TL en ambos miembros de la ecuación integro-diferencial, utilizando las propiedades requeridas (transformada de una derivada y de una integral), encontramos:

$$s\tilde{I}(s) - I(0) + 2\tilde{I}(s) + \frac{\tilde{I}(s)}{s} = \frac{e^{-2s} - 2e^{-s} + 1}{s^2}\ \text{, donde }\ I(t) \longleftrightarrow \tilde{I}(s).$$

Ahora, utilizando $I(0) = 0$, y multiplicando ambos miembros de la ecuación anterior por s, hallamos:

$$s^2\tilde{I}(s) + 2s\tilde{I}(s) + \tilde{I}(s) = \frac{e^{-2s} - 2e^{-s} + 1}{s} \Rightarrow \tilde{I}(s) = \frac{e^{-2s} - 2e^{-s} + 1}{s(s+1)^2}\,.$$

Todo lo que resta es el cálculo de la transformada inversa. Procedemos de la siguiente manera.
Primero, aplicamos fracciones parciales a la expresión $\dfrac{1}{s(s+1)^2}$; obtenemos:

$$\frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}\,.$$

Por lo tanto:

$$\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}\right\} = 1 - e^{-t} - te^{-t}\,.$$

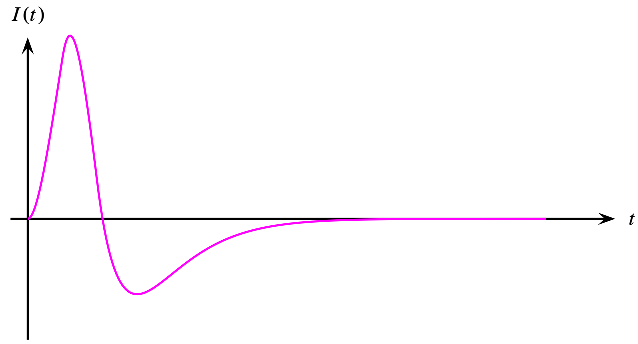
Aplicamos la segunda propiedad de traslación al resultado anterior:

$$\begin{aligned} I(t) &= \mathfrak{L}^{-1}\{I(s)\} = \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s} - 2e^{-s} + 1}{s(s+1)^2}\right\} = \\ &= \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s(s+1)^2}\right\} - 2\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s+1)^2}\right\} + \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)^2}\right\}\,. \end{aligned}$$

De donde:

$$I(t) = [1 - e^{-(t-2)} - (t-2)e^{-(t-2)}]u(t-2) - 2[1 - e^{-(t-1)} - (t-1)e^{-(t-1)}]u(t-1) + [1 - e^{-t} - te^{-t}].$$

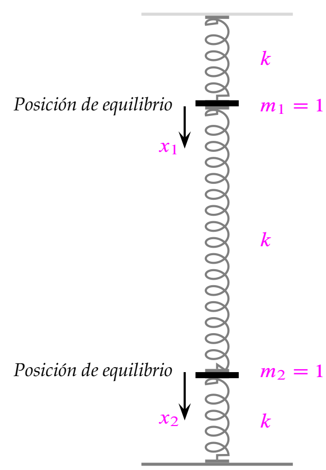
La gráfica de la función de corriente es la siguiente:



La corriente es prácticamente cero a partir del décimo segundo después del cierre del interruptor en el circuito.

□

Ejemplo 6.6.3 *Dos masas iguales de 1 kg se encuentran vinculadas mediante 3 resortes de masas despreciables y constantes de restitución k, como se muestra en la figura siguiente. El sistema está dispuesto verticalmente y las masas están desprovistas de rozamiento así como de fuerzas de excitación. Añadimos ahora la información desde la cual se rompe el equilibrio $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$, $x_1'(0) = 3$, $x_2'(0) = -3$. Determinar la posición de cada masa en cualquier instante, si $k = 3$ N/m. (Éste es el ejemplo **??** de la introducción.)*



▼ Enumeramos los resortes de arriba hacia abajo con los números 1, 2 y 3. Cuando el sistema está en movimiento, el resorte 2 está sujeto a elongación y compresión, por consiguiente su elongación neta es $x_2 - x_1$. Por lo tanto, de la ley de Hooke, deducimos que los resortes 1 y 2 ejercen fuerzas $-kx_1$ y $k(x_2 - x_1)$ respectivamente sobre la masa m_1. De esta manera, si no hay fuerzas externas ni fuerzas de amortiguamiento, entonces la fuerza neta sobre la masa m_1 es $-kx_1 + k(x_2 - x_1)$. Ahora por la segunda ley de Newton, tenemos:

$$m_1 x_1'' = -kx_1 + k(x_2 - x_1).$$

De manera similar, la fuerza neta ejercida en la masa m_2 se origina por la elongación y compresión de los resortes 2 y 3. De manera más concreta, las fuerzas ejercidas sobre la masa 2 son, por el resorte 3, $-kx_2$; y por el resorte 2, $-k(x_2 - x_1)$. Luego, por la segunda ley de Newton:

$$m_2 x_2'' = -kx_2 - k(x_2 - x_1).$$

Si ahora usamos los valores de las masas $m_1 = m_2 = 1$ y el valor de $k = 3$, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones que resolveremos utilizando TL.

$$\begin{cases} x_1'' = -3x_1 + 3(x_2 - x_1) \\ x_2'' = -3x_2 - 3(x_2 - x_1) \end{cases}, \text{ con } x_1(0) = 1, x_2(0) = 1, x_1'(0) = 3 \;\&\; x_2'(0) = -3.$$

Aplicamos TL en ambos miembros de cada ecuación y obtenemos:

$$\begin{cases} s^2F(s) - sx_1(0) - x_1'(0) = -3F(s) + 3[G(s) - F(s)]; \\ s^2G(s) - sx_2(0) - x_2'(0) = -3G(s) - 3[G(s) - F(s)], \end{cases}$$

donde $x_1(t) \longleftrightarrow F(s)$ & $x_2(t) \longleftrightarrow G(s)$. Si ahora aplicamos las condiciones iniciales, el sistema anterior se convierte en

$$\begin{cases} s^2F(s) - s - 3 = -3F(s) + 3[G(s) - F(s)]; \\ s^2G(s) - s + 3 = -3G(s) - 3[G(s) - F(s)]. \end{cases}$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, $F(s)$ y $G(s)$. Ordenamos el último sistema con el propósito de despejar nuestras incógnitas:

$$\begin{cases} (s^2+6)F(s) - 3G(s) = s + 3 \\ 3F(s) - (s^2+6)G(s) = -s + 3 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} (s^2+6)F(s) - 3G(s) = s + 3; \\ -3F(s) + (s^2+6)G(s) = s - 3. \end{cases}$$

Si utilizamos la regla de Cramer para la solución del anterior sistema, hallamos:

$$F(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + 9s + 9}{s^4 + 12s^2 + 27} \quad \& \quad G(s) = \frac{s^3 - 3s^2 + 9s - 9}{s^4 + 12s^2 + 27}.$$

El denominador de cada una de las expresiones es el mismo, y puede escribirse como

$$s^4 + 12s^2 + 27 = (s^2+6)^2 - 9 = (s^2+9)(s^2+3).$$

De esta manera:

$$F(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + 9s + 9}{(s^2+9)(s^2+3)} \quad \& \quad G(s) = \frac{s^3 - 3s^2 + 9s - 9}{(s^2+9)(s^2+3)}.$$

De donde, al utilizar fracciones parciales, encontramos que

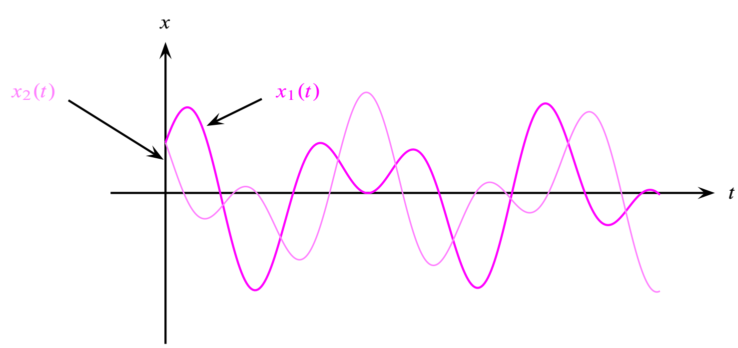
$$F(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + 9s + 9}{(s^2+9)(s^2+3)} = \frac{s}{s^2+3} + \frac{3}{s^2+9} \quad \& \quad G(s) = \frac{s^3 - 3s^2 + 9s - 9}{(s^2+9)(s^2+3)} = \frac{s}{s^2+3} - \frac{3}{s^2+9}.$$

Por lo tanto,

$$x_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3} + \frac{3}{s^2+9}\right\} = \cos(\sqrt{3}t) + \operatorname{sen}(3t);$$

$$x_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3} - \frac{3}{s^2+9}\right\} = \cos(\sqrt{3}t) - \operatorname{sen}(3t).$$

La siguiente gráfica muestra ambas funciones:



□

Ejercicios 6.6.1 *Aplicaciones.* *Soluciones en la página 8*
Usar la TL para resolver los siguientes problemas:

1. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{dx}{dt} + 2x = t, \quad \text{con} \quad x(0) = x'(0) = 0\,.$

2. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4x = \operatorname{sen} 3t, \quad \text{con} \quad x(0) = x'(0) = 0\,.$

3. $\dfrac{d^4x}{dt^4} - 2\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = \operatorname{sen} t, \quad \text{con} \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0\,.$

4. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = f(t), \quad \text{con} \quad y(0) = y'(0) = 0, \text{donde } f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \le t < 5; \\ \dfrac{t-5}{5}, & \text{si } 5 \le t < 10; \\ 1, & \text{si } t \ge 10. \end{cases}$

5. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = f(t), \quad \text{con} \quad y(0) = 0 \;\&\; y'(0) = 1, \text{donde } f(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{2}, & \text{si } 0 \le t < 6; \\ 3, & \text{si } t \ge 6. \end{cases}$

6. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = u(t-\pi) - u(t-3\pi), \;\text{con} \quad y(0) = y'(0) = 0\,.$

7. $\begin{cases} 3\dfrac{dx}{dt} + 2x + \dfrac{dy}{dt} = 1 \\ \dfrac{dx}{dt} + 4\dfrac{dy}{dt} + 3y = 0 \end{cases}, \text{con} \quad x(0) = y(0) = 0\,.$

8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 4y + \operatorname{sen} t \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y + 1 \end{cases}, \text{con} \quad x(0) = 0 \;\&\; y(0) = 1\,.$

9. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + y = 1 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + x = 0 \end{cases}, \text{con} \quad x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0\,.$

10. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + 2x = 0 \\ 2\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} = \cos t \end{cases}, \text{con} \quad x(0) = 0, x'(0) = 0 \;\&\; y(0) = 0\,.$

11. $\begin{cases} y' + 2y + 6\displaystyle\int_0^t z\,dt = -2 \\ y' + z' + z = 0 \end{cases}, \text{con} \quad y(0) = -5 \;\&\; z(0) = 6\,.$

12. Calcular $y(t)$, si $y' + 3y + 2\displaystyle\int_0^t y\,dt = f(t)$, con $y(0) = 1$ y $f(t) = \begin{cases} 2, & \text{si } 1 \le t \le 2; \\ 0, & \text{si } t \notin [1,2]\,. \end{cases}$

13. Un circuito eléctrico consiste de una resistencia de R ohms en serie con un condensador de capacitancia C farads, un generador de E volts y un interruptor. Si en el tiempo $t = 0$ se cierra el interruptor y si la carga inicial en el capacitor es cero, determine la carga en el condensador en cualquier tiempo. Suponga que R, C y E son constantes.

14. Un paracaidista cae partiendo del reposo. El peso combinado de él y su paracaídas es W. El paracaídas ejerce una fuerza en ambos (por resistencia del aire) que es directamente proporcional a la velocidad durante la caída, esto es $F_R \propto v$. El paracaidista cae verticalmente, y se requiere hallar su posición en cualquier momento.

    a. Si se supone que el paracaídas está abierto desde el momento inicial.

    b. Si se supone que el paracaídas se abre 10 s después de iniciada la caída.

15. Una droga entra y sale de un órgano de volumen V_0 cm^3 a una tasa de β cm^3/s, donde V_0, y β son constantes. Supongamos que, en el tiempo $t = 0$, la concentración de la droga es 0 y que, al administrar la droga, dicha concentración aumenta linealmente hasta un máximo de k en el tiempo $t = t_0$, en el cual el proceso se detiene. Determinar la concentración de la droga en el órgano en todo instante t y su máximo valor.

16. Una masa que pesa 32 lb se encuentra sujeta al extremo de un resorte ligero que se estira 1 pie cuando se le aplica una fuerza de 4 lb. Si la masa se encuentra en reposo en su posición de equilibrio cuando $t = 0$ y si, en ese instante, se aplica una fuerza de excitación $f(t) = \cos 2t$ que cesa abruptamente en $t = 2\pi$ s, determinar la función de posición de la masa en cualquier instante, si se permite a la masa continuar su movimiento sin impedimentos.

17. Un circuito RLC, con $R = 110\,\Omega$, $L = 1$ H y $C = 0.001$ F tiene conectada una batería que proporciona 90 V. Suponga que en $t = 0$ no hay corriente en el circuito ni carga en el condensador y que, en el mismo instante, se cierra el interruptor por 1 s. Si al tiempo $t = 1$ se abre el interruptor, y así se conserva, encuentre la corriente resultante en el circuito.

Ejercicios 6.6.1 *Aplicaciones. Página 6*

1. $x(t) = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}t + e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t}$.
2. $x(t) = \frac{3}{10}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{5}\operatorname{sen} 3t$.
3. $x(t) = \frac{1}{8}[(t-2)e^{t} + (t+2)e^{-t} + 2\operatorname{sen} t]$.
4. $y(t) = [2(t-5) - \operatorname{sen}(2(t-5))]u(t-5) - \frac{1}{40}[2(t-10) - \operatorname{sen}(2(t-10))]u(t-10)$.
5. $y(t) = \frac{1}{2}[t + \operatorname{sen} t - (t - 6 - \operatorname{sen}(t-6))u(t-6)]$.
6. $y(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t[u(t-\pi) - u(t-3\pi)]$.
7. $x(t) = \frac{1}{2} - \frac{3}{10}e^{-\frac{6}{11}t} - \frac{1}{5}e^{-t}, \qquad y(t) = -\frac{1}{5}e^{-\frac{6}{11}t} + \frac{1}{5}e^{-t}$.
8. $x(t) = -4 + \frac{7}{2}e^{t} + e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t + \frac{3}{2}\operatorname{sen} t, \quad y(t) = -3 + \frac{7}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t} + \operatorname{sen} t$.
9. $x(t) = \frac{1}{4}e^{t} + \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t, \quad y(t) = 1 - \frac{1}{4}e^{t} - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t$.
10. $x(t) = \frac{1}{5}\cos t[1 - e^{-t}] + \frac{1}{5}\operatorname{sen} t[2 - 3e^{-t}], \quad y(t) = \frac{2}{5}\cos t[1 - e^{-t}] - \frac{1}{5}\operatorname{sen} t[1 + 6e^{-t}]$.
11. $y(t) = 2 - 3e^{-4t} - 4e^{t}, \quad z(t) = 4e^{-4t} + 2e^{t}$.
12. $y(t) = -e^{-t} + 2e^{-2t} + 2[e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)}]u(t-1) - 2(e^{-(t-2)} - e^{-2(t-2)})u(t-2)$.
13. $Q(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)EC$.
14. a. $y(t) = \frac{W}{\beta}t + \frac{W^2}{\beta^2 g}\left(e^{-\frac{\beta g}{W}t} - 1\right)$;

    b. $y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}gt^2, & \text{si } t < 10; \\ 50g + \frac{W}{\beta}(t-10) + \left(\frac{10W}{\beta} - \frac{W^2}{\beta^2 g}\right)\left[1 - e^{-\frac{\beta g}{W}(t-10)}\right], & \text{si } t \geq 10. \end{cases}$
15. $x(t) = \begin{cases} \frac{V_0 k}{\beta t_0}(e^{-\frac{\beta}{V_0}t_0} - 1) + \frac{k}{t_0}t, & \text{si } 0 \leq t \leq t_0; \\ \frac{V_0 k}{\beta t_0}e^{-\frac{\beta t}{V_0}} + \left(k - \frac{V_0 k}{\beta t_0}\right)e^{-\frac{\beta(t-t_0)}{V_0}}, & \text{si } t > t_0; \end{cases}$

    $x_{\text{máx}} = x(t_0) = k - \frac{V_0 k}{\beta t_0}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{V_0}t_0}\right)$.
16. $x(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t\operatorname{sen}(2t), & \text{si } 0 \leq t < 2\pi; \\ \left(\frac{1}{4}t - \frac{1}{16}\right)\operatorname{sen} 2t + \left(\frac{3}{16}t - \frac{3\pi}{8}\right)\cos 2t, & \text{si } t \geq 2\pi. \end{cases}$
17. $I(t) = \begin{cases} e^{-10t} - e^{-100t}, & \text{si } 0 \leq t < 1; \\ (1 - e^{10})e^{-10t} - (1 - e^{100})e^{-100t}, & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$