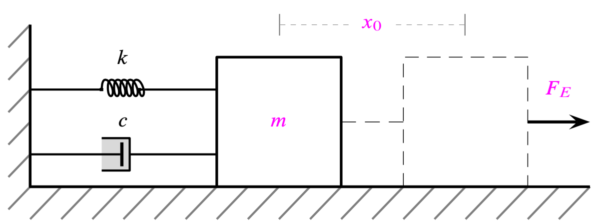
CAPÍTULO

5

Aplicaciones de ED de segundo orden

5.2.3 Vibraciones forzadas

Los sistemas estudiados hasta ahora exhiben una dinámica que depende de ciertas constantes intrínsecas al sistema, es decir, las únicas fuerzas que actúan son internas al sistema. Supondremos en esta sección que se aplica una fuerza externa llamada de excitación F_E sobre el sistema masa-resorte-amortiguador (véase la siguiente figura):



En este caso la fuerza total ejercida sobre la masa está dada por

$$F = F_R + F_A + F_E = -kx - c\frac{dx}{dt} + F_E\,.$$

Usando nuevamente la segunda ley de Newton, obtenemos la ED que modela el sistema.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c\frac{dx}{dt} + F_E\,.$$

Esta ecuación se puede reescribir como

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F_E\,. \tag{5.1}$$

o bien en la forma:

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = F_E\,.$$

1. canek.azc.uam.mx: 23/ 9/ 2010

La fuerza de excitación desempeña un papel diferente al de las otras fuerzas internas del sistema, pues a veces provoca una reducción de la velocidad y en otras provoca un aumento. Es decir, la fuerza de excitación puede reducir o aumentar la energía cinética del sistema. Cuando la fuerza de excitación sea distinta de cero, diremos que el sistema masa-resorte-amortiguador está forzado.
Hasta este momento la fuerza F_E puede ser de cualquier tipo y para determinar sus efectos tendremos que resolver la ecuación diferencial (5.1) por cualquiera de los métodos estudiados hasta ahora.
Sin embargo, cuando la fuerza F_E es del tipo sinusoidal

$$F_E = F_0 \cos w_e t,$$

suelen ocurrir fenómenos físicos de interés. En este caso la ecuación por resolver es

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = F_0 \cos w_e t.$$

La ecuación característica es, entonces:

$$mr^2 + cr + k = 0,$$

cuyas raíces son

$$r_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}\,;$$

y la solución $x(t)$ dependerá de la relación que exista entre $r_{1,2}$ y w_e.

Vibraciones forzadas, caso $c \neq 0$

Consideremos que la fuerza de excitación es una función sinusoidal del tipo $F_E = F_0 \cos w_e t$. Claramente, si $c \neq 0$, ninguna de las dos raíces de la ecuación característica es igual a iw_e. Entonces de acuerdo con el método de coeficientes indeterminados, la solución particular es

$$x_p(t) = A \operatorname{sen} w_e t + B \cos w_e t. \tag{5.2}$$

Calculando la primera y segunda derivadas, obtenemos la velocidad y la aceleración de la masa.

$$x_p'(t) = v_p(t) = Aw_e \cos w_e t - Bw_e \operatorname{sen} w_e t;$$
$$x_p''(t) = a_p(t) = -Aw_e^2 \operatorname{sen} w_e t - Bw_e^2 \cos w_e t.$$

Usando estos dos resultados en (5.1), la ecuación diferencial de movimiento, se obtiene:

$$-mw_e^2 [A \operatorname{sen} w_e t + B \cos w_e t] + cw_e [A \cos w_e t - B \operatorname{sen} w_e t] + k [A \operatorname{sen} w_e t + B \cos w_e t] = F_0 \cos w_e t.$$

Agrupando términos en las funciones $\cos w_e t$ y $\operatorname{sen} w_e t$:

$$\left[-mw_e^2 B + cw_e A + kB\right] \cos w_e t + \left[-mw_e^2 A - cw_e B + kA\right] \operatorname{sen} w_e t = F_0 \cos w_e t.$$

Las funciones $\cos w_e t$ y $\operatorname{sen} w_e t$ son linealmente independientes; entonces, para que se satisfaga la condición anterior, sólo se requiere que

$$\begin{cases} -mw_e^2 B + cw_e A + kB &= F_0 \\ -mw_e^2 A - cw_e B + kA &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cw_e A + \left(k - mw_e^2\right) B &= F_0; \\ \left(k - mw_e^2\right) A - cw_e B &= 0. \end{cases}$$

Aplicando la regla de Cramer encontramos la solución de este sistema:

$$A = \frac{\begin{vmatrix} F_0 & k - mw_e^2 \\ 0 & -cw_e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cw_e & k - mw_e^2 \\ k - mw_e^2 & -cw_e \end{vmatrix}} = \frac{-cw_e F_0}{-c^2 w_e^2 - \left(k - mw_e^2\right)^2} = \frac{cw_e F_0}{\left(k - mw_e^2\right)^2 + w_e^2 c^2};$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} cw_e & F_0 \\ k - mw_e^2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cw_e & k - mw_e^2 \\ k - mw_e^2 & -cw_e \end{vmatrix}} = \frac{-\left(k - mw_e^2\right) F_0}{-c^2 w_e^2 - \left(k - mw_e^2\right)^2} = \frac{\left(k - mw_e^2\right) F_0}{\left(k - mw_e^2\right)^2 + w_e^2 c^2}.$$

Sustituyendo A y B en (5.2), obtenemos una expresión para la solución particular:

$$x_p(t) = \underbrace{\left[\frac{cw_eF_0}{\left(k - mw_e^2\right)^2 + w^2c^2}\right]}_{A} \operatorname{sen} w_et + \underbrace{\left[\frac{\left(k - mw_e^2\right)F_0}{\left(k - mw_e^2\right)^2 + w^2c^2}\right]}_{B} \cos w_et. \tag{5.3}$$

Podemos simplificar esta expresión a la forma $C \operatorname{sen}(w_et + \phi)$:

$$\begin{aligned} A \operatorname{sen} w_et + B\cos(w_et) = x_p(t) &= C \operatorname{sen}(w_et + \phi) = \\ &= C[\operatorname{sen} w_et \cos\phi + \operatorname{sen}\phi \cos w_et] = \\ &= (C\cos\phi) \operatorname{sen} w_et + (C \operatorname{sen}\phi)\cos w_et. \end{aligned}$$

Esta igualdad se cumple cuando:

$$C\cos\phi = A \quad \& \quad C\operatorname{sen}\phi = B.$$

De donde se obtiene:

$$C^2(\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi) = A^2 + B^2 \Rightarrow C^2 = A^2 + B^2 \Rightarrow C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \&$$

$$\frac{C\operatorname{sen}\phi}{C\cos\phi} = \frac{B}{A} \Rightarrow \tan\phi = \frac{B}{A} \Rightarrow \phi = \arctan\left(\frac{B}{A}\right).$$

Además

$$\begin{aligned} C^2 = A^2 + B^2 &= \left[\frac{cw_eF_0}{(k - mw_e^2)^2 + w_e^2c^2}\right]^2 + \left[\frac{(k - mw_e^2)F_0}{(k - mw_e^2)^2 + w_e^2c^2}\right]^2 = \\ &= \frac{c^2w_e^2F_0^2}{[(k - mw_e^2)^2 + w_e^2c^2]^2} + \frac{(k - mw_e^2)^2F_0^2}{[(k - mw_e^2)^2 + w_e^2c^2]^2} = \\ &= \frac{F_0^2}{[(k - mw_e^2)^2 + w_e^2c^2]^2}[c^2w_e^2 + (k - mw_e^2)^2] = \\ &= \frac{F_0^2[(k - mw_e^2)^2 + w_e^2c^2]}{[(k - mw_e^2)^2 + w_e^2c^2]^2} = \frac{F_0^2}{(k - mw_e^2)^2 + w_e^2c^2}; \end{aligned}$$

por lo que

$$C = \sqrt{\frac{F_0^2}{(k - mw_e^2)^2 + w_e^2c^2}} = \frac{F_0}{\sqrt{(k - mw_e^2)^2 + w_e^2c^2}};$$

por otra parte,

$$\frac{B}{A} = \frac{\dfrac{(k - mw_e^2)F_0}{(k - mw_e^2)^2 + w_e^2c^2}}{\dfrac{cw_eF_0}{(k - mw_e^2)^2 + w_e^2c^2}} = \frac{(k - mw_e^2)F_0}{cw_eF_0} = \frac{k - mw_e^2}{cw_e};$$

por lo cual

$$\phi = \arctan\left(\frac{B}{A}\right) = \arctan\left(\frac{k - mw_e^2}{cw_e}\right).$$

Se tiene entonces que

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - mw_e^2)^2 + w_e^2c^2}} \operatorname{sen}(w_et + \phi);$$

donde $\phi = \arctan\left(\dfrac{k - mw_e^2}{cw_e}\right)$.
Por lo tanto, la posición instantánea de m, con respecto a la posición de equilibrio, en el tiempo $t \geq 0$ es

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t);$$

donde la solución complementaria $x_c(t)$ tiene la forma de un movimiento sobreamortiguado, críticamente amortiguado o bien subamortiguado. En cualquiera de los casos ocurre que $\lim\limits_{t\to\infty} x_c(t) = 0$. Debido a esto se tiene:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty}[x_c(t) + x_p(t)] = \lim_{x\to\infty} x_p(t).$$

Esto es, al paso del tiempo sucede que

$$x(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - mw_e^2)^2 + w_e^2c^2}}\operatorname{sen}(w_e t + \phi).$$

Ejemplo 5.2.1 *Un sistema masa-resorte-amortiguador tiene parámetros $m = 1$ kg, $c = 2$ N·s/m & $k = 1$ N. Si se aplica una fuerza de excitación $F_E = 17\cos t$, determine la posición y velocidad de la masa en todo tiempo suponiendo que $x(0) = 0$ m & $v(0) = 0$ m/s.*

▼ La ED que modela el sistema es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = 17\cos t. \tag{5.4}$$

que tiene ecuación característica:

$$r^2 + 2r + 1 = 0,$$

y cuyas raíces $r_{1,2} = -1$ son diferentes de $iw_e = i$. Tenemos entonces que la solución complementaria es

$$x_c(t) = c_1e^{-t} + c_2te^{-t},$$

y la solución particular, siguiendo el método del coeficientes indeterminados, es del tipo:

$$x_p(t) = A\cos t + B\operatorname{sen} t.$$

Derivando $x_p(t)$:

$$x_p'(t) = -A\operatorname{sen} t + B\cos t.$$
$$x_p''(t) = -A\cos t - B\operatorname{sen} t.$$

Sustituyendo en la ED (5.4), resulta:

$$-A\cos t - B\operatorname{sen} t + 2(-A\operatorname{sen} t + B\cos t) + A\cos t + B\operatorname{sen} t = 17\cos t.$$

Hallamos, entonces:

$$-2A\operatorname{sen} t + 2B\cos t = 17\cos t \;\Rightarrow\; A = 0 \;\&\; B = \frac{17}{2}.$$

Por lo tanto:

$$x_p(t) = \frac{17}{2}\operatorname{sen} t.$$

La solución general de la ED es

$$x(t) = c_1e^{-t} + c_2te^{-t} + \frac{17}{2}\operatorname{sen} t.$$

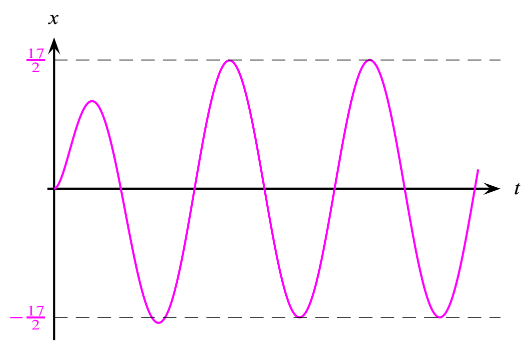
Los coeficientes c_1 & c_2 los determinamos usando las condiciones iniciales. De $x(0) = 0$, se obtiene $c_1 = 0$. Si derivamos

$$x'(t) = v(t) = c_2e^{-t} - c_2te^{-t} + \frac{17}{2}\cos t.$$

De $v(0) = 0$, obtenemos $c_2 + \dfrac{17}{2} = 0$, de donde $c_2 = -\dfrac{17}{2}$ y la posición está dada por

$$x(t) = -\frac{17}{2}te^{-t} + \frac{17}{2}\,\mathrm{sen}\, t \text{ m.}$$

Observe que al paso de tiempo sólo se preserva el movimiento oscilatorio provocado por la fuerza de excitación.



□

Vibraciones forzadas, caso $c = 0$ y caso $w_e \neq w = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Ahora la fuerza de excitación es $F_E = F_0 \cos w_e t$, de forma que la ED que modela el el sistema es

$$mx''(t) + kx(t) = F_0 \cos w_e t,$$

cuya solución particular está dada por (5.3):

$$x_p(t) = \frac{F_0}{k - mw_e^2} \cos w_e t.$$

Observe que la solución $x_p(t)$ es proporcional a la fuerza de excitación, de hecho ésta es la parte de la solución general que se preservará en el tiempo.

Si se cumple que $k \approx mw_e^2$, esto es, $w_e^2 \approx \dfrac{k}{m}$, la amplitud de la oscilación de $x(t)$ es grande. A este fenómeno se le conoce como resonancia.

Ejemplo 5.2.2 *Considere un sistema masa-resorte con los parámetros $m = 1$ kg, $c = 0$ N·s/m, $k = 1$ N/m, $F_E = 2\cos 2t$ y con condiciones iniciales $x_0 = \dfrac{1}{10}$, $v_0 = 0$. Determine la posición, la velocidad y la aceleración en el tiempo t.*

▼ La ecuación diferencial por resolver es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 2\cos 2t. \tag{5.5}$$

La ecuación característica es $r^2 + 1 = 0$, cuyas raíces son $r = \pm i$. De aquí, la solución general de la ecuación homogénea es

$$x_c(t) = c_1 \cos t + c_2\,\mathrm{sen}\, t.$$

En este caso la frecuencia natural de excitación $w_e = 2$ rad/s es diferente de la frecuencia natural de las funciones sinusoidales $w = 1$ rad/s. Por esa razón, y de acuerdo con el método de coeficientes indeterminados, proponemos la solución particular

$$x_p(t) = A\cos 2t + B\,\mathrm{sen}\, 2t. \tag{5.6}$$

Derivando esta expresión dos veces:

$$x_p'(t) = -2A \operatorname{sen} 2t + 2B \cos 2t \quad \& \quad x_p''(t) = -4A \cos 2t - 4B \operatorname{sen} 2t.$$

Sustituyendo en la ecuación (5.5):

$$-4A \cos 2t - 4B \operatorname{sen} 2t + A \cos 2t + B \operatorname{sen} 2t = 2 \cos 2t;$$

es decir,

$$-3A \cos 2t - 3B \operatorname{sen} 2t = 2 \cos 2t.$$

De donde tenemos el sistema de ecuaciones algebraicas siguiente:

$$\begin{aligned} -3A &= 2, \\ -3B &= 0. \end{aligned}$$

La solución de este sistema es $A = -2/3 \quad \& \quad B = 0$. Sustituyendo en (5.6) obtenemos la solución particular.

$$x_p(t) = -\frac{2}{3} \cos 2t.$$

Finalmente, sumando la solución particular con la solución de la ecuación homogénea, obtenemos la solución general de la ecuación diferencial

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t - \frac{2}{3} \cos 2t.$$

La velocidad de la masa se obtiene derivando la posición

$$v(t) = x'(t) = -c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t + \frac{4}{3} \operatorname{sen} 2t.$$

Para determinar las constantes desconocidas, basta con utilizar la condiciones iniciales. Al hacerlo obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{10} = c_1 - \frac{2}{3}; \\ v(0) &= v_0 = 0 \Rightarrow 0 = c_2. \end{aligned}$$

cuya solución es $c_1 = \dfrac{23}{30}$ & $c_2 = 0$. Finalmente, la posición de la masa está dada por

$$x(t) = \frac{23}{30} \cos t - \frac{2}{3} \cos 2t \text{ m}.$$

Analicemos con mayor detalle $x(t)$. La función $\cos t$ es de periodo 2π y la función $\cos 2t$ es de periodo π. En consecuencia, la función de posición $x(t)$ es de periodo 2π. La velocidad y aceleración de la masa son

$$\begin{aligned} v(t) &= -\frac{23}{30} \operatorname{sen} t + \frac{4}{3} \operatorname{sen} 2t \text{ m/s}; \\ a(t) &= -\frac{23}{30} \cos t + \frac{8}{3} \cos 2t \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

De donde, los puntos de retorno o de máxima o mínima amplitud (aquéllos donde $v = 0$) satisfacen:

$$\frac{23}{30} \operatorname{sen} t = \frac{4}{3} \operatorname{sen} 2t.$$

Usando la identidad $\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t$ se tiene:

$$\frac{23}{30} \operatorname{sen} t = \frac{8}{3} \operatorname{sen} t \cos t \Rightarrow \left(\frac{8}{3} \cos t - \frac{23}{30} \right) \operatorname{sen} t = 0.$$

Que se satisface cuando:

$$\operatorname{sen} t = 0 \;\Rightarrow\; t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$$

y cuando:

$$\cos t - \frac{23}{80} = 0 \;\Rightarrow\; \cos t = \frac{23}{80} \;\Rightarrow\; \begin{cases} t = 1.2792 + 2n\pi, & \text{con } n = 0, 1, 2, \cdots \\ t = (2\pi - 1.2792) + 2n\pi = 5.004 + 2n\pi, & \text{con } n = 0, 1, 2, \cdots \end{cases}$$

Observe que:

$$x(0) = x(2\pi) = x(4\pi) = \cdots = \frac{23}{30} - \frac{2}{3} = \frac{3}{30} = 0.1\ .$$
$$x(\pi) = x(3\pi) = \cdots = \frac{-23}{30} - \frac{2}{3} = -\frac{43}{30} \approx -1.4333\ .$$

Además, como

$$\cos 2t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = 2\cos^2 t - 1,$$

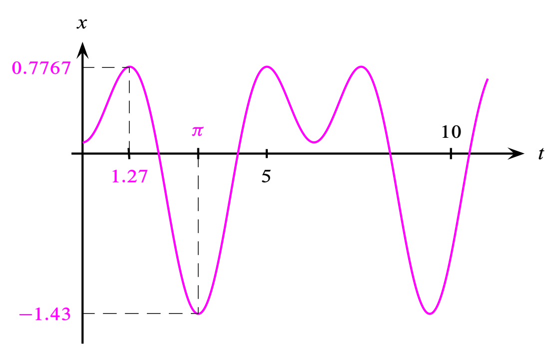
se tiene:

$$x(t) = \frac{23}{30}\cos t - \frac{4}{3}\cos^2 t + \frac{2}{3}\ \text{m}.$$

Así que evaluando en el tiempo en que $\cos t = \dfrac{23}{80}$, o sea, $t = \arccos\left(\dfrac{23}{80}\right) = 1.2791$, se tiene:

$$x(1.2791) = \frac{23}{80}\cdot\frac{23}{80} - \frac{4}{3}\left(\frac{23}{80}\right)^2 + \frac{2}{3} = 0.7769\ \text{m}.$$

La gráfica es



□

Ejemplo 5.2.3 *Considere un sistema masa-resorte con masa $m = 5$ kg y constante de restitución $k = 20$ N/m que está sometido a una fuerza de excitación $F_E = 5\cos 3t$ N. Si el sistema tiene condiciones iniciales $x(0) = 0.02$ m y $v(0) = 0$ m/s, determine la posición, la velocidad y la acelaración de la masa en todo tiempo t. Graficar la posición $x(t)$.*

▼ En este caso tenemos $c = 0$, $m = 5$, $k = 20$, $w_e = 3$ y $F_0 = 5$. La ecuación diferencial que modela este sistema es

$$5\frac{d^2x}{dt^2} + 20x = 5\cos 3t.$$

La ecuación característica asociada es $5r^2 + 20 = 0$, que tiene raíces $r_{1,2} = \pm 2i$. Por lo que la solución complementaria es

$$x_c(t) = c_1\cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t.$$

Como la frecuencia de estas funciones sinusoidales es $w = 2$, que es diferente de la frecuencia de la excitación $w_e = 3$, proponemos como solución particular

$$x_p(t) = A \operatorname{sen} 3t + B \cos 3t.$$

Derivando dos veces y sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene:

$$5(-9A \operatorname{sen} 3t - 9B \cos 3t) + 20(A \operatorname{sen} 3t + B \cos 3t) = 5 \cos 3t.$$

Desarrollando obtenemos:

$$(-45A + 20A) \operatorname{sen} 3t + (-45B + 20B) \cos 3t = 5 \cos 3t \;\Rightarrow\; (-25A) \operatorname{sen} 3t + (-25B) \cos 3t = 5 \cos 3t.$$

De donde resulta:

$$-25A = 0 \quad \& \quad -25B = 5 \;\Rightarrow\; A = 0 \quad \& \quad B = -\frac{1}{5}.$$

La solución particular es

$$x_p(t) = -\frac{1}{5} \cos 3t.$$

La solución general es la suma de las soluciones particular y complementaria,

$$x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t - \frac{1}{5} \cos 3t.$$

La velocidad en todo tiempo t está dada por

$$v(t) = -2c_1 \operatorname{sen} 2t + 2c_2 \cos 2t + \frac{3}{5} \operatorname{sen} 3t.$$

Aplicando las condiciones iniciales $x(0) = 0.02$ & $v(0) = 0$, obtenemos $c_1 - \dfrac{1}{5} = 0.02$ & $2c_2 = 0$. De donde $c_1 = 0.22$ & $c_2 = 0$.
Así la posición instantánea de m es

$$x(t) = 0.22 \cos 2t - \frac{1}{5} \cos 3t \text{ m}.$$

La velocidad y la aceleración son entonces:

$$v(t) = -0.44 \operatorname{sen} 2t + 0.6 \operatorname{sen} 3t \text{ m/s};$$
$$a(t) = -0.88 \cos 2t + 1.8 \cos 3t \text{ m/s}^2.$$

La función $\cos 3t$ es de periodo $2\pi/3$ y la función $\cos 2t$ es de periodo π. En consecuencia, la función posición $x(t)$ es de periodo 2π. Observe que en este periodo $\cos 3t$ se repetirá completamente tres veces y $\cos 2t$ dos veces.
Por otra parte, los puntos de retorno satisfacen $v(t) = 0$, de donde:

$$-0.44 \operatorname{sen} 2t + 0.6 \operatorname{sen} 3t = 0 \;\Rightarrow\; \frac{44}{100} \operatorname{sen} 2t = \frac{3}{5} \operatorname{sen} 3t \;\Rightarrow\; \frac{44}{60} \operatorname{sen} 2t = \operatorname{sen} 3t.$$

Usando las identidades:

$$\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t; \quad \cos 2t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t;$$
$$\operatorname{sen} 3t = \operatorname{sen}(2t + t) = \operatorname{sen} 2t \cos t + \cos 2t \operatorname{sen} t = 2 \operatorname{sen} t \cos^2 t + \cos^2 t \operatorname{sen} t - \operatorname{sen}^2 t \operatorname{sen} t =$$
$$= 3 \operatorname{sen} t \cos^2 t - (1 - \cos^2 t) \operatorname{sen} t = 4 \operatorname{sen} t \cos^2 t - \operatorname{sen} t,$$

se tiene

$$\frac{44}{60}\operatorname{sen}2t = \operatorname{sen}3t \Rightarrow \frac{88}{60}\operatorname{sen}t\cos t = 4\operatorname{sen}t\cos^2 t - \operatorname{sen}t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(4\cos^2 t - \frac{88}{60}\cos t - 1\right)\operatorname{sen}t = 0,$$

que se satisface cuando

$$\operatorname{sen}t = 0 \Rightarrow t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$$

o cuando

$$4\cos^2 t - \frac{88}{60}\cos t - 1 = 0 \Rightarrow 4\cos^2 t - \frac{22}{15}\cos t - 1 = 0.$$

Ésta es una ecuación cuadrática para $\cos(t)$, así que, por la fórmula general:

$$\cos t = \frac{1}{60}(11 \pm \sqrt{1021}) = \begin{cases} -0.3492 \\ 0.7159 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} t = 1.9275 + 2n\pi, & \text{con } n = 0, 1, 2, \cdots \\ t = (2\pi - 1.9275) + 2n\pi = 4.3557 + 2n\pi, & \text{con } n = 0, 1, 2, \cdots \\ t = 0.7729 + 2n\pi, & \text{con } n = 0, 1, 2, \cdots \\ t = (2\pi - 0.7729) + 2n\pi = 5.5103 + 2n\pi, & \text{con } n = 0, 1, 2, \cdots \end{cases}$$

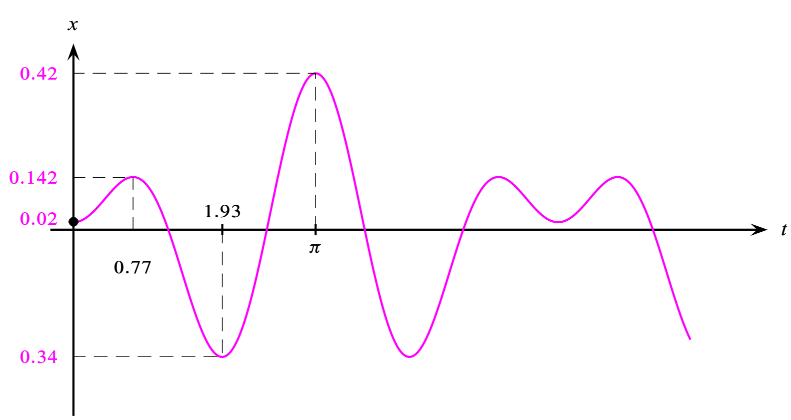
Consideremos ahora sólo los puntos que están dentro del intervalo $[0, 2\pi)$ para aprovechar que la función posición es de periodo 2π; éstos son, ordenados de mayor a menor

$$t = 0, 0.7729, 1.9275, \pi, 4.3556, 5.5103\,.$$

Calculando la aceleración en estos puntos y aplicando el criterio de la segunda derivada para extremos, se tiene:

$$\begin{array}{llllll} a(0) & = 0.92 & \Rightarrow & x(0) & = 0.02\,; & \text{es un mínimo.} \\ a(0.7729) & = -1.2462 & \Rightarrow & x(0.7729) & = 0.1416\,; & \text{es un máximo.} \\ a(1.9275) & = 2.2446 & \Rightarrow & x(1.9275) & = -0.3418\,; & \text{es un mínimo.} \\ a(\pi) & = -2.6800 & \Rightarrow & x(\pi) & = 0.4200\,; & \text{es un máximo.} \\ a(4.3556) & = 2.2446 & \Rightarrow & x(4.3556) & = -0.3418\,; & \text{es un mínimo.} \\ a(5.5103) & = -1.2462 & \Rightarrow & x(5.5103) & = 0.1416\,; & \text{es un máximo.} \end{array}$$

La gráfica:



□

Ejemplo 5.2.4 *Considere el sistema masa-resorte del ejemplo anterior donde $m = 5$ kg & $k = 20$ N/m. El sistema se somete a una fuerza de excitación $F_E = 5\cos 2.1t$ N. Si el sistema tiene condiciones iniciales $x(0) = 0$ m y $v(0) = 0$ m/s, determine la posición y velocidad de la masa en todo tiempo t. Graficar la posición $x(t)$.*

▼ De acuerdo con la ecuación (5.3), la solución particular es

$$x_p(t) = \frac{F_0}{k - mw_e^2}\cos w_e t = \frac{5}{20 - 5(2.1)^2}\cos 2.1t = -\frac{100}{41}\cos 2.1t.$$

Y la solución general es, entonces:

$$x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t - \frac{100}{41}\cos 2.1t.$$

La velocidad en todo tiempo t está dada por la derivada de la posición

$$v(t) = -2c_1 \operatorname{sen} 2t + 2c_2 \cos 2t + \frac{210}{41}\operatorname{sen} 2.1t.$$

Considernado las condiciones iniciales $x(0) = 0$ & $v(0) = 0$, obtenemos $c_1 - \dfrac{100}{41} = 0$ & $2c_2 = 0$. De donde $c_1 = \dfrac{100}{41}$ & $c_2 = 0$. Así la posición en todo tiempo se reduce a

$$x(t) = \frac{100}{41}\left[\cos 2t - \cos 2.1t\right] \text{ m}.$$

La velocidad es, entonces:

$$v(t) = \frac{100}{41}\left[-2 \operatorname{sen} 2t + 2.1 \operatorname{sen} 2.1t\right] \text{ m/s}.$$

Necesitamos reescribir la función posición para construir la gráfica. Para ello recordemos la identidad trigonométrica siguiente:

$$2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \cos(A - B) - \cos(A + B).$$

Si identificamos

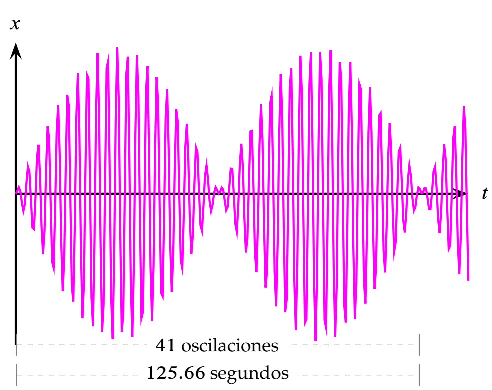
$$\begin{cases} A - B = 2t \\ A + B = 2.1t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2.05t, \\ B = 0.05t, \end{cases}$$

tenemos que

$$x(t) = \frac{200}{41}\operatorname{sen} 0.05t \operatorname{sen} 2.05t.$$

Podemos interpretar que la masa oscila con una amplitud $A(t) = \dfrac{200}{41}\operatorname{sen} 0.05t$ dependiente del tiempo y con una frecuencia natural dada por $w = 2.05$ rad/s. Para construir la gráfica, basta con construir las gráficas de la amplitud y de su negativo y, dentro de éstas, una función oscilatoria de periodo $T = \dfrac{2\pi}{w} = \dfrac{2\pi}{2.05} = 3.065$ s. La amplitud tiene periodo $T_a = \dfrac{2\pi}{0.05} = 125.6636$ y, en ese tiempo, se producen aproximadamente $\dfrac{T_a}{T} = \dfrac{125.6636}{3.065} \approx 41$ oscilaciones.

En la figura siguiente se muestra la gráfica de la posición. Al fenómeno de que la amplitud se comporte como función del tiempo de forma sinusoidal se le conoce como pulsación.



□

Vibraciones forzadas, caso $c = 0$ y $w_e = w = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

La ecuación diferencial que nos interesa resolver es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = F_0 \cos w_e t. \tag{5.7}$$

La ecuación característica es $mr^2 + k = 0$, cuyas soluciones son $r_{1,2} = \pm iw = \pm iw_e$. Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial homogénea es

$$x_c(t) = c_1 \cos w_e t + c_2 \operatorname{sen} w_e t.$$

En este caso la frecuencia de excitación es igual a la frecuencia de las funciones sinusoidales. Por esa razón, y de acuerdo con el método de coeficientes indeterminados, proponemos la solución particular.

$$x_p(t) = t\,[A \cos w_e t + B \operatorname{sen} w_e t]\,.$$

Calculemos la primera y segunda derivada de $x_p(t)$:

$$\begin{aligned}\frac{dx_p}{dt} &= A \cos w_e t + B \operatorname{sen} w_e t + t\,[-Aw_e \operatorname{sen} w_e t + Bw_e \cos w_e t]\,.\\ \frac{d^2x_p}{dt^2} &= -2Aw_e \operatorname{sen} w_e t + 2Bw_e \cos w_e t + t\left[-A{w_e}^2 \cos w_e t - B{w_e}^2 \operatorname{sen} w_e t\right].\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial de movimiento (5.7):

$$-2A\sqrt{mk}\,\operatorname{sen} w_e t + 2B\sqrt{mk}\,\cos w_e t = F_0 \cos w_e t.$$

Igualando coeficientes correspondientes de las funciones sinusoidales, obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$-2A\sqrt{mk} = 0 \quad \& \quad 2B\sqrt{mk} = F_0 \;\Rightarrow\; A = 0 \quad \& \quad B = \frac{F_0}{2\sqrt{km}}.$$

Finalmente, la solución particular es:

$$x_p(t) = \frac{F_0\, t}{2\sqrt{km}} \operatorname{sen} w_e t. \tag{5.8}$$

Y la solución general es:

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) = c_1 \cos w_e t + c_2 \operatorname{sen} w_e t + \frac{F_0\, t}{2\sqrt{km}} \operatorname{sen} w_e t.$$

En ese caso la amplitud depende del tiempo y aumenta con él.

Ejemplo 5.2.5 *Considere un sistema masa-resorte con constantes $m = 10$ kg & $k = 40$ N/m. Sobre el sistema se aplica una fuerza de excitación $F_E = 20\cos 2t$. Determine la posición de la masa, si el sistema se encuentra en reposo en el estado de equilibrio al tiempo $t = 0$ s, es decir: $x_0 = 0$ m & $v_0 = 0$ m/s.*

▼ La ecuación diferencial por resolver es

$$10\frac{d^2x}{dt^2} + 40x = 20\cos 2t.$$

La ecuación característica es $10r^2 + 40 = 0$, cuyas soluciones son $r_{1,2} = \pm 2i$. Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial homogénea es

$$x_c(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t.$$

La frecuencia de la fuerza de excitación es igual a la frecuencia de las funciones sinusoidales. Proponemos entonces la solución particular.

$$x_p(t) = t\,[A\cos 2t + B\,\text{sen}\,2t]\,.$$

Derivando dos veces se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{dx_p}{dt} &= A\cos 2t + B\,\text{sen}\,2t + t\,[-2A\,\text{sen}\,2t + 2B\cos 2t]\,;\\ \frac{d^2x_p}{dt^2} &= -4A\,\text{sen}\,2t + 4B\cos 2t + t\,[-4A\cos 2t - 4B\,\text{sen}\,2t]\,.\end{aligned}$$

Y ahora, usando la función $x_p(t)$ y la segunda derivada en la ecuación diferencial, se obtiene:

$$-40A\,\text{sen}\,2t + 40B\cos 2t = 20\cos 2t.$$

De donde se deduce que

$$A = 0 \;\;\&\;\; B = \frac{1}{2}.$$

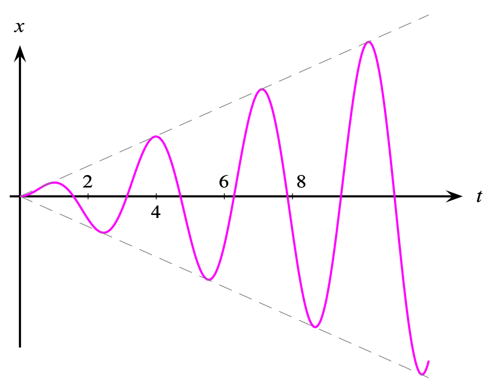
Finalmente, la solución particular y la solución general son

$$\begin{aligned}x_p(t) &= \frac{t}{2}\,\text{sen}\,2t;\\ x(t) &= c_1\cos 2t + c_2\,\text{sen}\,2t + \frac{t}{2}\,\text{sen}\,2t.\end{aligned}$$

La velocidad se obtiene derivando la expresión anterior,

$$v(t) = -2c_1\,\text{sen}\,2t + 2c_2\cos 2t + \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2t + t\cos 2t.$$

Considerando las condiciones iniciales $x(0) = 0$ & $v(0) = 0$, se obtiene $c_1 = c_2 = 0$. Entonces la solución del PVI coincide con la solución particular. $x(t) = \dfrac{t}{2}\,\text{sen}\,2t$. Para graficar esta función observemos que la parte sinusoidal tiene frecuencia $w = 2$ rad/s y periodo $T = \dfrac{2\pi}{w} = \pi$ s y que la amplitud de las oscilaciones aumenta en el tiempo. Entonces primero se grafican las rectas $x = \pm\dfrac{t}{2}$ y posteriormente se construye la gráfica de $x(t)$, considerando que los cruces con el eje horizontal (tiempo) se producen en $t = 0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}, \ldots$, con los máximos y mínimos en $t = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \ldots$ de forma alternada.
Físicamente lo que está ocurriendo es que la fuerza de excitación está en sintonía con el movimiento del sistema masa resorte y siempre le está proporcionando energía, de ahí que la amplitud crezca indefinidamente. La figura muestra la gráfica del movimiento.



□

Ejemplo 5.2.6 *Considere un sistema masa-resorte con coeficientes $m = 5$ kg & $k = 20$ N/m. Se aplica ahora una fuerza de excitación $F(t) = 5\cos 2t$ N. Determine la posición y velocidad de la masa en todo tiempo t, si el sistema tiene condiciones iniciales $x(0) = 0$ m & $v(0) = 0$ m/s.*

▼ La ED es $5x''(t) + 20x(t) = 5\cos 2t$ y la homogénea asociada es $5x''(t) + 20x(t) = 0$ cuya ecuación característica es $5r^2 + 20 = 0$ que tiene por soluciones $r = \pm 2i$.
La solución complementaria es $x_c(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t$.
En este caso la frecuencia de la fuerza de excitación es igual a una de las raíces de la ecuación característica. Tenemos entonces, de acuerdo con la ecuación (5.8), que una solución particular es

$$x_p(t) = \frac{F_0\, t}{2\sqrt{km}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) = \frac{5t}{2\sqrt{20(5)}} \operatorname{sen} 2t = \frac{1}{4} t \operatorname{sen} 2t.$$

La solución general es por lo tanto:

$$x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t + \frac{1}{4} t \operatorname{sen} 2t.$$

La velocidad en todo tiempo t está dada por:

$$v(t) = -2c_1 \operatorname{sen} 2t + 2c_2 \cos 2t + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t + \frac{1}{2} t \cos 2t.$$

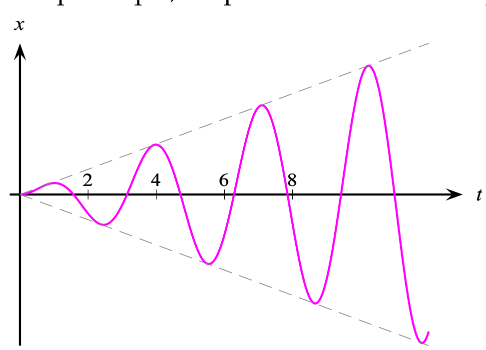
Si usamos las condiciones iniciales $x(0) = 0$ & $v(0) = 0$, obtenemos $c_1 = 0$ & $c_2 = 0$. Así la posición de la masa es:

$$x(t) = \frac{1}{4} t \operatorname{sen} 2t \text{ m}.$$

La velocidad es, entonces:

$$v(t) = \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t + \frac{1}{2} t \cos 2t \text{ m/s}.$$

En la figura siguiente se muestra la posición de la masa en el tiempo. Observe que, entre más tiempo pasa, más aumenta la amplitud de las oscilaciones. En este caso la fuerza de excitación siempre suministra energía al sistema, por lo cual es de esperar que, después de un cierto tiempo, el sistema se destruya.



□

Ejemplo 5.2.7 *Un resorte experimenta un alargamiento de* 0.025 *m por haber sido suspendida de él una masa de* 2 *kg. Al extremo superior del resorte se le da un movimiento* $y = 0.4 \operatorname{sen} 2t + 0.4 \cos 2t$ *m. Si no hay resistencia del aire, determine la posición de la masa en todo tiempo. Suponga que* $g = 10$ *m/s*^{2}.

▼ La constante del resorte se obtiene igualando el peso con la fuerza que ejerce el resorte sobre la masa cuando se está en equilibrio. Es decir: $mg = k\Delta l$, de donde $k = \dfrac{mg}{\Delta l} = \dfrac{2(10)}{0.025} = 800$ N/m. Consideremos que el origen de coordenadas se encuentra en el centro de la masa cuando el sistema está en equilibrio. La elongación o compresión del resorte es entonces $x - y$, de forma que la fuerza del resorte sobre la masa es

$$F = -k(x - y) = -800x + 320 \operatorname{sen} 2t + 320 \cos 2t.$$

Entonces, la ecuación diferencial que describe el movimiento es, de acuerdo con la segunda ley de Newton:

$$2\frac{d^2x}{dt^2} = -800x + 320 \operatorname{sen} 2t + 320 \cos 2t.$$

Simplificando se tiene:
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 400x = 160\operatorname{sen} 2t + 160\cos 2t.$$
Claramente la solución de la ecuación homogénea es
$$x_c(t) = c_1\cos 20t + c_2\operatorname{sen} 20t.$$
Para determinar una solución particular proponemos:
$$x_p(t) = A\operatorname{sen} 2t + B\cos 2t.$$
Derivando dos veces y sustituyendo en la ecuación diferencial, obtenemos:
$$396A\operatorname{sen} 2t + 396B\cos 2t = 160\operatorname{sen} 2t + 160\cos 2t.$$
De donde se infiere que $A = B = 0.4$. Concluimos entonces que
$$x_p(t) = 0.4\operatorname{sen} 2t + 0.4\cos 2t.$$
Y que
$$x(t) = c_1\cos 20t + c_2\operatorname{sen} 20t + 0.4\operatorname{sen} 2t + 0.4\cos 2t.$$
Si utilizamos las condiciones iniciales $x(0) = 0$ & $v(0) = 0$, obtenemos el sistema:
$$0 = c_1 + 0.4;$$
$$0 = 20c_2 + 0.8;$$
de donde:
$$c_1 = -0.4 \quad \& \quad c_2 = -0.04.$$
Finalmente, la solución es
$$x(t) = -0.4\cos 20t - 0.04\operatorname{sen} 20t + 0.4[\operatorname{sen} 2t + \cos 2t]\ \text{m}.$$

□

Ejercicios 5.2.3 *Vibraciones forzadas.* *Soluciones en la página 16*

1. Un resorte de constante k y un amortiguador de constante c están conectados en uno de sus extremos a un cuerpo de masa m y en el otro a una pared. El sistema descansa sobre una mesa horizontal sin fricción. Sobre el sistema se aplica una fuerza de excitación $F_e(t)$. Determine la posición y velocidad del cuerpo con las condiciones iniciales $x(0) = x_0 \quad \& \quad v(0) = v_0$.

   a. $m = 0.5$ kg, $c = 3$ N·s/m, $k = 4$ N/m, $x(0) = 0$ m, $v(0) = 2$ m/s & $F_e(t) = 3\cos t$.
   b. $m = 2.5$ kg, $c = 0$ N·s/m, $k = 10$ N/m, $x(0) = 0.1$ m, $v(0) = -1.2$ m/s & $F_e(t) = 2\cos 2t$.
   c. $m = 0.5$ kg, $c = 0$ N·s/m, $k = 32$ N/m, $x(0) = 0$ m, $v(0) = 0$ m/s & $F_e(t) = 3\cos 8t$.
   d. $m = 0.25$ kg, $c = 4$ N·s/m, $k = 25$ N/m,, $x(0) = 0.1$ m, $v(0) = -0.1$ m/s & $F_e(t) = 8\cos 2t$.
   e. $m = 1$ kg, $c = 3$ N·s/m, $k = 6.25$ N/m, $x(0) = 0$ m, $v(0) = 0$ m/s & $F_e(t) = 3\cos 5t$.

2. Un cuerpo de masa igual a 4 kg está unido a un resorte de constante $k = 16$ N/m. Se alarga el resorte una distancia de 0.3 m y se suelta desde el reposo. Si sobre el sistema se aplica una fuerza externa $F_e(t) = 1.5\cos 4t$, determine la posición y velocidad del cuerpo en todo tiempo.

3. Un cuerpo de masa igual a 4 kg está unido a un resorte de constante $k = 64$ N/m. Si sobre el sistema se aplica una fuerza de excitación $F_e(t) = 1.5\cos 4t$, determine la posición y velocidad del cuerpo en todo tiempo; suponga que la masa estaba en la posición $x_0 = 0.3$ y en reposo, al tiempo $t = 0$ s. ¿Qué ocurre cuando $F_e = 1.5\cos(4.1t)$?

4. A un sistema masa-resorte con masa igual a 2 kg y constante del resorte igual a 8 N/m se le somete a una fuerza de excitación $F_e(t) = 5\cos wt$. Si el sistema carece de amortiguamiento determine la posición del cuerpo con las condiciones iniciales $x(0) = 0$ m & $v(0) = 0$ m/s para los siguientes valores de $w = 2.5, 1, 5, 2.1, 2, 1.9$ & 2 rad/s. En cada caso construya la gráfica correspondiente.

5. Un cuerpo de masa 1 kg está unido a un resorte de constante $k = 1$ N/m. Determine la posición y la velocidad de la masa en todo tiempo, si sobre ésta se aplica una fuerza de excitación $F_e(t) = e^{-t}$, a partir de $t = 0$, suponiendo que el sistema estaba en reposo y en su posición de equilibrio.

6. Un cuerpo de masa 1 kg está unido a un resorte de constante $k = 1$ N/m. Determine la posición y la velocidad de la masa en todo tiempo, si sobre ésta se aplica una fuerza de excitación $F_e(t) = e^{-t}\cos 2t$, a partir de $t = 0$, suponiendo que el sistema estaba en reposo y en su posición de equilibrio.

7. Un cuerpo de masa 1 kg está unido a un resorte de constante $k = 16$ N/m. Determine la posición y la velocidad de la masa en todo tiempo, si sobre ésta se aplica una fuerza de excitación $F_e(t) = e^{-t}\operatorname{sen} t$, a partir de $t = 0$, suponiendo que el sistema estaba en reposo y en su punto de equilibrio.

8. Un sistema masa-resorte-amortiguador está colocado verticalmente y tiene constantes $m = \dfrac{1}{8}$ kg, $c = 1$ N·s/m y $k = 2$ N/m. Inicialmente la masa es colocada 1 m abajo de la posición de equilibrio, donde se le imprime una velocidad de 8 m/s hacia arriba. Determine la posición y la velocidad instantánea de la masa m, si sobre el sistema se aplica una fuerza de excitación $F_e(t) = 12.5\operatorname{sen} 2t$ N, a partir de $t = 0$.

9. Un sistema masa-resorte-amortiguador tiene constantes $m = 6.5$ kg, $c = 12$ N·s/m & $k = 6.5$ N/m. Determine la posición y velocidad de la masa en todo tiempo, si sobre ésta se aplica una fuerza de excitación $F_e(t) = 5e^{-\frac{12}{13}t}\cos\left(\dfrac{5}{13}t\right)$, a partir de $t = 0$, suponiendo que el sistema estaba en reposo y en su posición de equilibrio.

10. Sobre un sistema masa-resorte de constantes $m = 1$ kg y $k = 100$ N·s/m se aplica una fuerza de excitación $F_e(t) = 2\cos 10t$ durante un lapso de tiempo $0 \le t \le 2\pi$. Suponga que el sistema parte del reposo y de su posición de equilibrio. Determine la posición y velocidad antes, y después de $t = 2\pi$.

Ejercicios 5.2.3 *Vibraciones forzadas.* *Página: 14*

1. a. $x(t) = -\frac{5}{17}e^{-4t} - \frac{17}{85}e^{-2t} + \frac{42}{85}\cos t + \frac{36}{85}\operatorname{sen} t$ m;
   $v(t) = \frac{20}{17}e^{-4t} + \frac{34}{85}e^{-2t} - \frac{42}{85}\operatorname{sen} t + \frac{36}{85}\cos t$ m/s.
   b. $x(t) = 0.2t\operatorname{sen} 2t + 0.1\cos 2t - 0.6\operatorname{sen} 2t$ m;
   $v(t) = 0.4t\cos 2t - 1.2\cos 2t$ m/s.
   c. $x(t) = \frac{3}{8}t\operatorname{sen} 8t$ m; $v(t) = \frac{3}{8}\operatorname{sen} 8t + 3t\cos 8t$ m/s.
   d. $x(t) = \frac{3}{10}\cos 2t + \frac{1}{10}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{5}e^{-8t}\cos 6t - \frac{19}{60}e^{-8t}\operatorname{sen} 6t$ m;
   $v(t) = -\frac{3}{5}\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{5}\cos 2t - \frac{3}{10}e^{-8t}\cos 6t + \frac{56}{15}e^{-8t}\operatorname{sen} 6t$ m/s.
   e. $x(t) = -\frac{4}{41}\cos 5t + \frac{16}{205}\operatorname{sen} 5t + \frac{4}{41}e^{-\frac{3t}{2}}\cos 2t - \frac{5}{41}e^{-\frac{3t}{2}}\operatorname{sen} 2t$ m;
   $v(t) = \frac{20}{41}\operatorname{sen} 5t + \frac{16}{41}\cos 5t - \frac{1}{82}e^{-\frac{3t}{2}}\operatorname{sen} 2t + \frac{16}{41}e^{-\frac{3t}{2}}\cos 2t$ m/s.
2. $x(t) = \frac{53}{160}\cos 2t - \frac{1}{32}\cos 4t$ m; $v(t) = -\frac{53}{80}\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4t$ m/s.
3. Con $F_e = 1.5\cos 4t$:
   $x(t) = \frac{3}{64}t\operatorname{sen} 4t + \frac{3}{10}\cos 4t$ m;
   $v(t) = \frac{3}{16}t\cos 4t - \frac{369}{320}\operatorname{sen} 4t$ m/s.
   Con $F_e = 1.5\cos(4.1)t$:
   $x(t) = -\frac{25}{54}\cos(4.1t) + \frac{103}{135}\cos 4t$ m;
   $v(t) = \frac{205}{108}\operatorname{sen}(4.1t) + \frac{3}{16}t\cos 4t - \frac{6}{5}\operatorname{sen} 4t$ m/s.
4. a. Para $w = 2.5$: $x(t) = -\frac{20}{9}\operatorname{sen}\left(\frac{t}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{9t}{4}\right)$ m;
   b. para $w = 2.1$: $x(t) = -\frac{500}{41}\operatorname{sen}\left(\frac{t}{20}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{41t}{20}\right)$ m;
   c. para $w = 2$: $x(t) = -\frac{5}{8}\operatorname{sen} 2t$ m;
   d. para $w = 1.9$: $x(t) = -\frac{500}{39}\operatorname{sen}\left(\frac{t}{20}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{39t}{20}\right)$ m;
   e. para $w = 1.5$: $x(t) = -\frac{20}{7}\operatorname{sen}\left(\frac{t}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{7t}{4}\right)$ m.
5. $x(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - \cos t + \operatorname{sen} t)$ m;
   $v(t) = \frac{1}{2}(-e^{-t} + \operatorname{sen} t + \cos t)$ m/s.
6. $x(t) = -\frac{1}{10}e^{-t}(\cos 2t + 2\operatorname{sen} 2t) + \frac{1}{10}(\cos t + 3\operatorname{sen} 2t)$ m;
   $v(t) = \frac{1}{10}e^{-t}(-3\cos 2t + 4\operatorname{sen} 2t) + \frac{1}{10}(3\cos t - \operatorname{sen} t)$ m/s.
7. $x(t) = \frac{1}{130}e^{-t}(\cos t + 8\operatorname{sen} t) - \frac{1}{130}\cos 4t - \frac{7}{520}\operatorname{sen} 4t$ m;
   $v(t) = \frac{1}{130}e^{-t}(7\cos t - 9\operatorname{sen} t) + \frac{1}{130}(4\operatorname{sen} 4t - 7\cos 4t)$ m/s.
8. $x(t) = 3\operatorname{sen} 2t - 4\cos 2t + (6t + 5)e^{-4t}$ m;
   $v(t) = 6\cos 2t + 8\operatorname{sen} 2t - (24t + 14)e^{-4t}$ m/s.
9. $x(t) = te^{-\frac{12}{13}t}\operatorname{sen}\left(\frac{5t}{13}\right)$ m;
   $v(t) = \left[\left(1 - \frac{12t}{13}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{5t}{13}\right) + \frac{5t}{13}\cos\left(\frac{5t}{13}\right)\right]e^{\frac{-12t}{13}}$ m/s.

10. Cuando $0 \leq t \leq 2\pi$: $x(t) = \dfrac{1}{10} t \operatorname{sen}(10t)$ m & $v(t) = \dfrac{1}{10} \operatorname{sen} 10t + t \cos 10t$ m/s;
cuando $t \geq 2\pi$: $x(t) = \dfrac{\pi}{5} \operatorname{sen} 10t$ m & $v(t) = 2\pi \cos 10t$ m/s.