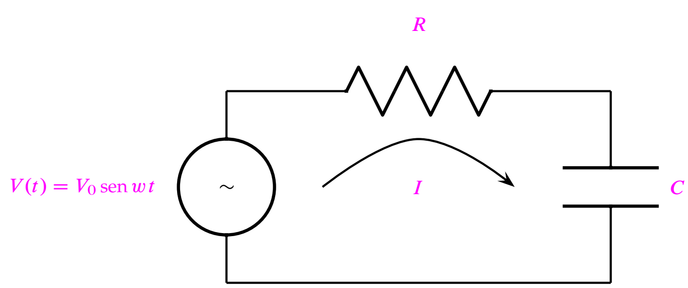
CAPÍTULO

# 5

# Aplicaciones de ED de segundo orden

### 5.3.4 Circuito RC de corriente alterna




En la figura anterior se muestra un circuito RC de corriente alterna; este circuito está formado por una malla simple con una fuente de voltaje $V(t)$ de tipo sinusoidal, un resistor $R$ y un capacitor $C$. De acuerdo con la ley de Kirchhoff de voltaje, tenemos entonces que la carga satisface a la ecuación diferencial

$$RI + \frac{Q}{C} = V \;\Rightarrow\; R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V_0 \operatorname{sen} wt \;\Rightarrow \tag{5.1}$$
$$\Rightarrow\; \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = \frac{V_0}{R} \operatorname{sen} wt.$$

Ésta es una ED lineal no homogénea de primer orden cuyo factor integrante es $e^{\frac{1}{RC}t}$. Obtenemos entonces:

$$e^{\frac{1}{RC}t}\left(\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC}\right) = \frac{V_0}{R}e^{\frac{1}{RC}t} \operatorname{sen} wt \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(e^{\frac{1}{RC}t}Q\right) = \frac{V_0}{R}e^{\frac{1}{RC}t} \operatorname{sen} wt.$$

1. canek.azc.uam.mx: 23/ 9/ 2010

Si integramos esta última ecuación, obtenemos:

$$e^{\frac{1}{RC}t}Q = \int \frac{V_0}{R} e^{\frac{1}{RC}t} \operatorname{sen} wt\, dt \;\Rightarrow\; Q = \frac{V_0 e^{-\frac{1}{RC}t}}{R} \int e^{\frac{1}{RC}t} \operatorname{sen} wt\, dt.$$

Utilizando la formula de integración

$$\int e^{at} \operatorname{sen} bt\, dt = \frac{e^{at}(a \operatorname{sen} bt - b\cos bt)}{a^2+b^2},$$

obtenemos:

$$Q(t) = \frac{V_0 e^{-\frac{1}{RC}t}}{R}\left[\frac{e^{\frac{1}{RC}t}\left(\frac{1}{RC}\operatorname{sen} wt - w\cos wt\right)}{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + w^2} + K\right]. \tag{5.2}$$

Usando la condición $Q(0) = 0$, hallamos que

$$0 = \frac{V_0}{R}\left[\frac{-w}{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + w^2} + K\right] \;\Rightarrow\; K = \frac{w}{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + w^2}.$$

Sustituyendo $K$ en (5.2) y simplificando tenemos:

$$\begin{aligned} Q(t) &= \frac{V_0}{R\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + Rw^2}\left[\frac{1}{RC}\operatorname{sen} wt - w\cos wt + we^{-\frac{1}{RC}t}\right] = \qquad (5.3)\\ &= \frac{V_0RC^2}{1+R^2C^2w^2}\left[\frac{1}{RC}\operatorname{sen} wt - w\cos wt + we^{-\frac{1}{RC}t}\right]. \end{aligned}$$

Observe que, con el tiempo, se obtiene una expresión para $Q(t)$ donde no aparece el término exponencial, es decir, para $t \to \infty$, obtenemos la carga de estado estable dada por:

$$Q(t) = \frac{V_0}{R\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + Rw^2}\left[\frac{1}{RC}\operatorname{sen} wt - w\cos wt\right],$$

que se puede escribir como:

$$Q(t) = \frac{V_0}{R\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + w^2}}\operatorname{sen}(wt+\phi).$$

Donde el ángulo de fase $\phi$ satisface:

$$\cos\phi = \frac{\frac{1}{RC}}{\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + w^2}}, \quad \operatorname{sen}\phi = -\frac{w}{\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + w^2}} \quad \&\ \tan\phi = -wRC.$$

Es decir, la carga es una función sinusoidal de la misma frecuencia que el voltaje de entrada. De hecho la corriente sólo estará desfasada un ángulo $\phi$ del voltaje de entrada. La corriente está dada por

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{wV_0}{R\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + w^2}}\cos(wt+\phi).$$

**Ejemplo 5.3.1** *Determinar la carga que se almacena en un capacitor de un circuito RC de corriente alterna, si* $R = 12\ \Omega$, $C = 1/1\,200$ *F*, $V = 110\cos 60t$ *V, e inicialmente el capacitor no tiene carga.*

▼ La ecuación diferencial que modela la carga es

$$RI + \frac{Q}{C} = V \;\Rightarrow\; 12\frac{dQ}{dt} + 1\,200Q = 110\cos 60t \;\Rightarrow\; \frac{dQ}{dt} + 100Q = \frac{110}{12}\cos 60t. \tag{5.4}$$

Ésta es una ED lineal no homogénea con la condición inicial $Q(0) = 0$. Esta ED corresponde al caso de un resorte forzado no amortiguado. El factor integrante es $e^{\int 100\,dt} = e^{100t}$. Aplicando el método conocido:

$$e^{100t}\left(\frac{dQ}{dt} + 100Q\right) = \frac{110}{12}e^{100t}\cos 60t \;\Rightarrow\; \frac{d\left(Qe^{100t}\right)}{dt} = \frac{110}{12}e^{100t}\cos 60t \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow Qe^{100t} = \frac{110}{12}\int e^{100t}\cos 60t\,dt.$$

Si usamos la fórmula de integración

$$\int e^{at}\cos bt = \frac{e^{at}}{a^2 + b^2}(a\cos bt + b\operatorname{sen} bt),$$

obtenemos:

$$Qe^{100t} = \left(\frac{110}{12}\right)\left(\frac{e^{100t}}{100^2 + 60^2}\right)(100\cos 60t + 60\operatorname{sen} 60t) + K,$$

de donde

$$Q(t) = \left(\frac{11}{16\,320}\right)(100\cos 60t + 60\operatorname{sen} 60t) + Ke^{-100t}.$$

Usando $Q(0) = 0$, obtenemos que $0 = Q(0) = \left(\dfrac{1\,100}{16\,320}\right) + K$, de donde $K = -\dfrac{1\,100}{16\,320} = -\dfrac{110}{1\,632}$. Finalmente, la carga y la corriente son, para tiempos $t \geq 0$,

$$Q(t) = \frac{11}{1\,632}(10\cos 60t + 6\operatorname{sen} 60t) - \frac{110}{1\,632}e^{-100t}\ \text{C};$$
$$I(t) = \frac{660}{1\,632}(-10\operatorname{sen} 60t + 6\cos 60t) + \frac{11\,000}{1\,632}e^{-100t}\ \text{A}.$$

Vemos que los términos exponenciales son transitorios porque desaparecen rápidamente. En el caso de la carga, con el tiempo queda el término del estado estable:

$$Q(t) = \frac{11}{1\,632}(10\cos 60t + 6\operatorname{sen} 60t)\ \text{C},$$

que puede reescribirse como

$$Q(t) = \frac{11}{1\,632}\sqrt{10^2 + 6^2}\left(\frac{10}{\sqrt{10^2 + 6^2}}\cos 60t + \frac{6}{\sqrt{10^2 + 6^2}}\operatorname{sen} 60t\right) =$$
$$= \frac{11}{24\sqrt{34}}(\operatorname{sen}\phi\cos 60t + \cos\phi\operatorname{sen} 60t) = \frac{11}{24\sqrt{34}}\operatorname{sen}(60t + \phi).$$

Donde hemos utilizado la identidad

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a\cos b + \cos a\operatorname{sen} b.$$

e identificado el ángulo fase como aquel que satisface:

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{10}{\sqrt{10^2 + 6^2}}; \quad \cos\phi = \frac{6}{\sqrt{10^2 + 6^2}}; \quad \tan\phi = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

Se tiene $\phi = \phi_c = \arctan \dfrac{5}{3} \approx 1.0304$. Observe que la funciones de carga y voltaje están desfasadas entre sí un ángulo $\dfrac{\pi}{2} - \phi$. En efecto:

$$\operatorname{sen}\left[(60t + \phi) + \left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)\right] = \operatorname{sen}\left(60t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 60t.$$

$\square$

**Ejercicios 5.3.4** *Circuito RC de corriente alterna.* *Soluciones en la página 5*

1. Se conecta una fuente de voltaje alterno de $120\cos(60\pi t)$ V a un circuito RC. Suponiendo que $R = 60\ \Omega$, $C = 0.02$ F y que inicialmente el capacitor está descargado, determinar la carga y la corriente al tiempo $t$.
2. Se conecta un resistor de $100\ \Omega$ con un capacitor de $0.001$ F y con una fuente alterna de voltaje $V(t) = 120\cos 5t$ V, formando un circuito RC. Si inicialmente el capacitor no tiene carga, determine una expresión para la carga en el capacitor y la corriente que circula por el circuito al tiempo $t$.
3. Una resistencia de $25\ \Omega$, un capacitor de $0.02$ F y una fuente de voltaje $V(t) = 125\cos 5t + 100\operatorname{sen} 2t$ V se conectan en serie . Suponga que al tiempo $t = 0$ s la carga del capacitor es $Q = 1$ C; encuentre una expresión para la carga del capacitor al tiempo $t$.
4. Un circuito RC está formado por una resistor de $20\ \Omega$, un capacitor de $0.001$ F y una fuente de voltaje alterno $V(t) = 100\cos 50t$ V. Si originalmente la carga en el capacitor es de $20$ C, determine la carga en el capacitor y la corriente que circula por el circuito al tiempo $t$.
5. Un circuito RC se forma con un resistor de $200\ \Omega$, un capacitor de $0.01$ F y una fuente de voltaje $V(t) = 100e^{-3t}\cos 4t$ V. Determinar la carga en el capacitor y la corriente que circula por el circuito al tiempo $t$, suponiendo que $Q(0) = 20$ C.

**Ejercicios 5.3.4** *Circuito RC de corriente alterna.* *Página 4*

1. $Q(t) = \dfrac{72}{25 + 129\,600\pi^2}\left[60\pi \operatorname{sen}(60\pi t) + \dfrac{5}{6}\cos(60\pi t)\right] - \dfrac{60e^{-\frac{5}{6}t}}{25 + 129\,600\pi^2}$ coulombs;

   $I(t) = \dfrac{4\,320\pi}{25 + 129\,600\pi^2}\left[60\pi \cos(60\pi t) - \dfrac{5}{6}\operatorname{sen}(60\pi t)\right] + \dfrac{50e^{-\frac{5}{6}t}}{25 + 129\,600\pi^2}$ amperes.

2. $Q(t) = \dfrac{6}{125}(2\cos 5t + \operatorname{sen} 5t) - \dfrac{12}{125}e^{-10t}$ C;

   $I(t) = \dfrac{6}{25}(\cos 5t - 2\operatorname{sen} 5t) + \dfrac{24}{25}e^{-10t}$ A.

3. $Q(t) = \dfrac{10}{29}\cos 5t + \dfrac{25}{29}\operatorname{sen} 5t + \operatorname{sen} 2t - \cos 2t + \dfrac{48}{29}e^{-2t}$ C.

4. $Q(t) = 0.05(\operatorname{sen} 50t + \cos 50t) + 19.95e^{-50t}$ C;

   $I(t) = 2.5(\cos 50t - \operatorname{sen} 50t) - 997.5e^{-50t}$ A.

5. $Q(t) = \dfrac{2}{89}\left(4\operatorname{sen} 4t - \dfrac{5}{2}\cos 4t\right)e^{-3t} + \dfrac{1\,785}{89}e^{\frac{-t}{2}}$ C;

   $I(t) = \dfrac{1}{89}(47\cos 4t - 4\operatorname{sen} 4t)e^{-3t} - \dfrac{1\,785}{178}e^{\frac{-t}{2}}$ A.