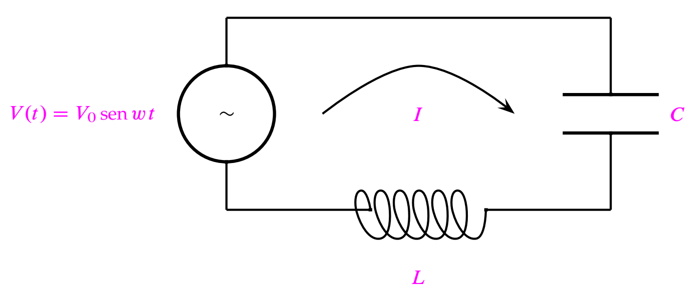
CAPÍTULO

5

Aplicaciones de ED de segundo orden

5.3.6 Circuito LC de corriente alterna



Un circuito LC simple de corriente alterna, como el de la figura anterior, está formado por una fuente de voltaje $V(t)$, un capacitor C y un inductor L. Las caídas de potencial en el circuito son Q/C sobre el capacitor y $L\dfrac{dI}{dt}$ sobre el inductor. De acuerdo con la ley de Kirchhoff de voltaje, tenemos que

$$V_0 \operatorname{sen} wt = \frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt} \Rightarrow \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{LC} = \frac{V_0}{L} \operatorname{sen} wt. \tag{5.1}$$

Si definimos

$$w_{LC} = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

podemos reescribir la ecuación (5.1) como:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + w_{LC}^2 Q = \frac{V_0}{L} \operatorname{sen} wt, \tag{5.2}$$

1. canek.azc.uam.mx: 23/ 9/ 2010

cuya solución depende de si la frecuencia w del voltaje de entrada es igual o diferente a la frecuencia natural w_{LC}.

Caso i. Si $w_{LC} \neq w$, la solución está dada por $Q(t) = Q_c(t) + Q_p(t)$ donde

$$Q_c(t) = c_1 \cos w_{LC}t + c_2 \operatorname{sen} w_{LC}t$$

es la solución general de la ecuación homogénea y

$$Q_p(t) = D \operatorname{sen} wt$$

es una solución particular. Para obtener el coeficiente D, derivamos dos veces $Q_p(t)$ y sustituimos en la ecuación (5.2), así resulta que

$$\left(-w^2 + w_{LC}^2\right) D \operatorname{sen} wt = \frac{V_0}{L} \operatorname{sen} wt,$$

de donde se infiere que

$$D = \frac{V_0}{L\left(w_{LC}^2 - w^2\right)} \Rightarrow Q_p(t) = \frac{V_0}{L\left(w_{LC}^2 - w^2\right)} \operatorname{sen} wt.$$

Finalmente,

$$Q(t) = c_1 \cos w_{LC}t + c_2 \operatorname{sen} w_{LC}t + \frac{V_0}{L\left(w_{LC}^2 - w^2\right)} \operatorname{sen} wt.$$

Los coeficientes c_1, c_2 se obtienen al considerar las condiciones iniciales; por ejemplo, $Q(0) = 0$ & $I(0) = 0$. Evaluando la carga al tiempo $t = 0$ se tiene que $c_1 = 0$. Derivando con respecto al tiempo, obtenemos la corriente por el circuito:

$$I(t) = c_2 w_{LC} \cos(w_{LC}t) + \frac{V_0 w}{L\left(w_{LC}^2 - w^2\right)} \cos wt,$$

y evaluando en $t = 0$ tenemos que

$$0 = c_2 w_{LC} + \frac{V_0 w}{L\left(w_{LC}^2 - w^2\right)} \Rightarrow c_2 = -\frac{V_0 w}{L w_{LC}\left(w_{LC}^2 - w^2\right)}.$$

La carga y la corriente son, entonces:

$$\begin{aligned} Q(t) &= -\frac{V_0 w}{L w_{LC}\left(w_{LC}^2 - w^2\right)} \operatorname{sen} w_{LC}t + \frac{V_0}{L\left(w_{LC}^2 - w^2\right)} \operatorname{sen} wt; \\ I(t) &= \frac{V_0 w}{L\left(w_{LC}^2 - w^2\right)} \left[\cos wt - \cos w_{LC}t\right]. \end{aligned}$$

Observe que la carga y la corriente dependen de la frecuencia del voltaje de entrada y de la frecuencia natural w_{LC}.

Caso ii. En un circuito LC, cuando $w_{LC} = w$, la carga está dada por

$$Q(t) = Q_c(t) + Q_p(t),$$

donde

$$Q_c(t) = c_1 \cos w_{LC}t + c_2 \operatorname{sen} w_{LC}t$$

es la solución general de la ecuación homogénea y de acuerdo con el método de coeficientes indeterminados, se propone como solución particular

$$Q_p(t) = Dt \operatorname{sen} w_{LC}t + Et \cos w_{LC}t.$$

Para obtener los coeficientes D y E, derivamos dos veces $Q_p(t)$ y sustituimos en la ecuación (5.2); así resulta

$$\frac{V_0}{L}\operatorname{sen} w_{LC}t = 2Dw_{LC}\cos w_{LC}t - 2Ew_{LC}\operatorname{sen} w_{LC}t - Dtw_{LC}^2\operatorname{sen} w_{LC}t - Etw_{LC}^2\cos w_{LC}t + \\ + w_{LC}^2\left[Dt\operatorname{sen} w_{LC}t + Et\cos w_{LC}t\right] = 2Dw_{LC}\cos w_{LC}t - 2Ew_{LC}\operatorname{sen} w_{LC}t,$$

de donde se infiere que

$$D = 0 \quad \& \quad E = -\frac{V_0}{2w_{LC}L}.$$

Por lo que se obtiene, finalmente:

$$Q_p(t) = -\frac{V_0 t}{2w_{LC}L}\cos w_{LC}t.$$

En consecuencia:

$$Q(t) = c_1\cos w_{LC}t + c_2\operatorname{sen} w_{LC}t - \frac{V_0 t}{2w_{LC}L}\cos w_{LC}t.$$

Los coeficientes c_1, c_2 se obtienen al considerar las condiciones iniciales, por ejemplo, $Q(0) = 0$ & $I(0) = 0$. Evaluando la carga al tiempo $t = 0$, se tiene que $c_1 = 0$. Derivando con respecto al tiempo, obtenemos la corriente sobre el circuito

$$I(t) = c_2 w_{LC}\cos w_{LC}t - \frac{V_0}{2w_{LC}L}\cos w_{LC}t + \frac{V_0 t}{2L}\operatorname{sen} w_{LC}t,$$

y evaluando en $t = 0$ tenemos que

$$0 = c_2 w_{LC} - \frac{V_0}{2w_{LC}L} \;\Rightarrow\; c_2 = \frac{V_0}{2Lw_{LC}^2}.$$

La carga y la corriente son, entonces:

$$Q(t) = \frac{V_0}{2Lw_{LC}^2}\operatorname{sen} w_{LC}t - \frac{V_0 t}{2w_{LC}L}\cos w_{LC}t \text{ coulombs;}$$
$$I(t) = \frac{V_0 t}{2L}\operatorname{sen} w_{LC}t \text{ amperes.}$$

Estas expresiones muestran que en un circuito LC puede existir resonancia y que la carga en el capacitor así como la corriente oscilarán con gran amplitud. Desde luego, esto provocará que en algún momento un elemento del circuito se dañe y en consecuencia deje de funcionar el circuito.

Ejemplo 5.3.1 *Considere un circuito LC de corriente alterna con $L = 1$ H, $C = 0.25$ F y una fuente de voltaje $V = 20\cos 2t$ V. Determine la corriente y la carga al tiempo $t \ge 0$, si inicialmente ambas son cero.*

▼ La ecuación diferencial por resolver [véase la ecuación (5.1)] es

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 4Q = 20\cos 2t.$$

La solución de la ED homogénea es

$$Q_c(t) = c_1\cos 2t + c_2\operatorname{sen} 2t.$$

Como la frecuencia de la fuente de voltaje es igual a la frecuencia natural de las funciones sinusoidales, proponemos entonces la solución particular:

$$Q_p(t) = t\left[A\cos 2t + B\operatorname{sen} 2t\right].$$

Derivando dos veces se tiene:

$$\frac{dQ_p}{dt} = A\cos 2t + B\,\text{sen}\,2t + t\left[-2A\,\text{sen}\,2t + 2B\cos 2t\right];$$
$$\frac{d^2Q_p}{dt^2} = -4A\,\text{sen}\,2t + 4B\cos 2t + t\left[-4A\cos 2t - 4B\,\text{sen}\,2t\right].$$

Sustituyendo la función $Q_p(t)$ y la segunda derivada en la ecuación diferencial:

$$-4A\,\text{sen}\,2t + 4B\cos 2t = 20\cos 2t,$$

de donde se deduce que

$$A = 0 \quad \& \quad B = 5.$$

Finalmente, la solución particular y la solución general son

$$Q_p(t) = 5t\,\text{sen}\,2t;$$
$$Q(t) = c_1\cos 2t + c_2\,\text{sen}\,2t + 5t\,\text{sen}\,2t.$$

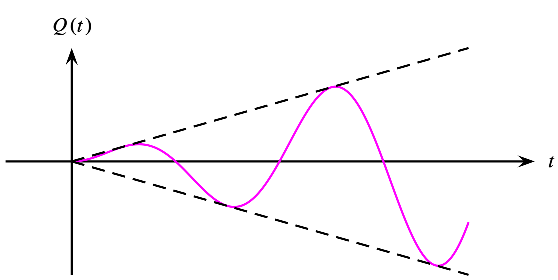
La corriente se obtiene derivando la expresión anterior:

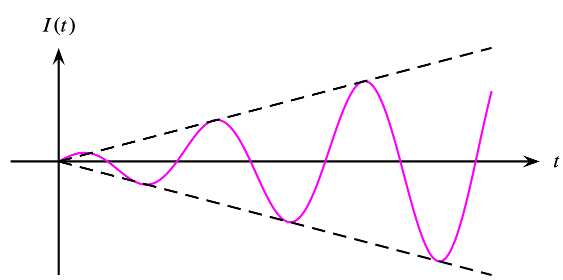
$$I(t) = -2c_1\,\text{sen}\,2t + 2c_2\cos 2t + 5\,\text{sen}\,2t + 10t\cos 2t.$$

Considerando las condiciones iniciales, se obtienen $c_1 = c_2 = 0$. Entonces la carga y la corriente están dadas por

$$Q(t) = 5t\,\text{sen}\,2t \text{ C};$$
$$I(t) = 5\,\text{sen}\,2t + 10t\cos 2t \text{ A}.$$

Ambas funciones se grafican a continuación:





Observe que la carga sobre el capacitor crece y decrece con amplitud cada vez más grande; por esta razón en algún momento el circuito dejará de funcionar. Lo mismo sucede con la corriente en el circuito.

□

Ejercicios 5.3.6 *Circuito LC de corriente alterna.* *Soluciones en la página 6*

1. Se conecta en serie un capacitor de 0.01 F, un inductor de 0.01 H y una fuente de voltaje que suministra $10\cos(10t)$ V para formar un circuito LC. Determine una expresión para la carga y la corriente en todo tiempo t, suponiendo que inicialmente el capacitor estaba descargado y que no circulaba corriente alguna en el circuito.

2. Un circuito LC se forma conectando un capacitor de 0.4 F, un inductor de 0.004 H y una fuente de voltaje que proporciona $2\cos 20t$ V. Si al inicio el capacitor tenía una carga de 0.01 C y circulaba una corriente de 0.05 A, encuentre la carga al tiempo t segundos.

3. Se conecta una fuente de voltaje que provee $10\cos 20t$ V a un circuito LC formado por un capacitor de 0.5 F y un inductor de 0.005 H. Suponiendo que el capacitor se encontraba descargado y no circulaba corriente sobre el circuito, encuentre la carga y la corriente.

4. Un circuito LC está formado por una fuente de voltaje que suministra $2\cos 50t$ V, un capacitor de 0.2 F y un inductor de 0.002 H. Determine la carga y la corriente sobre el circuito suponiendo que al inicio el capacitor tenía una carga de 4 C y circulaba una corriente de 50 A.

5. Se aplica un voltaje de $10\cos 100t$ V durante $\pi/200$ s a un circuito LC formado por un capacitor de 0.1 F y un inductor de 0.001 H e inmediatamente después se suspende. Determine la carga y la corriente sobre el circuito en todo tiempo t suponiendo que originalmente el capacitor se encontraba descargado y no circulaba corriente sobre el circuito.

Ejercicios 5.3.6 *Circuito LC de corriente alterna.* *Página 4*

1. $Q(t) = \frac{10}{99}\cos 10t - \frac{10}{99}\cos 100t$ C;

   $I(t) = -\frac{100}{99}\operatorname{sen} 10t + \frac{1000}{99}\operatorname{sen} 100t$ A.
2. $Q(t) = 2.2222\cos 20t - 2.2122\cos 25t + 0.002\operatorname{sen} 25t$ C;

   $I(t) = -44.4444\operatorname{sen} 20t + 55.3056\operatorname{sen} 25t + 0.05\cos 25t$ A.
3. $Q(t) = 50t\operatorname{sen} 20t$ C;

   $I(t) = 50\operatorname{sen} 20t + 1\,000t\cos 20t$ A.
4. $Q(t) = 10t\operatorname{sen} 50t + 4\cos 50t + \operatorname{sen} 50t$ C;

   $I(t) = 500t\cos 50t - 190\operatorname{sen} 50t + 50\cos 50t$ A.
5. Para $0 \le t \le \frac{\pi}{200}$:
   $Q(t) = 50t\operatorname{sen} 100t$ C;

   $I(t) = 50\operatorname{sen} 100t + 5\,000t\cos 100t$ A.
   Para $t \ge \frac{\pi}{200}$:
   $\hat{Q}(t) = -\frac{1}{2}\cos 100t + \frac{\pi}{4}\operatorname{sen} 100t$ C;

   $\hat{I}(t) = 50\operatorname{sen} 100t + 25\pi\cos 100t$ A.