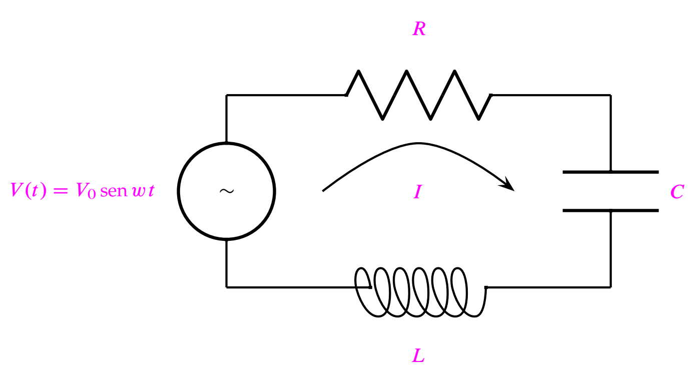
CAPÍTULO

# 5

# Aplicaciones de ED de segundo orden

### 5.3.7 Circuito RLC de corriente alterna




El último circuito que estudiaremos es el circuito RLC de corriente alterna (véase la figura anterior). En este caso la ecuación que modela la carga en el circuito es exactamente la ecuación (**??**), con $V(t) = V_0 \operatorname{sen} wt$. La ecuación que modela la carga es

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V_0 \operatorname{sen} wt. \tag{5.1}$$

Esta ecuación es equivalente a la ecuación de vibraciones amortiguadas forzadas que estudiamos en una sección previa. Nuevamente existen diferentes posibilidades de la solución dependiendo del valor de los coeficientes $R$, $L$ y $C$ que aparecen en la ecuación.

1. canek.azc.uam.mx: 23/ 9/ 2010

**Ejemplo 5.3.1** *Un circuito RLC de corriente alterna está formado por los siguientes elementos: una resistencia de* 4 $\Omega$, *un capacitor de* 4 *mF, un inductor de* 25 *mH y un fuente de voltaje* $V = 110\cos 60t$ *V. Determinar la carga y la corriente en todo tiempo, si inicialmente la carga sobre el capacitor es cero y no fluye corriente por el circuito.*

▼ La ecuación diferencial asociada al circuito RLC en serie de este ejemplo es

$$V = L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} \Rightarrow 0.025\frac{dI}{dt} + 4I + 250Q = 110\cos 60t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{d^2Q}{dt^2} + 160\frac{dQ}{dt} + 10^4 Q = 4400\cos 60t, \tag{5.2}$$

con las condiciones iniciales $Q(0) = 0$ & $I(0) = 0$. Esta ecuación se corresponde con un oscilador amortiguado y forzado. La ecuación auxiliar es

$$r^2 + 160r + 10^4 = 0.$$

Cuyas raíces son $r_{1,2} = -80 \pm 60i$. Como las raíces son complejas, la solución a la ecuación homogénea es de la forma

$$Q_c(t) = c_1 e^{-80t}\cos 60t + c_2 e^{-80t}\operatorname{sen} 60t.$$

Por otra parte, como la frecuencia de la fuente de voltaje no es igual a ninguna de la raíces de la ecuación auxiliar, la solución particular tiene la forma

$$Q_p(t) = A\cos 60t + B\operatorname{sen} 60t.$$

Derivando una y dos veces con respecto al tiempo, y después sustituyendo en la ecuación diferencial (5.2) obtenemos que

$$\begin{aligned}&-3\,600A\cos 60t - 3600B\operatorname{sen} 60t +\\ &+ 160\,(60B\cos 60t - 60A\operatorname{sen} 60t) +\\ &+ 10^4\,(A\cos 60t + B\operatorname{sen} 60t) = 4\,400\cos 60t.\end{aligned}$$

Simplificando resulta:

$$3\,200[(2A + 3B)\cos 60t + (2B - 3A)\operatorname{sen} 60t] = 4\,400\cos 60t.$$

De aquí se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}3\,200(2A + 3B) &= 4\,400;\\ 2B - 3A &= 0.\end{aligned}$$

Y su solución es $A = \dfrac{11}{52}$ & $B = \dfrac{33}{104}$. Finalmente, la solución particular es

$$Q_p(t) = \frac{11}{52}\cos 60t + \frac{33}{104}\operatorname{sen} 60t.$$

La carga está dada entonces por

$$Q(t) = Q_p(t) + Q_c(t) = \frac{11}{52}\cos 60t + \frac{33}{104}\operatorname{sen} 60t + c_1 e^{-80t}\cos 60t + c_2 e^{-80t}\operatorname{sen} 60t.$$

Derivando se obtiene la corriente

$$I(t) = e^{-80t}\cos 60t\,(-80c_1 + 60c_2) - e^{-80t}\operatorname{sen} 60t\,(80c_2 + 60c_1) - \frac{165}{13}\operatorname{sen} 60t + \frac{495}{26}\cos 60t.$$

En el tiempo $t = 0$, las condiciones iniciales implican que

$$\begin{aligned}0 = Q(0) &= \frac{11}{52} + c_1;\\ 0 = I(0) &= \frac{495}{26} - 80c_1 + 60c_2.\end{aligned}$$

Del sistema anterior, la solución es $c_1 = -\dfrac{11}{52}$ & $c_2 = -\dfrac{187}{312}$. Finalmente, la carga y la corriente son, para tiempos $t \geq 0$,

$$Q(t) = \frac{11}{52}\cos 60t + \frac{33}{104}\operatorname{sen} 60t - \frac{11}{52}e^{-80t}\cos 60t - \frac{187}{312}e^{-80t}\operatorname{sen} 60t \text{ C};$$
$$I(t) = -\frac{495}{26}e^{-80t}\cos 60t + \frac{2\,365}{39}e^{-80t}\operatorname{sen} 60t + \frac{495}{26}\cos 60t - \frac{165}{13}\operatorname{sen} 60t \text{ A}.$$

Observe nuevamente que tenemos términos transitorios los cuales desaparecen en el tiempo. La carga y la corriente que permanecen tienen la misma frecuencia que la fuente de voltaje y sólo se encuentran desfasadas.

□

**Ejercicios 5.3.7** *Circuito RLC de corriente alterna.* *Soluciones en la página 4*

1. Un circuito RLC está formado por un resistor $R = 12\ \Omega$, un capacitor $C = 0.1$ F y un inductor $L = 2$ H. Se conecta una fuente de voltaje que suministra $20\cos 5t$ V. Si inicialmente el capacitor está descargado y no circula corriente alguna por el circuito, encuentre una expresión para la carga y la corriente en todo tiempo $t$.

2. Se conecta en serie un resistor $R = 4\ \Omega$, un capacitor $C = 1$ F y un inductor $L = 4$ H, a una fuente de voltaje de corriente alterna $V(t) = 100\cos t$ V. Determinar la carga en el capacitor y la corriente sobre el circuito en el tiempo $t$, si originalmente el capacitor está descargado y la corriente es de 6 A.

3. Se conectan en serie un resistor $R = 4\,\Omega$, un capacitor $C = 0.05$ F, un inductor de $L = 0.2$ H y una fuente de voltaje alterna que suministra $120\cos 6t$ V. Determinar la carga en el capacitor y la corriente sobre el circuito en el tiempo $t$, si originalmente la carga es de 2 C y no circula corriente.

4. Un circuito RLC con constantes $L = 0.4$ H, $R = 3.2\ \Omega$ y $C = 0.1$ F se conecta a una fuente de voltaje que proporciona $20\cos 3t$ V. ¿Cuál será la carga en el capacitor y la corriente por el circuito, si al conectar la fuente, el capacitor tiene una carga de 5 C y circula una corriente de 12 A?

**Ejercicios 5.3.7** *Circuito RLC de corriente alterna.* *Página 3*

1. $Q(t) = -\dfrac{2}{13}\cos 5t + \dfrac{3}{13}\operatorname{sen} 5t - \dfrac{5}{52}e^{-t} + \dfrac{1}{4}e^{-5t}$ C;

   $I(t) = \dfrac{10}{13}\operatorname{sen} 5t + \dfrac{15}{13}\cos 5t + \dfrac{5}{52}e^{-t} - \dfrac{5}{4}e^{-5t}$ A.

2. $Q(t) = -12\cos t + 16\operatorname{sen} t + 12e^{-\frac{1}{2}t} - 4te^{-\frac{1}{2}t}$ C;

   $I(t) = 12\operatorname{sen} t + 16\cos t - 10e^{-\frac{1}{2}t} + 2te^{-\frac{1}{2}t}$ A.

3. $Q(t) = 2.0761\cos 6t + 3.8927\operatorname{sen} 6t - 0.0761e^{-10t} - 24.1176te^{-10t}$ C;

   $I(t) = -12.4567\operatorname{sen} 6t + 23.3564\cos 6t - 23.3564e^{-10t} + 241.176te^{-10t}$ A.

4. $Q(t) = \dfrac{25}{26}\cos 3t + \dfrac{75}{52}\operatorname{sen} 3t + \dfrac{105}{26}e^{-4t}\cos 3t + \dfrac{413}{52}e^{-4t}\operatorname{sen} 3t$ C;

   $I(t) = -\dfrac{75}{26}\operatorname{sen} 3t + \dfrac{225}{52}\cos 3t + \dfrac{399}{52}e^{-4t}\cos 3t - \dfrac{1141}{26}e^{-4t}\operatorname{sen} 3t$ A.